L'ENSEIGNEMENT
MATHÉMATIQUE

L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

MÉTHODOLOGIE ET ORGANISATION DE L'ENSEIGNEMENT
PHILOSOPHIE ET HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES
CHRONIQUE SCIENTIFIQUE — MÉLANGES — BIBLIOGRAPHIE.

REVUE INTERNATIONALE

PARAISSANT TOUS LES DEUX MOIS

DIRIGÉE PAR

C.-A. LAISANT
Docteur ès sciences,
Examinateur d'admission à l'Ecole polytechnique de Paris.

H. FEHR
Docteur ès sciences,
Professeur à l'Université de Genève.

AVEC LA COLLABORATION DE

A. BUHL
Docteur ès sciences
Professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse.

Organe officiel de la Commission internationale de l'Enseignement mathématique.

QUATORZIÈME ANNÉE
1912

GENÈVE
GEORG & Cie, ÉDITEURS

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR

LEIPZIG ET BERLIN
B. G. TEUBNER, ÉDITEUR

1912

GENÈVE

IMPRIMERIE ALBERT KÜNDIG

LE CALCUL FONCTIONNEL[1]

Par M. Jacques HADAMARD.
Professeur au Collège de France.

L'invention du Calcul infinitésimal n'a pas seulement constitué un perfectionnement des Mathématiques : elle a marqué un changement radical dans leur orientation.

Pour la Science grecque, tout problème se ramenait à la recherche d'un ou plusieurs nombres, déterminés d'une manière complète, quoique implicite, par les données de la question. Manifeste en ce qui concerne les problèmes d'Arithmétique, cela n'était pas moins certain dans le domaine géométrique, puisque les figures considérées par les Anciens (points, droites, plans, cercles, etc.) dépendaient chacune d'un nombre fini et même peu élevé de paramètres.

Etudier les relations entre certains nombres, laissés invariables dans tout le cours du raisonnement, ainsi que la manière d'utiliser ces relations pour calculer quelques-uns d'entre-eux, les autres étant supposés donnés : voilà ce que se proposèrent jusqu'au XVIIme siècle aussi bien « l'Algèbre des Modernes » — pour employer le langage de Descartes — que « l'Analyse des Anciens ».

L'exemple même de ceux qui furent dans l'antiquité, les précurseurs du Calcul infinitésimal, Eudoxe, Archimède, ne réagit pas, à cet égard, sur leurs successeurs directs.

Le cadre de la Géométrie antique ne fut vraiment dépassé et une arme nouvelle ne fut donnée à la Science que lorsque,

---

[1] Nous sommes heureux de pouvoir offrir a nos lecteurs cette intéressante Etude de M. J. HADAMARD sur le développement du Calcul fonctionnel. Elle est extraite du beau volume *Hommage à Louis Olivier* que la Revue générale des Sciences a consacré à la mémoire de son regretté fondateur et directeur. Nous la reproduisons avec l'autorisation de l'auteur et de la *Revue générale des Sciences.* LA RÉDACTION.

s'inspirant de cet exemple, les Cavalieri, les Fermat, les Roberval, les Pascal considérèrent à leur tour la *variation continue* de certains éléments numériques (ou ce qui revient au même, de certains éléments géométriques) liés les uns aux autres et jetèrent les bases de l'édifice que devaient achever Newton et Leibniz.

Entre leurs mains, il est vrai, l'introduction de ces variations simultanées donnait lieu à des problèmes analogues, quant à la forme, à ceux qui avaient été traités jusque-là, je veux dire à la détermination de certaines constantes arithmétiques ou géométriques : maxima et minima, aires, etc.

Mais ce stade devait bientôt être dépassé ; il constituait le début d'une évolution qui n'a cessé par la suite de se poursuivre dans le même sens : nous verrons plus loin comment elle se continue encore à l'heure actuelle.

Si les auteurs dont nous venons de citer les noms s'étaient attaqués à des variations simultanées ou, comme nous disons en langage moderne, à des *fonctions*, celles-ci n'étaient pas nouvelles : elles tiraient directement leur définition des problèmes et des figures mêmes qu'avaient étudiés les Anciens, ou de problèmes peu différents. En tout cas, cette définition était connue *a priori*.

Il en fut autrement lorsque les notions nouvelles déduites de celle de fonction eurent fait la preuve de leur extrême généralité, lorsqu'elles se furent montrées identiques à elles-mêmes pour toutes les fonctions connues à propos desquelles on les introduisit : on aperçut dès lors la possibilité et bientôt la nécessité de les appliquer à des circonstances toutes différentes, à des lois *inconnues* de variation simultanée.

La Géométrie analytique imposait, à elle seule, cette attitude. Qu'une ligne ou une surface eût une existence propre, qu'elle pût être elle-même inconnue, et non plus nécessairement donnée, d'un problème, il n'y avait rien de surprenant à cela. Or, « ligne » ou « surface », pour la Géométrie analytique, est synonyme de « variation simultanée ».

Mais les applications physiques ne montrèrent pas seulement la légitimité de ce nouveau point de vue, que le Calcul

infinitésimal permettait, pour la première fois, d'aborder : elles ne permirent pas à la Science de le laisser de côté. Dès que l'on commença à s'attaquer au mouvement et à mettre ses lois à la base de la Physique, il apparut que, dans l'étude de la Nature, on ne pouvait continuer à considérer comme seule individualité, comme seul objet de recherches, le nombre déterminé ou ses équivalents géométriques (point, droite, cercle...).

L'être mathématique, en un mot, ne fut plus le nombre : ce fut la loi de variation, la fonction.

La Mathématique n'était pas seulement enrichie de nouvelles méthodes : elle était transformée dans son objet.

* * *

La transformation ne fut pas totale du premier coup. Nous avons, tout à l'heure, employé le langage de l'Analyse moderne, et considéré le mot « fonction » comme traduisant ceux de « variation simultanée ». Ce n'est pas précisément sous cette forme, on le sait, que la nouvelle notion se présenta à ses premiers introducteurs. On connaissait plusieurs modes de calcul applicables aux nombres et permettant de les déduire les uns des autres : les opérations classiques de l'Arithmétique, l'exponentielle et le logarithme, le passage d'un arc à ses lignes trigonométriques, etc. Pour Jean Bernoulli, par exemple, et même pour Euler, une fonction était une combinaison, quelconque, d'ailleurs, de certaines de ces opérations appliquées à un ou plusieurs nombres arbitraires.

Cette conception dissimulait, en somme, à l'Analyse le saut qu'elle allait être obligée de faire et lui permettait de garder, en quelque sorte, un pied sur la rive qu'elle devait quitter. Les opérations appelées à définir la fonction inconnue pouvaient différer, d'une part, par leur nombre et leur ordre, de l'autre, par les coefficients constants qu'elles introduisaient. Trouver une fonction de nature donnée, c'était donc déterminer un certain nombre de constantes. Entre une question ainsi posée et celle de déterminer les

trois paramètres qui servent à définir un plan, par exemple, ou un cercle dans un plan donné, l'assimilation était possible. La seule difficulté d'un genre nouveau consistait à choisir, dans l'arsenal des opérations connues, celles que l'on pouvait se proposer de combiner.

Il en fut autrement lorsque, avec Fourier, Dirichlet, Cauchy, Riemann, la notion de fonction prit son sens moderne. Une fonction $y = f(x)$ ne s'obtient plus nécessairement par un certain nombre d'opérations prises dans une liste déterminée quelle qu'elle soit : c'est une correspondance quelconque établie entre chaque valeur que l'on peut attribuer à la quantité variable x et une valeur y, supposée seulement déterminée dès que la première est donnée, mais sans qu'on s'astreigne à employer, pour cela, tels ou tels modes de détermination plutôt que d'autres.

Cette fois, la nouvelle tendance de la Science ne pouvait manquer de prendre pleine conscience d'elle-même. Définir une fonction arbitraire, c'est définir sa valeur pour *chaque* valeur de x; si cette fonction est supposée représentée par une ligne, cette ligne est, elle aussi, quelconque et n'est déterminée que lorsqu'on en connaît chaque point. La connaissance de la fonction ou de la courbe équivaut donc non plus à celle de certains nombres, mais à celle d'une infinité de nombres ; et c'est encore sous cette forme que se posaient les nouveaux problèmes.

Tout au plus une transition existait-elle entre l'ancienne conception de fonction et la nouvelle, transition grâce à laquelle on put se rapprocher des conditions où l'on s'était placé jusque-là. Le nombre des opérations considérées par Euler, et celui des constantes qui y figurent, peuvent être pris indéfiniment grands. Or, si l'on use de cette faculté, les deux notions, sans jamais avoir (on le sait aujourd'hui) le même degré de généralité, sont pratiquement équivalentes. Deux expressions, entre autres, s'offraient, qui permettent de représenter sous forme semblable les fonctions les plus diverses. L'une est la série de Taylor, l'autre la série de Fourier. La première est la plus particulière des deux, et, à ce titre, se montre insuffisante dans nombre de cas ; la classe

des fonctions *analytiques*, qu'elle est capable d'atteindre, comprend cependant, non seulement toutes les combinaisons que les premiers analystes pouvaient songer à imaginer, mais les solutions de tous les problèmes qui s'étaient posés à eux. Quant aux séries trigonométriques, auxquelles le nom de Fourier reste attaché, on peut dire qu'elles sont aptes à définir, non, si l'on veut, toutes les fonctions possibles, mais du moins toutes celles qu'on peut avoir à introduire pratiquement.

On était donc à nouveau ramené à déterminer les expressions d'un type connu à l'avance, dont la recherche se réduisait à celle des coefficients indéterminés qui y figurent. Seulement, ces coefficients étaient, cette fois, en nombre infini. Mais une telle infinité n'était plus continue, comme celles qui constituent toutes les valeurs d'une fonction ou tous les points d'une courbe. C'était ce que nous appelons aujourd'hui une infinité *dénombrable :* les coefficients inconnus étaient numérotés ; ils correspondaient aux valeurs d'un indice qui parcourait la série des nombres entiers ; leur calcul successif était, dans ces conditions, aussi analogue que possible à celui d'un nombre fini de quantités.

* * *

Il suffit de résumer les étapes de l'évolution que nous venons de retracer pour en prévoir la suite logique.

Les nombres, d'abord considérés comme connus et fixes, sont soumis aux diverses opérations du calcul algébrique ; on apprend ensuite à les considérer comme inconnus et à les choisir de manière que ces mêmes opérations, effectuées sur eux, donnent des résultats indiqués à l'avance.

Enfin, on les considère comme variables d'une manière continue et on aboutit à la notion de fonction.

A son tour, la fonction est soumise, non seulement aux opérations du Calcul algébrique, mais aux opérations fondamentales du Calcul infinitésimal. C'est, nous l'avons dit, l'existence de ces deux opérations importantes, applicables

aux fonctions les plus diverses, qui conduit à traiter la fonction comme on a traité le nombre lui-même.

A ce point de vue, les équations différentielles et aux dérivées partielles sont bien les analogues des équations algébriques ordinaires par lesquelles on détermine les nombres. La fonction inconnue est soumise aux opérations de la différentiation et c'est le résultat de ces opérations, effectuées dans un certain ordre, qui doit avoir une valeur donnée à l'avance.

Mais jusqu'ici, on raisonne encore sur une fonction bien déterminée, même lorsqu'elle est inconnue. De plus, on lui fait subir des opérations d'un type bien déterminé, celles du Calcul algébrique ordinaire et celles du Calcul infinitésimal — jusqu'à ces dernières années, celles du Calcul différentiel seulement lorsqu'elles devaient porter sur des fonctions inconnues.

Si l'on veut continuer à suivre, en ce qui regarde les fonctions la voie même qui a été parcourue en partant des nombres, il restera :

1° A regarder la fonction elle-même, non plus comme choisie une fois pour toutes, mais comme continûment variable ;

2° A lui faire subir, non plus seulement deux ou trois opérations déterminées, mais des opérations plus ou moins arbitraires.

La branche des Mathématiques dont l'objet est ainsi défini est ce que l'on nomme aujourd'hui le *Calcul fonctionnel*.

Il résulte des considérations précédentes qu'on doit y voir la suite et la conséquence naturelle du Calcul infinitésimal lui-même et du courant d'idées qu'il a fait naître.

*
* *

Nous n'aurions toutefois justifié ainsi que d'une façon insuffisante l'utilité d'une nouvelle théorie et l'opportunité des efforts qu'on lui consacre [1].

---

[1] Rien n'empêcherait, dès aujourd'hui, de généraliser le Calcul fonctionnel comme celui-ci généralise l'Analyse classique. Nul mathématicien n'y songe, aucun problème posé jusqu'ici ne donnant lieu à pareille recherche.

Il ne suffit pas pour cela, en effet, d'une de ces analogies que l'on décore trop souvent du nom de logique. Les considérations de cette nature peuvent suggérer les idées : elles ne permettent pas à elles seules, d'en affirmer l'importance et la fécondité. Il faut que des problèmes venus d'ailleurs, posés par les applications, viennent montrer comme nécessaire la marche dont on peut seulement dire, sans cela, qu'elle se présente comme naturelle à l'esprit, C'est souvent à sa naissance même qu'une théorie trouve la meilleure occasion de faire ses preuves.

C'est ce qui s'est passé pour celle qui nous occupe. Dès la fin du XVIIme siècle, une série de questions introduites surtout par la Mécanique — quoique la première d'entre elles, celle du plus court chemin entre deux points, fût vieille comme la Géométrie elle-même — conduisait à constituer un premier chapitre du Calcul fonctionnel, le Calcul des Variations.

Peu d'années après, celui-ci arrivait à englober, non seulement certaines questions spéciales de Mécanique, mais la Mécanique analytique (et plus tard l'Energétique) tout entière.

La recherche de l'équilibre et, bientôt après, grâce au principe de d'Alembert, celle du mouvement, furent, en effet, ramenées à des questions de maximum ou de minimum. Nombre de ces problèmes (ceux de Statique relatifs aux milieux déformables et tous ceux de la Dynamique) renfermaient, d'autre part, comme inconnues, des fonctions ou des lignes ; or, les maxima ou minima de quantités dépendant de fonctions arbitraires font l'objet du Calcul des Variations.

Le problème était ainsi transformé dans le sens même de l'évolution que nous avons indiquée plus haut. Au lieu de considérer un système déterminé de fonctions inconnues et de le soumettre directement à la différentiation, on n'obtenait les équations différentielles auxquelles il devait satisfaire qu'en regardant tout d'abord ces fonctions inconnues comme arbitrairement variables.

Cela pouvait sembler une augmentation de la difficulté :

cependant, il est acquis aujourd'hui que, dans toutes les recherches relatives aux équations différentielles en question, soit qu'il s'agisse de leur intégration, soit (comme dans les travaux connus de M. Poincaré) de l'étude qualitative des courbes intégrales, soit encore que, dépassant le cadre de l'ancienne Mécanique, on cherche à la transformer pour l'adopter aux nouveaux besoins de la Physique, c'est le principe de la moindre action qui doit servir de guide.

Grâce à ces découvertes, le Calcul des Variations et, avec lui le Calcul fonctionnel ont pris place définitivement dans la Science.

* * *

Les problèmes de l'Electricité et de la Chaleur ne sont pas moins étroitement liés à des considérations de Calcul fonctionnel.

Par exemple, l'un des principaux d'entre eux, le problème de Dirichlet, consiste à déterminer une solution de l'équation classique de Laplace, lorsqu'on suppose connue la distribution de ces valeurs sur la frontière du domaine où on le considère.

Les données introduisent donc :

1° La forme d'une ligne ou d'une surface limitant une portion de place ou d'espace ;

2° Un ensemble de valeurs numériques (celles de la fonction cherchée) attachées à un point de cette ligne ou d'une surface.

On peut dire que la solution sera obtenue par certaines *opérations fonctionnelles* exécutées sur ces données : on désigne sous ce nom, en effet, tout calcul dont les résultats dépendent de la forme de certaines fonctions.

Dans le cas actuel, les données de la seconde sorte (valeurs de la fonction inconnue) interviennent d'une façon simple : on peut même, par un artifice classique (l'emploi de la « fonction de Green »), les ramener à ne plus être arbitraires, mais à dépendre seulement de deux ou trois constantes (suivant qu'on opère dans le plan ou dans l'espace).

Il n'en est pas de même pour la forme de la frontière :

elle influe sur le calcul d'une manière profonde et complexe. Si (comme on le peut, grâce à la fonction de Green) on considère l'opération fonctionnelle comme portant sur cette seule partie des données, cette opération est très compliquée : sa nature est restée mal connue jusque dans ces derniers temps.

Si Neumann et M. Fredholm ont triomphé de cette difficulté et ont pu, non seulement démontrer l'existence de la solution, mais mettre en évidence la manière dont elle dépend des données, c'est précisément en suivant, au fond, la voie indiquée dans ce qui précède qu'ils y sont parvenus. Il a fallu tout d'abord, pour cela ne pas craindre d'introduire une équation où l'inconnue fut soumise à des opérations déjà usuelles, il est vrai, en Analyse, mais autres cependant que celles qui figurent dans les équations (équations différentielles ou aux dérivées partielles) traitées jusque-là. L'inconnue y figure sous un signe d'intégration.

D'autre part, pour résoudre une telle *équation intégrale*, M. Fredholm se place au point de vue même du Calcul fonctionnel : il substitue à l'équation donnée un système d'équations du premier degré, telles que les considère l'Algèbre élémentaire, mais à une infinité d'inconnues, qui sont les valeurs successives de la fonction cherchée.

Il est remarquable, d'ailleurs, que, ainsi considérées, les équations intégrales de Fredholm apparaissent comme plus simples, au fond, que les équations différentielles auxquelles se bornait, jusque-là, l'Analyse. Il s'y présente cette circonstance importante que la classe des opérations auxquelles on soumet la fonction inconnue forme un *groupe ;* on peut combiner arbitrairement deux (ou plusieurs) opérations de cette espèce, pour en former une troisième, de même nature que les premières (ce qui n'a pas lieu pour les premiers membres des équations différentielles, tant qu'on en limite l'ordre).

Grâce à ce fait, la solution de l'équation est réduite à la formation d'une opération, laquelle appartient également à la

---

[1] On sait qu'on est conduit à cette question lorsqu'on cherche la distribution électrique à la surface d'un conducteur de forme donnée placé dans un champ électrique donné, lequel intervient par les valeurs de son potentiel sur cette surface.

catégorie considérée, et qui est l'*inverse* de celle qui figure au premier membre de l'équation.

Ajoutons que, même avant la Physique mathématique, la Théorie des Fonctions avait provoqué l'application du Calcul fonctionnel. Elle devait, elle aussi, y être fatalement conduite. On ne pouvait poursuivre des recherches aussi approfondies que celles auxquelles notre siècle s'est livré sur les propriétés des fonctions analytiques et affronter les obstacles qu'offre une pareille étude si l'on ne cherchait, par des transformations fonctionnelles convenablement choisies, à passer du simple au compliqué, du connu à l'inconnu. Aussi, un certain nombre des résultats les plus importants n'ont-ils pu être établis que par cette voie.

*
* *

Si essentiel, nous espérons l'avoir montré, que soit le Calcul fonctionnel aux progrès futurs de la Science, les difficultés qu'il soulève, et qui sont extrêmes, n'ont été élucidées jusqu'à ce jour que sur un très petit nombre de points, malgré les travaux de géomètres parmi lesquels nous citerons MM. Volterra, Pincherle, Bourlet, Fréchet, Moore, etc.

Les résultats obtenus concernent pour une grande part les opérations linéaires. Ce cas n'a pas été seulement abordé de préférence parce qu'il est plus simple que le cas général, mais aussi parce qu'il a avec lui d'importantes relations, celles mêmes que le Calcul différentiel a appris à reconnaître pour les fonctions telles qu'on les considère habituellement en Analyse.

Pour celles-ci si compliquées qu'elles se montrent lorsqu'on les étudie dans un domaine fini, la variation infinitésimale, la différentielle, est une quantité linéaire par rapport aux différentielles des variables.

Le Calcul des Variations est, pour les opérations fonctionnelles, ce que le Calcul différentiel est pour les fonctions. Il fournit, de même, pour la variation des quantités définies par les opérations fonctionnelles les plus simples et qui se

sont présentées les premières, des expressions linéaires par rapport aux variations des fonctions soumises à ces opérations : expressions que l'on a appris de M. Volterra à étendre à des opérations beaucoup plus générales.

Seulement, le mot « linéaire » n'a plus ici le sens simple qu'il reçoit forcément lorsqu'on l'applique aux fonctions d'un nombre fini d'arbitraires. Dire qu'une opération fonctionnelle est linéaire signifie uniquement que, appliquée à une somme $f_1 + f_2$ de deux fonctions, elle donne nécessairement un résultat égal à la somme de ceux auxquels on arriverait en l'appliquant successivement aux deux termes f_1 et f_2.

Si nous y avions remplacé les mots « opération fonctionnelle » par celui de « fonction » et celui de « fonction » par « nombre », la condition précédente suffirait à exprimer qu'une fonction, supposée continue, d'un nombre déterminé de variables est, par rapport à celles-ci, un polynôme homogène du premier degré de l'Algèbre élémentaire.

Dans le domaine fonctionnel, les choses ne se passent plus aussi simplement. Une opération linéaire, au sens qui vient d'être indiqué, peut revêtir des formes assez variées. L'une des plus simples consiste à considérer la valeur de la fonction arbitraire ou encore une de ses dérivées pour une valeur déterminée de l'argument qui figure dans cette fonction. La quantité $f(a)$, où a est une constante donnée, dépend linéairement de la forme de la fonction f. Mais on a encore une quantité satisfaisant à la même condition en prenant l'intégrale définie

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{K}(x)\,dx \quad ,$$

quelles que soient la fonction K (x) et les constantes a, b.

C'est par des combinaisons de symboles des deux formes précédentes que s'expriment les opérations fonctionnelles linéaires auxquelles on est conduit, ainsi que nous l'avons indiqué plus haut, en Calcul des Variations, du moins dans les exemples que l'on a eu à examiner jusqu'ici. Mais il est,

par contre, connu aujourd'hui qu'on n'a même pas ainsi toutes les fonctionnelles linéaires, à moins qu'on n'utilise la notion d'intégrale définie dans des conditions un peu plus générales et un peu plus compliquées que celles où on la considère usuellement.

Dans ces recherches de Calcul fonctionnel comme dans les phases antérieures de l'étude des fonctions, les deux attitudes que nous avons mentionnées précédemment sont possibles, et chacune d'elles a été adoptée.

On peut considérer la fonction sur laquelle on opère comme définie par l'ensemble des coefficients de son développement, soit en série de Taylor, soit en série trigonométrique. Cette manière d'opérer a été particulièrement employée par M. Pincherle et ses successeurs, dans les applications aux fonctions analytiques, auxquelles le premier développement (avec une origine et dans un domaine convenable) est toujours applicable.

Dans bien des cas, au contraire, on opère directement sur les valeurs mêmes de la fonction. C'est ce qui se passe en Calcul des Variations. Non seulement on n'a pas besoin de l'intermédiaire d'un développement quelconque pour obtenir la variation des expressions envisagées, mais, une fois celle-ci écrite, c'est en faisant varier individuellement certaines valeurs de la fonction inconnue, à l'exclusion des autres, qu'Euler et Lagrange en déduisent les conditions nécessaires de maximum ou minimum.

C'est d'un point de vue tout semblable que partent, nous l'avons dit, les calculs par lesquels M. Fredholm résoud son équation intégrale.

* * *

Mais on a été conduit récemment à se demander si, préalablement aux recherches dont nous venons de parler, une première étude de nature toute différente n'était pas indispensable.

Pour en montrer la nécessité, nous recourrons encore à notre comparaison avec les fonctions ordinaires.

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse d'une fonction seule variable x : cette variable sera supposée arbitraire, au moins dans un certain intervalle. Si la fonction est à deux variables, celles-ci pourront être considérées comme les coordonnées d'un point lequel sera, par exemple, variable dans une certaine aire plane ; le point sera variable dans un certain volume de l'espace, s'il y a trois variables, etc. En un mot, une fonction est une quantité liée à la position d'un point, lequel décrit un contenu linéaire, superficiel ou spatial.

Si les notions classiques relatives aux fonctions ont pu être constituées sans trop de peine, c'est que les propriétés des continus en question nous étaient familières et nous apparaissaient comme évidentes, même celles qui, on le sait aujourd'hui, donnent lieu à d'insurmontables difficultés lorsqu'on essaie de les démontrer par le raisonnement.

Dans ces dernières années seulement, la théorie des ensembles de M. Cantor nous a montré, dans le continu linéaire lui-même, une foule de propriétés et de circonstances dont nous n'avions auparavant aucune idée.

Ces circonstances singulières se rencontrent d'ailleurs effectivement dans certains chapitres de la Théorie des Fonctions. On n'a pas eu, toutefois, à les considérer dans les débuts de celle-ci et c'est ce qui lui a permis de se développer.

Nous pouvons maintenant comprendre quelle difficulté grave se présente pour le Calcul fonctionnel.

Ce dernier se trouve dans les conditions où serait la théorie des Fonctions si les propriétés du continu nous étaient totalement inconnues.

Le *continu fonctionnel* — c'est-à-dire la multiplicité obtenue en faisant varier continûment une fonction de toutes les manières possibles — n'offre, en effet, à notre esprit, aucune image simple. L'intuition géométrique ne nous apprend rien, *à priori*, sur son compte.

Nous sommes forcés de remédier à cette ignorance, et nous ne pouvons le faire qu'analytiquement, en créant à l'usage du continu fonctionnel, un chapitre de Théorie des ensembles.

C'est ce qu'un jeune géomètre, M. Fréchet, a déjà entrepris. Les résultats auxquels il est parvenu pour le nouveau continu, montrent, avec ceux auxquels nous sommes habitués dans l'espace ordinaire, de notables différences. C'est ainsi, pour ne donner qu'un exemple, que la notion de limite peut être caractérisée par plusieurs sortes de propriétés qui, équivalentes entre elles dans ce dernier cas, ne le sont plus dans le précédent[1].

Ces travaux devront être continués. La tâche la moins délicate ne sera peut-être pas de savoir quelles sont les circonstances qui n'interviendront que dans des cas compliqués, comme le font, dans la Théorie des Fonctions, les ensembles parfaits non continus — et celles qui, au contraire, se présenteront à chaque instant.

Rien n'est peut-être plus propre que les recherches que nous venons de mentionner en dernier lieu à nous faire sentir toutes les obscurités que doit offrir pour nous le Calcul fonctionnel. Mais, si grandes qu'elles puissent être, son importance pour l'avenir de l'Analyse est trop vitale pour que nous puissions nous refuser à les envisager.

---

[1] Les récentes publications de M. Moore viennent jeter un pont entre les recherches de M. Fréchet et celles dont nous avons parlé auparavant. Partant, comme M. Fréchet, du continu fonctionnel ou même de continus plus généraux encore, M. Moore (moyennant les hypothèses nécessaires) leur applique non plus seulement la théorie des ensembles, mais les principales opérations du calcul, telles que la formation de séries convergentes.

D'autre part, le Calcul fonctionnel vient de recevoir de très importants perfectionnements dans la Thèse qu'a soutenue, devant l'Université de Paris, M. Paul Lévy. Mais, dans ce travail, la direction adoptée n'est pas celle que nous venons de mentionner; elle relève du point de vue de M. Volterra et des considérations présentées p. 12-13. — (Note ajoutée à la réimpression. *J. H.*)

LES SOMMES DE $p^{\text{ièmes}}$ PUISSANCES DISTINCTES DE NOMBRES POLYGONAUX DE n COTÉS ÉGALES A UNE $p^{\text{ième}}$ PUISSANCE D'UN NOMBRE POLYGONAL DE n COTÉS

Soit n_x le $x^{\text{ième}}$ nombre polygonal de n côtés, en sorte que

$$n_x \equiv \frac{1}{2} x [(n-2)x + 4 - n]$$

et par suite $2_x \equiv x$; si $S^{(n)}_{p,x}$ représente la somme des $p^{\text{ièmes}}$ puissances des x premiers nombres polygonaux de n côtés et $S_{p,x}$ la somme des $p^{\text{ièmes}}$ puissances des x premiers nombres entiers, on trouve[1]

$$S^{(n)}_{p,x} \,\underline{\Omega}\, \frac{1}{2^p} S_{p,x} [(n-2) S_{0,p} + (4-n)]^p ,$$

égalité dans laquelle $S^{(n)}_{p,x}$ est du $(2p+1)^{\text{ième}}$ degré en x. Nous passons du signe $\underline{\Omega}$ au signe $=$, après développement, en convenant d'ajouter les exposants de $S_{0,x}$ à son premier indice 0 et en admettant que $S_{\beta,x} \times S_{\gamma,x} = S_{\beta+\gamma,x}$.

Supposons maintenant qu'une somme de $p^{\text{ièmes}}$ puissances distinctes des nombres polygonaux de n côtés puisse être une $p^{\text{ième}}$ puissance d'un nombre polygonal de n côtés, et considérons l'identité

$$n^p_{x-\alpha_1} + n^p_{x-\alpha_2} + \dots + n^p_{x-\alpha_m} + n^p_x = n^p_{x+\alpha} \qquad (1)$$

---

[1] *Les sommes de* p^{ièmes} *puissances distinctes égales à une* p^{ième} *puissance.* E. Barbette, page 148. Editeur : Gauthier-Villars, Paris ; prix : Fr. 12,50.

dans laquelle les $p^{\text{ièmes}}$ puissances sont écrites par ordre de grandeur, en sorte que

$$x - 1 \geqq \alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_m \geqq 1 .$$

Ajoutons aux deux membres de l'égalité (1) les lacunes laissées par les parties du premier membre dans la suite des $p^{\text{ièmes}}$ puissances des x premiers nombres polygonaux de n côtés n_1^p, n_2^p, ... , n_x^p ; nous obtenons

$$\begin{aligned} S_{p,x}^{(n)} = n_{x+\alpha}^p &+ n_{x-1}^p + n_{x-2}^p + \dots + n_{x-\alpha_m+1}^p \\ &+ n_{x-\alpha_m-1}^p + n_{x-\alpha_m-2}^p + \dots + n_{x-\alpha_{m-1}+1}^p \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &+ n_{x-\alpha_1-1}^p + n_{x-\alpha_1-2}^p + \dots + n_1^p , \end{aligned}$$

égalité qui entraîne la condition $S_{p,x}^{(n)} \geqq n_{x+\alpha}^p$.

Par suite, si l'inégalité $S_{p,x}^{(n)} < n_{x+1}^p$ n'est satisfaite que pour $x \leqq \mu$, il n'existera aucune somme de $p^{\text{ièmes}}$ puissances distinctes de nombres polygonaux de n côtés, dont la plus grande est n_2^p, ou n_3^p, ou n_4^p, ... , ou n_μ^p, qui soit égale à une $p^{\text{ième}}$ puissance d'un nombre polygonal de n côtés.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'égalité (1) existe se déterminent, en ce qui concerne les nombres polygonaux de n côtés pour $n > 2$, ainsi que nous l'avons fait dans l'hypothèse $n = 2$ dans notre ouvrage sur les sommes de $p^{\text{ièmes}}$ puissances.

Des relations

$$S_{1,x}^{(3)} = \frac{1}{6} x(x+1)(x+2)$$

$$S_{1,x}^{(4)} = \frac{1}{6} x(x+1)(2x+1)$$

$$S_{1,x}^{(5)} = \frac{1}{2} x^2(x+1)$$

$$S_{1,x}^{(6)} = \frac{1}{6} x(x+1)(4x-1)$$

nous déduisons, ainsi que nous l'avons fait pour les nombres carrés (pages 77 et 105), que pour qu'une somme de nombres

polygonaux de n côtés soit un nombre polygonal de n côtés, il faut et il suffit que l'on ait trois conditions distinctes ; il s'ensuit que l'*égalité*

$$n_{x-\alpha} + n_x = n_{x+\alpha} \qquad (2)$$

peut exister : en effet, le nombre x étant donné, deux des trois conditions précitées permettront de déterminer les couples de valeurs correspondantes de α_1 et α ; le nombre de solutions sera limité, α devant satisfaire à l'inégalité $S_{1,x}^{(n)} \geqq n_{x+\alpha}$. Et si l'un de ces couples transforme la troisième condition en identité, il existera une relation de la forme (2). Nous avons montré, dans notre étude sur les $p^{\text{ièmes}}$ puissances (page 153) que de telles sommes existent.

Observation. — Quoique les problèmes qui vont suivre s'appliquent aux $p^{\text{ièmes}}$ puissances pour toute valeur de p, nous n'examinerons dans nos exemples que l'hypothèse $p = 1$.

Problème I. — *Quelles sont toutes les sommes de* $p^{\text{ièmes}}$ *puissances distinctes de nombres polygonaux de* n *côtés, dont la plus grande est* n_x^p, *égales à une* $p^{\text{ième}}$ *puissance d'un nombre polygonal de* n *côtés ?*

Solution. — Soit

$$n_{x+h}^p \leqq S_{p,x}^{(n)} < n_{x+h+1}^p .$$

L'égalité $S_{p,x}^{(n)} = n_{x+h}^p$, si elle existe, fournit une première solution

$$n_1^p + n_2^p + n_3^p + \ldots + n_x^p = n_{x+h}^p .$$

Posons

$$S_{p,x}^{(n)} = n_{x+\alpha}^p + [S_{p,x}^{(n)} - n_{x+\alpha}^p] , \qquad (3)$$

α variant de 1 à h, puis transformons le crochet par différences successives en une somme de $p^{\text{ièmes}}$ puissances distinctes de nombres polygonaux de n côtés, si possible, dont la plus grande ne dépasse pas n_{x-1}^p, mais peut être moindre : en supprimant de part et d'autre de l'égalité (3) ainsi transformée, les parties communes, nous obtiendrons autant de solutions qu'il existera de sommes de $p^{\text{ièmes}}$ puissances distinctes égales à ce crochet ; il n'y en aura pas d'autre.

Sommes de nombres triangulaires distincts, dont le plus grand est 3_6 *ou* 21, *égales à un nombre triangulaire :*

$$S^{(3)}_{1,6} = 56 .$$

1° $1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 = 56 = 28 + 15 + 10 + 3$

d'où $1 + 6 + 21 = 28$ ou $3_1 + 3_3 + 3_6 = 3_7$;

2° $1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 = 56 = 36 + 10 + 6 + 3 + 1$

d'où $15 + 21 = 36$ ou $3_5 + 3_6 = 3_8$;

3° $1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 = 56 = 45 + 10 + 1$

d'où $3 + 6 + 15 + 21 = 45$ ou $3_2 + 3_3 + 3_5 + 3_6 = 3_9$;

4° $1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 = 56 = 55 + 1$

d'où $3 + 6 + 10 + 15 + 21 = 55$ ou $3_2 + 3_3 + 3_4 + 3_5 + 3_6 = 3_{10}$.

Sommes de nombres carrés distincts, dont le plus grand est 4_8 *ou* 64, *égales à un nombre carré :*

$$S^{(4)}_{1,8} = 204 .$$

1° $1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64$
$= 204 = 81 + 49 + 36 + 25 + 9 + 4$

d'où $1 + 16 + 64 = 81$ ou $4_1 + 4_2 + 4_8 = 4_9$;

2° $1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64$
$= 204 = 100 + 49 + 25 + 16 + 9 + 4 + 1$

d'où $36 + 64 = 100$ ou $4_6 + 4_8 = 4_{10}$;

3° $1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64$
$= 204 = 121 + 49 + 25 + 9$

d'où $1 + 4 + 16 + 36 + 64 = 121$ ou $4_1 + 4_2 + 4_4 + 4_6 + 4_8 = 4_{11}$;

4° $1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64$
$= 204 = 169 + 25 + 9 + 1$

d'où $4 + 16 + 36 + 49 + 64 = 169$ ou $4_2 + 4_4 + 4_6 + 4_7 + 4_8 = 4_{13}$.

Sommes de nombres pentagonaux distincts, dont le plus grand est 5_9 *ou* 117, *égales à un nombre pentagonal :*

$$S^{(5)}_{1,9} = 405 .$$

1° $1+5+12+22+35+51+70+92+117$
$= 405 = 145+92+70+51+35+12$

d'où $1+5+22+117=145$ ou $5_1+5_2+5_4+5_9=5_{10}$;

2° $1+5+12+22+35+51+70+92+117$
$= 405 = 210+92+51+35+12+5$

d'où $1+22+70+117=210$ ou $5_1+5_4+5_7+5_9=5_{12}$;

3° $1+5+12+22+35+51+70+92+117$
$= 405 = 210+70+51+35+22+12+5$

d'où $1+92+117=210$ ou $5_1+5_8+5_9=5_{12}$;

4° $1+5+12+22+35+51+70+92+117$
$= 405 = 287+70+35+12+1$

d'où $5+12+51+92+117=287$ ou $5_2+5_4+5_6+5_8+5_9 = 5_{14}$;

5° $1+5+12+22+35+51+70+92+117$
$= 405 = 330+70+5$

d'où $1+12+22+35+51+92+117=330$ ou $5_1+5_3+5_4+5_5+5_6+5_8+5_9=5_{15}$;

6° $1+5+12+22+35+51+70+92+117$
$= 405 = 330+35+22+12+5+1$

d'où $51+70+92+117=330$ ou $5_6+5_7+5_8+5_9=5_{15}$.

Sommes de nombres hexagonaux distincts, dont le plus grand est 6_8 *ou* 120, *égales à un nombre hexagonal :*

$$S^{(6)}_{1,8} = 372 \ .$$

Le problème n'admet que la solution donnée par l'identité

$$1+6+15+28+45+66+91+120 = 372 = 231+91+28+15+6+1$$

d'où $45+66+120=231$ ou $6_5+6_6+6_8=6_{11}$.

Problème II. — *Quelles sont toutes les sommes de* $p^{\text{ièmes}}$ *puissances distinctes de nombres polygonaux de* n *côtés, égales à une* $p^{\text{ième}}$ *puissance donnée* n^p_q *d'un nombre polygonal de* n *côtés ?*

Solution. — Soit

$$S^{(n)}_{p,x-1} < n^p_q \leqq S^{(n)}_{p,x}.$$

Calculons successivement

$$S^{(n)}_{p,x}\ ;\quad S^{(n)}_{p,x+1}\ ;\quad S^{(n)}_{p,x+2}\ ;\ \ldots\ ;\ S^{(n)}_{p,q-1}\ ;$$

puis transformons chacun des résultats obtenus en sommes de $p^{\text{ièmes}}$ puissances distinctes de nombres polygonaux de n côtés dont la plus grande est n^p_q et dont toutes les autres sont moindres respectivement que

$$n^p_x\ ;\quad n^p_{x+1}\ ;\quad n^p_{x+2}\ ;\ \ldots\ ;\ n^p_{q-1}.$$

En supprimant des deux membres des égalités ainsi transformées, les termes communs, nous formerons toutes les sommes de $p^{\text{ièmes}}$ puissances distinctes égales à la $p^{\text{ième}}$ puissance donnée n^p_q.

Sommes de nombres triangulaires distincts égales au nombre triangulaire 3_{10} *ou* 55 :

$$35 < 55 < 56 \quad \text{ou} \quad S^{(3)}_{1,5} < 3_{10} < S^{(3)}_{1,6}\ ;$$

$$S^{(3)}_{1,6} = 56\ ;\quad S^{(3)}_{1,7} = 84\ ;\quad S^{(3)}_{1,8} = 120\ ;\quad S^{(3)}_{1,9} = 165.$$

1° $S^{(3)}_{1,6}$ ou $1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21$
$= 56 = 55 + 1$

d'où $3 + 6 + 10 + 15 + 21 = 55$ ou $3_2 + 3_3 + 3_4 + 3_5 + 3_6 = 3_{10}$;

2° $S^{(3)}_{1,7}$ ou $1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28$
$= 84 = 55 + 15 + 10 + 3 + 1$

d'où $6 + 21 + 28 = 55$ ou $3_3 + 3_6 + 3_7 = 3_{10}$;

3° $S^{(3)}_{1,8}$ ou $1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 + 36$
$= 120 = 55 + 28 + 21 + 15 + 1$

d'où $3 + 6 + 10 + 36 = 55$ ou $3_2 + 3_3 + 3_4 + 3_8 = 3_{10}$;

$S^{(3)}_{1,8}$ ou $1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 + 36$
$= 120 = 55 + 28 + 21 + 10 + 6$

d'où $1 + 3 + 15 + 36 = 55$ ou $3_1 + 3_2 + 3_5 + 3_8 = 3_{10}$;

4° $S^{(3)}_{1,9}$ ou $1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 + 36 + 45$
$= 165 = 55 + 36 + 28 + 21 + 15 + 10$

d'où $1 + 3 + 6 + 45 = 55$ ou $3_1 + 3_2 + 3_3 + 3_9 = 3_{10}$;

$S^{(3)}_{1,0}$ ou $1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 + 36 + 45$
$= 165 = 55 + 36 + 28 + 21 + 15 + 6 + 3$

d'où $10 + 45 = 55$ ou $3_4 + 3_9 = 3_{10}$. $+ 1$

Sommes de nombres carrés distincts égales au nombre carré 4_{11} *ou* 121 :

$$91 < 121 < 140 \quad \text{ou} \quad S^{(4)}_{1,6} < 4_{11} < S^{(4)}_{1,7} \ ;$$

$$S^{(4)}_{1,7} = 140 \ , \quad S^{(4)}_{1,8} = 204 \ ; \quad S^{(4)}_{1,9} = 285 \ ; \quad S^{(4)}_{1,10} = 385 \ .$$

1° $S^{(4)}_{1,7}$ ne fournit aucune solution ;

2° $S^{(4)}_{1,8}$ ou $1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64$
$= 204 = 121 + 49 + 25 + 9$

d'où $1 + 4 + 16 + 36 + 64 = 121$ ou $4_1 + 4_2 + 4_4 + 4_6 + 4_8 = 4_{11}$;

3° $S^{(4)}_{1,9}$ ou $1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 + 81$
$= 285 = 121 + 64 + 49 + 25 + 16 + 9$

d'où $4 + 36 + 81 = 121$ ou $4_2 + 4_6 + 4_9 = 4_{11}$; $+ 1$

4° $S^{(4)}_{1,10}$ ou $1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 + 81 + 100$
$= 385 = 121 + 81 + 64 + 49 + 36 + 25$
$+ 9$

d'où $1 + 4 + 16 + 100 = 121$ ou $4_1 + 4_2 + 4_4 + 4_{10} = 4_{11}$.

Sommes de nombres pentagonaux distincts égales au nombre pentagonal 5_8 *ou* 92 :

$$75 < 92 < 126 \quad \text{ou} \quad S^{(5)}_{1,5} < 5_8 < S^{(5)}_{1,6} \ ;$$

$$S^{(5)}_{1,6} = 126 \ ; \quad S^{(5)}_{1,7} = 196 \ .$$

1° $S^{(5)}_{1,6}$ ou $1 + 5 + 12 + 22 + 35 + 51 = 126 = 92 + 22 + 12$

d'où $1 + 5 + 35 + 51 = 92$ ou $5_1 + 5_2 + 5_5 + 5_6 = 5_8$;

2° $S^{(5)}_{1,7}$ ou $1 + 5 + 12 + 22 + 35 + 51 + 70$
$= 196 = 92 + 51 + 35 + 12 + 5 + 1$

d'où $22 + 70 = 92$ ou $5_4 + 5_7 = 5_8$.

Sommes de nombres hexagonaux distincts égales au nombre hexagonal 6_{13} *ou* 325 :

$$252 < 325 < 372 \quad \text{ou} \quad S_{1,7}^{(6)} < 6_{13} < S_{1,8}^{(6)} ;$$

$$S_{1,8}^{(6)} = 372 \; ; \quad S_{1,9}^{(6)} = 525 \; ; \quad S_{1,10}^{(6)} = 715 \; ; \quad S_{1,11}^{(6)} = 946 \; ; \quad S_{1,12}^{(6)} = 1222 \, .$$

1° $S_{1,8}^{(6)}$ ne fournit pas de solution ;

2° $S_{1,9}^{(6)}$ ou $1 + 6 + 15 + 28 + 45 + 66 + 91 + 120 + 153$
$= 525 = 325 + 120 + 45 + 28 + 6 + 1$

d'où $15 + 66 + 91 + 153 = 325$ ou $6_3 + 6_6 + 6_7 + 6_9 = 6_{13}$;

$S_{1,9}^{(6)}$ ou $1 + 6 + 15 + 28 + 45 + 66 + 91 + 120 + 153$
$= 525 = 325 + 91 + 66 + 28 + 15$

d'où $1 + 6 + 45 + 120 + 153 = 325$ ou $6_1 + 6_2 + 6_5 + 6_8 + 6_9 = 6_{13}$;

3° $S_{1,10}^{(6)}$ ou $1 + 6 + 15 + 28 + 45 + 66 + 91 + 120 + 153 + 190$
$= 715 = 325 + 153 + 120 + 66 + 45 + 6$

d'où $1 + 15 + 28 + 91 + 190 = 325$ ou $6_1 + 6_3 + 6_4 + 6_7 + 6_{10} = 6_{13}$;

$S_{1,10}^{(6)}$ ou $1 + 6 + 15 + 28 + 45 + 66 + 91 + 120 + 153 + 190$
$= 715 = 325 + 153 + 91 + 66 + 45 + 28$
$+ 6 + 1$

d'où $15 + 120 + 190 = 325$ ou $6_3 + 6_8 + 6_{10} = 6_{13}$;

4° $S_{1,11}^{(6)}$ ou $1 + 6 + 15 + 28 + 45 + 66 + 91 + 120 + 153 + 190 + 231$
$= 946 = 325 + 190 + 153 + 120 + 91$
$+ 66 + 1$

d'où $6 + 15 + 28 + 45 + 231 = 325$ ou $6_2 + 6_3 + 6_4 + 6_5 + 6_{11} = 6_{13}$;

$S_{1,11}^{(6)}$ ou $1 + 6 + 15 + 28 + 45 + 66 + 91 + 120 + 153 + 190 + 231$
$= 946 = 325 + 190 + 153 + 120 + 91$
$+ 45 + 15 + 6 + 1$

d'où $28 + 66 + 231 = 325$ ou $6_4 + 6_6 + 6_{11} = 6_{13}$;

5° $S_{1,12}^{(6)}$ ou $1 + 6 + 15 + 28 + 45 + 66 + 91 + 120 + 153 + 190 + 231 + 276$
$= 1222 = 325 + 231 + 190 + 153 + 120$
$+ 91 + 66 + 45 + 1$

d'où $6 + 15 + 28 + 276 = 325$ ou $6_2 + 6_3 + 6_4 + 6_{12} = 6_{13}$.

Problème III. — *Quelles sont les sommes de* p[ièmes] *puissances consécutives de nombres polygonaux de* n *côtés égales à une* p[ième] *puissance d'un nombre polygonal de* n *côtés ?*

Solution. — Considérons un damier d'un nombre illimité de cases et écrivons en diagonale, de haut en bas et de gauche à droite, la suite

$$n_1^p, \quad n_2^p, \quad n_3^p, \quad \dots \quad n_x^p, \quad \dots$$

Ajoutons au nombre n_x^p de cette diagonale, le nombre n_{x-1}^p qui le précède ; au résultat $n_x^p + n_{x-1}^p$, ajoutons le nombre n_{x-2}^p qui précède n_{x-1}^p ; au résultat $n_x^p + n_{x-1}^p + n_{x-2}^p$, ajoutons le nombre n_{x-3}^p qui précède n_{x-2}^p ; et ainsi de suite.

Ecrivons les sommes obtenues successivement dans les cases qui suivent la verticale passant par n_x^p, de bas en haut : dans la $x^{\text{ième}}$ case, c'est-à-dire dans la case qui appartient à la première bande horizontale du damier, se trouvera le nombre représenté par la somme

$$n_x^p + n_{x-1}^p + n_{x-2}^p + \dots + n_1^p \equiv S_{p,x}^{(n)} .$$

Tout nombre N de ce tableau appartient à l'intersection d'une bande horizontale qui, considérée de gauche à droite, commence par n_{y+1}^p et d'une bande verticale qui, considérée de bas en haut, commence par n_x^p ; à ce nombre correspond l'égalité

$$n_{y+1}^p + n_{y+2}^p + \dots + n_x^p = N .$$

Lorsque N sera une $p^{\text{ième}}$ puissance d'un nombre polygonal de n côtés, l'égalité qui précède donnera une solution du problème.

Observons, en passant, que tout nombre N du damier est égal à la différence $S_{p,x}^{(n)} - S_{p,y}^{(n)}$.

Sommes de nombres triangulaires consécutifs égales à un nombre triangulaire :

$$3_1 + 3_2 + 3_3 = 3_4 \;;$$
$$3_5 + 3_6 = 3_8 \;;$$
$$3_2 + 3_3 + 3_4 + 3_5 + 3_6 = 3_{10} \;;$$
$$3_1 + 3_2 + 3_3 + 3_4 + 3_5 + 3_6 + 3_7 + 3_8 = 3_{15} \;;$$
$$3_8 + 3_9 + 3_{10} = 3_{16} \;;$$
$$3_4 + 3_5 + 3_6 + \ldots\ldots + 3_{10} = 3_{20} \;;$$
$$3_4 + 3_5 + 3_6 + \ldots\ldots + 3_{11} = 3_{23} \;;$$
$$3_5 + 3_6 + 3_7 + \ldots\ldots + 3_{13} = 3_{29} \;;$$
$$3_3 + 3_4 + 3_5 + \ldots\ldots + 3_{19} = 3_{51} \;;$$
$$3_{13} + 3_{14} + 3_{15} + \ldots\ldots + 3_{20} = 3_{48} \;;$$
$$3_1 + 3_2 + 3_3 + \ldots\ldots + 3_{20} = 3_{55} \;;$$
$$3_{12} + 3_{13} + 3_{14} + \ldots\ldots + 3_{21} = 3_{54} \;;$$
$$3_2 + 3_3 + 3_4 + \ldots\ldots + 3_{21} = 3_{59} \;;$$
$$3_{11} + 3_{12} + 3_{13} + \ldots\ldots + 3_{23} = 3_{64} \;;$$
$$3_{14} + 3_{15} + 3_{16} + \ldots\ldots + 3_{24} = 3_{65} \;;$$
$$3_8 + 3_9 + 3_{10} + \ldots\ldots + 3_{27} = 3_{84} \;;$$
$$3_{21} + 3_{22} + 3_{23} + \ldots\ldots + 3_{31} = 3_{88} \;;$$
$$3_4 + 3_5 + 3_6 + \ldots\ldots + 3_{30} = 3_{99} \;;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Sommes de nombres carrés consécutifs égales à un nombre carré :

$$4_3 + 4_4 = 4_5 \;;$$
$$4_{20} + 4_{21} = 4_{29} \;;$$
$$4_1 + 4_2 + 4_3 + \ldots\ldots + 4_{24} = 4_{70} \;;$$
$$4_{18} + 4_{19} + 4_{20} + \ldots\ldots + 4_{28} = 4_{77} \;;$$
$$4_7 + 4_8 + 4_9 + \ldots\ldots + 4_{29} = 4_{92} \;;$$
$$4_9 + 4_{10} + 4_{11} + \ldots\ldots + 4_{32} = 4_{106} \;;$$
$$4_{17} + 4_{18} + 4_{19} + \ldots\ldots + 4_{39} = 4_{138} \;;$$
$$4_7 + 4_8 + 4_9 + \ldots\ldots + 4_{39} = 4_{143} \;;$$
$$4_{20} + 4_{21} + 4_{22} + \ldots\ldots + 4_{43} = 4_{158} \;;$$
$$4_{38} + 4_{39} + 4_{40} + \ldots\ldots + 4_{48} = 4_{143} \;;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Sommes de nombres pentagonaux consécutifs égales à un nombre pentagonal :

$$5_2 + 5_3 + 5_4 + 5_5 + 5_6 + 5_7 + 5_8 = 5_{14} ;$$
$$5_6 + 5_7 + 5_8 + 5_9 = 5_{15} ;$$
$$5_4 + 5_5 + 5_6 + \dots\dots + 5_{10} = 5_{19} ;$$
$$5_6 + 5_7 + 5_8 + \dots\dots + 5_{11} = 5_{21} ;$$
$$5_8 + 5_9 + 5_{10} + \dots\dots + 5_{18} = 5_{44} ;$$
$$5_3 + 5_4 + 5_5 + \dots\dots + 5_{21} = 5_{47} ;$$
$$5_8 + 5_9 + 5_{10} + \dots\dots + 5_{22} = 5_{60} ;$$
$$5_{25} + 5_{26} = 5_{36} ;$$
$$5_{12} + 5_{13} + 5_{14} + \dots\dots + 5_{26} = 5_{75} ;$$
$$5_{10} + 5_{11} + 5_{12} + \dots\dots + 5_{27} = 5_{81} ;$$
. . . .

Sommes de nombres hexagonaux consécutifs égales à un nombre hexagonal :

$$6_1 + 6_2 + 6_3 + \dots\dots + 6_{11} = 6_{22} ;$$
$$6_3 + 6_4 + 6_5 + \dots\dots + 6_{13} = 6_{28} ;$$
$$6_{13} + 6_{14} = 6_{19} ;$$
$$6_{15} + 6_{16} + 6_{17} + \dots\dots + 6_{24} = 6_{60} ;$$
. . . .

Observation. — En ce qui concerne les nombres triangulaires, la forme

$$S^{(3)}_{2.x} = \frac{1}{60} x(x+1)(x+2)(3x^2+6x+1)$$

fait prévoir qu'une somme de carrés de deux nombres triangulaires ne peut être le carré d'un triangulaire[1]; et puisque, d'après le théorème de Fermat, une somme de deux $p^{\text{ièmes}}$ puissances ne peut être une $p^{\text{ième}}$ puissance lorsque p est supérieur à 2, il en résulterait le théorème suivant :

Une somme de deux $p^{\text{ièmes}}$ *puissances de nombres triangulaires ne peut être une* $p^{\text{ième}}$ *puissance d'un nombre triangulaire lorsque* p *est supérieur à l'unité.*

---

[1] A consulter : *Le dernier théorème de Fermat* par E. BARBETTE, (Editeur : Gauthier-Villars, Paris ; prix : Fr. 1,50.)

Une somme de deux carrés de nombres triangulaires peut cependant être un carré, mais non le carré d'un triangulaire :

$$21^2 + 28^2 = 35^2 \text{ ou } 3_6^2 + 3_7^2 = 35^2 ; \quad 15^2 + 36^2 = 39^2 \text{ ou } 3_5^2 + 3_8^2 = 39^2 ;$$
$$28^2 + 45^2 = 53^2 \text{ ou } 3_7^2 + 3_9^2 = 53^2 ; \quad 36^2 + 105^2 = 111^2 \text{ ou } 3_8^2 + 3_{14}^2 = 111^2 ; \dots$$

En d'autres termes, l'équation

$$\left[\frac{(x - \alpha_1)(x - \alpha_1 + 1)}{2}\right]^p + \left[\frac{x(x + 1)}{2}\right]^p = \left[\frac{(x + \alpha)(x + \alpha + 1)}{2}\right]^p$$

est impossible en nombres entiers lorsque p est plus grand que 1.

La forme

$$S^{(3)}_{p,x} = x(x + 1)(x + 2)Q_x$$

dans laquelle, lorsque p est plus grand que 1, Q_x représente un polynôme entier du $(2p - 2)^{\text{ième}}$ degré en x, conduit directement à la même conclusion.

La relation

$$S^{(4)}_{2,x} = \frac{1}{30}x(x + 1)(2x + 1)(3x^2 + 3x - 1) \ ,$$

fait aussi prévoir qu'*une somme de carrés de deux nombres carrés ne peut être un carré de carré.* Mais des formules

$$S^{(5)}_{2,x} = \frac{1}{60}x(x + 1)(27x^3 + 18x^2 - 13x - 2)$$

et

$$S^{(6)}_{2,x} = \frac{1}{30}x(x + 1)(24x^3 + 6x^2 - 16x + 1) \ ,$$

nous ne pouvons conclure qu'une somme de deux carrés de nombres pentagonaux ou hexagonaux ne peut être respectivement le carré d'un nombre pentagonal ou hexagonal ; il est bon d'observer cependant que nous n'affirmons pas pour cela qu'une telle égalité existe.

E. BARBETTE (Liège).

EXTRACTION D'UNE RACINE QUELCONQUE D'UN NOMBRE RÉEL A[1]

I. — A est une puissance $n^{\text{ième}}$ parfaite.

Posons

$$A = a^n .$$

1. — Considérons une valeur approchée *par excès* de a et représentons-la par $a + \alpha$.

On a :

$$\frac{A}{(a+\alpha)^{n-1}} = \frac{a^n}{a^{n-1} + \frac{n-1}{1}\alpha a^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2}\alpha^2 a^{n-3} + \ldots + \alpha^{n-1}}$$

$$= a - (n-1)\alpha + \frac{R}{(a+\alpha)^{n-1}} ,$$

en posant

$$R = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\alpha^2 a^{n-2} + \frac{2n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\alpha^3 a^{n-3} + \ldots$$

$$+ \frac{ln(n-1)(n-2)\ldots(n-l)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (l+1)}\alpha^{l+1} a^{n-(l+1)} + \ldots + (n-1)\alpha^n .$$

Dans le calcul littéral, la division s'arrête ici ; mais dans le calcul numérique la division $\frac{R}{(a+\alpha)^{n-1}}$ pourra donner encore quelques unités.

Si l'on écrit

$$\frac{R}{(a+\alpha)^{n-1}} = \varepsilon + \frac{r}{(a+\alpha)^{n-1}} \qquad \{ r < (a+\alpha)^{n-1} \} ,$$

on a en résumé

$$\frac{A}{(a+\alpha)^{n-1}} = a - (n-1)\alpha + \varepsilon + \frac{r}{(a+\alpha)^{n-1}} \qquad \{ r < (a+\alpha)^{n-1} \} .$$

[1] Communication présentée à Soleure, le 1er août 1911, à la Section mathématique de la 94e réunion de la Société helvétique des Sciences naturelles.

En additionnant le quotient incomplet $a - (n-1)\alpha + \varepsilon$ avec $(n-1)(a+\alpha)$ et divisant le tout par n, on obtient

$$\frac{a - (n-1)\alpha + \varepsilon + (n-1)(a+\alpha)}{n} = a + \frac{\varepsilon}{n}.$$

Le quotient incomplet de cette division est la racine cherchée a ou, si $\varepsilon > n$, une valeur approchée par excès de cette racine.

Applications.

1. — $\sqrt[5]{1\,889\,568}$

$a + \alpha = 20$; $20^4 = 160000$; $1889568 : 160000 = 11$ quot. inc.

$$\frac{11 + 4 \cdot 20}{5} = 18 \text{ quot. inc.} = \sqrt[5]{1889568}$$

2. — $\sqrt[3]{79507}$

$a + \alpha = 50$ $79507 : 50^2 = 31$ quot. inc.

$$\frac{31 + 2 \cdot 50}{3} = 43 \text{ quot. inc.} = \sqrt[3]{79507}$$

En prenant comme valeur approchée 60, au lieu de 50, on obtient

$79507 : 60^2 = 22$ quot. inc. ; $\dfrac{22 + 2 \cdot 60}{3} = 47$ quot. inc. ;

le calcul donne une valeur *approchée par excès* de la racine.

3. — $\sqrt{917764}$

$a + \alpha = 1000$; $\dfrac{1000 + 917}{2} = 958$ quot. inc. $= \sqrt{917764}$.

2. — Considérons maintenant une valeur approchée *par défaut* de a et représentons-la par $a - \alpha$.

On a :

$$\frac{A}{(a-\alpha)^{n-1}} = \frac{a^n}{a^{n-1} - \frac{n-1}{1}\alpha a^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2}\alpha^2 a^{n-3} - \ldots \pm a^{n-1}}$$

$$= a + (n-1)\alpha + \frac{R'}{(a-\alpha)^{n-1}},$$

en posant

$$R' = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\alpha^2 a^{n-2} - \frac{2n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\alpha^3 a^{n-3} + \dots$$

$$\pm \frac{ln(n-1)(n-2)\dots(n-l)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (l+1)}\alpha^{l+1} a^{n-(l+1)} \mp \dots \pm (n-1)\alpha^n .$$

R' est-il positif?

On peut écrire

$$R' = a^n - [a + (n-1)\alpha](a-\alpha)^{n-1}$$

$$= [(a-\alpha) + \alpha]^n - [(a-\alpha)^n + n\alpha(a-\alpha)^{n-1}] .$$

Or

$$[(a-\alpha) + \alpha]^n = (a-\alpha)^n + \frac{n}{1}\alpha(a-\alpha)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\alpha^2(a-\alpha)^{n-2}$$

$$+ \dots + \alpha^n .$$

Donc

$$R' = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\alpha^2(a-\alpha)^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\alpha^3(a-\alpha)^{n-3} + \dots + \alpha^n ;$$

R' *est toujours positif.*

Comme on peut avoir $R' > (a-\alpha)^{n-1}$, posons

$$\frac{R'}{(a-\alpha)^{n-1}} = \varepsilon' + \frac{r'}{(a-\alpha)^{n-1}} \qquad \{ r' < (a-\alpha)^{n-1} \} .$$

En opérant comme avec la valeur approchée par excès, on obtient

$$\frac{a + (n-1)\alpha + \varepsilon' + (n-1)(a-\alpha)}{n} = a + \frac{\varepsilon'}{n}$$

et l'on aboutit à la même conclusion.

Applications.

1. — $\sqrt[6]{191\ 102\ 976}$

$$a - \alpha = 20 ; \qquad 191\ 102\ 976 : 20^5 = 59 \text{ quot. inc.}$$

$$\frac{59 + 5 \cdot 20}{6} = 26 \text{ quot. inc.}$$

$26^5 = 11\ 881\ 376$; 26 est plus grand que la racine cherchée.

Répétant l'opération avec 26, on obtient :

$$191\,102\,976 : 11\,881\,376 = 16 \text{ quot. inc.}$$

$$\frac{16 + 5 . 26}{6} = 24 \text{ quot. inc.} = \sqrt[6]{191\,102\,976}\ .$$

2. — $\sqrt[4]{131\,079\,601}$

$$a - \alpha = 100\ ; \qquad 131\,079\,601 : 100^3 = 131 \text{ quot. inc.}$$

$$\frac{131 + 3 . 100}{4} = 107 \text{ quot. inc.} = \sqrt[4]{131\,079\,601}\ .$$

3. — $\sqrt{4\,613\,904}$

$$a - \alpha = 2000\ ; \qquad 4\,613\,904 : 2000 = 2306 \text{ quot. inc.}$$

$$\frac{2306 + 2000}{2} = 2153\ .$$

Il faut répéter l'opération :

$$4\,613\,904 : 2153 = 2143 \text{ quot. inc.}$$

$$\frac{2143 + 2153}{2} = 2148 = \sqrt{4\,613\,904}\ .$$

Formule (ω). Représentons par $a \pm \alpha$ une valeur approchée par excès ou par défaut de $\sqrt[n]{A}$ et par p le quotient incomplet de la division de A par $(a \pm \alpha)^{n-1}$.

Il résulte de ce qui précède que le nombre ρ_1, donné par la formule (ω)

$$\rho_1 = \frac{p + (n-1)(a \pm \alpha)}{n} \text{ quot. inc.}\ ,$$

est ou $\sqrt[n]{A}$ ou une valeur approchée par excès de $\sqrt[n]{A}$.

Si l'on n'obtient pas tout de suite $\sqrt[n]{A}$, on opère sur ρ_1 comme sur $a \pm \alpha$ et ainsi de suite.

II. — $\sqrt[n]{A}$ est un nombre irrationnel.

Si l'on représente par x et $x + 1$ les deux nombres consécutifs entre les $n^{\text{ièmes}}$ puissances desquels se trouve A, la formule (ω) donne x ou une valeur approchée par excès de x.

Pour s'en rendre compte, il suffit de poser

$$A = x^n + h$$

et de remplacer a par x dans les calculs précédents ; h s'ajoute à R ou R′ et la conclusion pour a subsiste pour x.

Ex. : $\sqrt[3]{72\,000}$

$$a - \alpha = 40 \;; \qquad 72\,000 : 40^2 = 45 \;; \qquad \frac{45 + 2 \cdot 40}{3} = 41 \text{ quot. inc.}$$

$$41^3 = 68\,921 < 72\,000$$

$$42^3 = 74\,088 > 72\,000 \;.$$

Pour obtenir $\sqrt[n]{A}$ à moins de $\frac{1}{z}$ près, par défaut, on a la relation

$$\sqrt[n]{A} = \frac{1}{z}\sqrt[n]{z^n \cdot A} \;;$$

on calcule, comme ci-dessus, $\sqrt[n]{z^n \cdot A}$ à moins d'une unité près, par défaut, et on divise le résultat par z.

Ex. : Soit à calculer $\sqrt[3]{10}$ à moins de $\frac{1}{100}$ près.

$$\sqrt[3]{10} = \frac{1}{100}\sqrt[3]{10\,000\,000}$$

$$a - \alpha = 200 \;; \quad 10\,000\,000 : 200^2 = 250 \;; \quad \frac{250 + 2 \cdot 200}{3} = 216 \text{ quot. inc.}$$

$$216^2 = 46\,656$$

$$10\,000\,000 : 46\,656 = 214 \text{ quot. inc.} \;; \qquad \frac{214 + 2 \cdot 216}{3} = 215 \text{ quot. inc.}$$

$$2{,}15 = \sqrt[3]{10}\,, \text{ à moins de } \frac{1}{100} \text{ près, par défaut.}$$

Utilisation des quotients complets : *formule* (ω'). En prenant les quotients complets p' et y_1 des divisions qui donnent p et v_1, on obtient un nombre fractionnaire qui exprime la valeur de $\sqrt[n]{A}$ avec une erreur par excès ; l'application du même calcul à y_1 donnera un nouveau nombre fractionnaire $y_2 > \sqrt[n]{A}$ mais $< y_1$; on obtiendra de même $y_3 > \sqrt[n]{A}$ mais $< y_2$, et ainsi de suite.

Ce calcul se représente par la formule (ω')

$$y_1 = \frac{p' + (n-1)(a \pm \alpha)}{n}.$$

L'erreur diminue assez fortement quand on passe de l'un de ces résultats au suivant.

A titre d'exemple, reprenons $\sqrt[3]{10}$.

$$a - \alpha = 2 \; ; \qquad \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \; ; \qquad \frac{\frac{5}{2} + 2 \, . \, 2}{3} = \frac{13}{6} = 2{,}1666 \ldots$$

$$10 : \left(\frac{13}{6}\right)^2 = \frac{360}{169} \; ; \qquad \frac{\frac{360}{169} + \frac{2 \, . \, 13}{6}}{3} = \frac{3277}{1521} = 2{,}1545 \ldots$$

On sait que $\sqrt[3]{10} = 2{,}1544 \ldots.$

Racine carrée. L'application des formules (ω) et (ω') à la racine carrée donne lieu à diverses remarques que je laisse de côté dans cet article.

Je me bornerai à démontrer, à l'aide de quelques exemples, la supériorité de (ω') — comme simplicité et rapidité — sur le calcul au moyen du développement de $\sqrt{A}$ en fraction continue.

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \text{etc.}}}$$

Réduites :

$$\frac{1}{1} \; ; \; \frac{3^*}{2} \; ; \; \frac{7}{5} \; ; \; \frac{17^{**}}{12} \; ; \; \frac{41}{29} \; ; \; \frac{99}{70} \; ; \; \frac{239}{169} \; ; \; \frac{577^{***}}{408} \; ; \; \frac{1393}{985} \; ; \; \frac{3363}{2378} \; ;$$

$$\frac{8119}{5741} \; ; \; \frac{19601}{13860} \; ; \; \frac{47321}{33461} \; ; \; \frac{114243}{80782} \; ; \; \frac{275807}{195025} \; ; \; \frac{665857^{***}}{470832} \; ; \ldots$$

$$(\omega') \qquad \frac{3}{2} \; ; \; \frac{17}{12} \; ; \; \frac{577}{408} \; ; \; \frac{665857}{470832} \; ; \ldots$$

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \text{etc.}}}}$$

Réduites :

$$\frac{1}{1}\,;\ \frac{2^*}{1}\,;\ \frac{5}{3}\,;\ \frac{7^{**}}{4}\,;\ \frac{19}{11}\,;\ \frac{26}{15}\,;\ \frac{71}{41}\,;\ \frac{97^{***}}{56}\,;\ \frac{265}{153}\,;\ \frac{362}{209}\,;\ \frac{989}{571}\,;$$

$$\frac{1351}{780}\,;\ \frac{3691}{2131}\,;\ \frac{5042}{2911}\,;\ \frac{13775}{7953}\,;\ \frac{18817^{****}}{10864}\,;\ \ldots$$

(ω')
$$\frac{2}{1}\,;\ \frac{7}{4}\,;\ \frac{97}{56}\,;\ \frac{18817}{10864}\,;\ \ldots$$

$$\sqrt{11} = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{3 + \text{etc.}}}}$$

Réduites :

$$\frac{3}{1}\,;\ \frac{10^*}{3}\,;\ \frac{63}{19}\,;\ \frac{199^{**}}{60}\,;\ \frac{1257}{379}\,;\ \frac{3970}{1197}\,;\ \frac{25077}{7561}\,;\ \frac{79201^{***}}{23880}\,;\ \ldots$$

(ω')
$$\frac{10}{3}\,;\ \frac{199}{60}\,;\ \frac{79201}{23880}\,;\ \ldots$$

$$\sqrt{15} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1 + \text{etc.}}}}$$

Réduites :

$$\frac{3}{1}\,;\ \frac{4}{1}\,;\ \frac{27}{7}\,;\ \frac{31^{**}}{8}\,;\ \frac{213}{55}\,;\ \frac{244}{63}\,;\ \frac{1677}{433}\,;\ \frac{1921^{***}}{496}\,;$$

(ω') $\quad a - \alpha = 3 \qquad \frac{4}{1}\,;\ \frac{31}{8}\,;\ \frac{1921}{496}\,;\ \ldots$

$\quad a + \alpha = 4 \qquad \frac{31}{8}\,;\ \frac{1921}{496}\,;\ \ldots$

Dans ces exemples, (ω') fournit les réduites de rang 2^m.
Ce n'est cependant pas toujours le cas.

Lucien Baatard (Genève).

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Une démonstration vectorielle du théorème de Dupin[1].

Trois surfaces S_1, S_2, S_3 respectivement définies par

$$u = \text{const.}\,, \qquad v = \text{const.}\,, \qquad w = \text{const.}\,,$$

se rencontrent orthogonalement en un point P. Soient n_1, n_2, n_3 trois vecteurs parallèles aux normales en P aux trois surfaces et par conséquent parallèles aux tangentes aux courbes d'intersection de ces mêmes surfaces. Ces vecteurs sont donc parallèles à $\frac{\partial P}{\partial u}$, $\frac{\partial P}{\partial v}$, $\frac{\partial P}{\partial w}$. Les conditions d'orthogonalité nous donnent

$$\frac{\partial P}{\partial v} \times \frac{\partial P}{\partial w} = \frac{\partial P}{\partial w} \times \frac{\partial P}{\partial u} = \frac{\partial P}{\partial u} \times \frac{\partial P}{\partial v} = 0\,.$$

En dérivant la première par rapport à u, etc., on déduit aussi

$$\frac{\partial^2 P}{\partial v \partial w} \times \frac{\partial P}{\partial u} = \frac{\partial^2 P}{\partial w \partial u} \times \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v} \times \frac{\partial P}{\partial w} = 0\,.$$

Supposons que l'on ait fait

$$n_1 = \frac{\partial P}{\partial v} \wedge \frac{\partial P}{\partial w}\,; \qquad n_2 = \frac{\partial P}{\partial w} \wedge \frac{\partial P}{\partial u}\,.$$

et que le point P se déplace sur la courbe intersection des deux surfaces S_1, S_2 sur laquelle seulement w est variable; c'est-à-dire supposons que dP soit parallèle à $n_1 \wedge n_2$. Alors on déduira aisément que

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial v \partial w} \wedge \frac{\partial P}{\partial w}\right) \times \left(\frac{\partial P}{\partial w} \wedge \frac{\partial P}{\partial u}\right) = 0\,,$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial v} \wedge \frac{\partial^2 P}{\partial w^2}\right) \times \left(\frac{\partial P}{\partial w} \wedge \frac{\partial P}{\partial u}\right) = 0\,,$$

et, par conséquent,

$$n_2 \times dn_1 = 0\,.$$

On a aussi donc

$$(n_1 \wedge n_2) \times (n_1 \wedge dn_1) = 0\,,$$

c'est-à-dire[2]

$$dP \times n_1 \wedge dn_1 = 0\,.$$

Donc *la courbe considérée est une ligne de courbure pour la surface* S_1.

Naples, mai 1911. R. MARCOLONGO.

---

[1] Voir aussi FEHR, Application de la méthode vectorielle de Grassmann à la Géométrie infinitésimale, p. 74-76.

[2] *Éléments de Calcul vectoriel* par C. BURALI-FORTI et R. MARCOLONGO, Paris, Hermann, 1910; p. 96.

CHRONIQUE

Commission internationale de l'enseignement mathématique.

I. — Réunion de Cambridge (août 1912).

La Commission se réunira à Cambridge en même temps que le 5[me] Congrès international des mathématiciens, qui siégera dans cette ville du 22 au 28 août 1912. Le Comité central a arrêté le programme général, dans ses grandes lignes, de la manière suivante :

Dans la première *séance générale* du Congrès, M. le prof. F. Klein, président de la Commission, fera un exposé d'ensemble des travaux. L'assemblée sera appelée à se prononcer sur la prolongation du mandat de la Commission jusqu'au Congrès suivant.

La Commission tiendra ensuite *trois séances* en commun avec la section d'enseignement du Congrès. Elles seront organisées sur le plan général de celles de Milan.

1[re] séance : *Présentation des travaux des sous-commissions nationales.* Pour chaque pays, le délégué déposera un court rapport écrit, destiné à faire ressortir les points caractéristiques des travaux de sa sous-commission. L'exposé oral sera un résumé de ce rapport.

2[me] séance : *L'intuition et l'expérience dans l'enseignement mathématique des Ecoles moyennes.* — Discussion du rapport de la sous-commission A.

3[me] séance : *Les mathématiques en physique.* Connaissances mathématiques utiles aux physiciens et réclamées par ceux-ci. — Discussion du rapport de la sous-commission B.

Le Comité central a constitué *deux sous-commissions* A et B, avec la mission d'élaborer un rapport préparatoire sur chacune de ces questions. Ces rapports, ou tout au moins les points les plus importants, seront publiés dans l'*Enseignement mathématique* et distribués aux membres de la Commission dans le courant du printemps. H. Fehr.

II. — Sous-commissions nationales.

Allemagne. — *Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland.* Deux nouveaux fascicules viennent de

paraître, ce qui porte à 18 le nombre des rapports publiés au 10 janvier 1912. Le rapport de MM. Schilling et H. Meldau traite de l'enseignement mathématique dans les écoles allemandes de navigation ; l'autre, de M. W. Lietzmann, examine l'enseignement du calcul arithmétique dans l'enseignement élémentaire.

Band IV, Heft 4. Der mathematische Unterricht an den deutschen Navigationsschulen, von Dr C. Schilling (Bremen) et Dr H. Meldau (Bremen) (vi-82 p. ; 2 M. ; B. G. Teubner, Leipzig).

Band V, Heft 2. Stoff und Methode des Rechenunterrichts in Deutschland, ein Literaturbericht von Dr W. Lietzmann. Mit einem Einführungswort zu Band V von F. Klein (vii-125 p. ; 3 M.).

Autriche. — Le fascicule 10 des *Berichte über den mathematischen Unterricht in Oesterreich* est consacré à l'enseignement mathématique dans les écoles supérieures spéciales, telles que les écoles des mines, les écoles militaires, etc.

Heft. 10. Der mathematische Unterricht an der Hochschule für Bodenkultur, den Montanistischen Hochschulen, den Militär-Erziehungs- und Bildungsanstalten und am technologischen Gewerbemuseum, von Dr Oskar Simony, o. ö Professor an der Hochschule für Bodenkultur; Dr Engelbert Kobald, o. ö. Professor an der mont. Hochschule in Leoben ; Alfred Mikuta, k. und k. Oberstleutnant des Artilleriestabes ; dipl. Chem. Karl Reich, Professor am k. k. technologischen Gewerbemuseum in Wien (39 p. ; Hölder, Vienne).

Etats-Unis. — Les rapports sont publiés sous les auspices et par les soins du *United States Bureau of Education* à Washington. Leur préparation a été répartie entre quinze comités ; cinq d'entre eux viennent de terminer leur travail.

Comité V. — Training of Teachers of elementary and secondary Mathematics (23 p.).

Comité VII. — Examinations in Mathematics other than those set by the Teacher for his own Classes (72 p.).

Comité IX. — Mathematics in the Technological Schools of Collegiate Grade in the United States (44 p.).

Comité X. — Undergraduate Work in Mathematics in Colleges of liberal Arts and Universities (30 p.).

Comité XII. — Graduate Work in Mathematics in Universities and in other Institutions of Like Grade in the United States (63 p.).

Iles Britanniques. — Nous avons reçu trois nouveaux fascicules, soit au total onze jusqu'à ce jour. Ils sont publiés, comme on sait, sous le titre général : *The Teaching of Mathematics in the United Kingdom,* et édités par la maison Wyman and Sons à Londres.

N° 9. The Organisation of the Teaching of Mathematics in Public Secondary Schools for Girls. By Miss Louisa Story (17 p.). Price $1^1/_2$ *d.*

N° 10. Examinations from the School point of View. By Mr. Cecil Hawkins (104 p.). Price 9 pence.

N° 11. The Teaching of Mathematics to Young Children. By Miss Irene Stephens (19 p.). Price 1 ½ *d.*

Suisse. — Deux nouveaux fascicules (Nos 3 et 5), comprenant un ensemble de quatre rapports, viennent de paraître :

Fasc. 3. — *Der mathematische Unterricht an den höheren Mädchenschulen der Schweiz*, von E. Gubler, Zürich.

Der mathematische Unterricht an den Lehrer- und Lehrerinnenseminarien der Schweiz, von F. R. Scherrer, Küsnacht.

Organisation und Methodik des mathematischen Unterrichts in den Landerziehungsheimen, von K. Matter, Frauenfeld. — (109 p.). Fr. 2.25.

Fasc. 5. — *Les mathématiques dans l'enseignement technique moyen en Suisse*, par L. Crelier, Bienne. — (112 p.). Fr. 2,25. — Georg & C°, Genève-Bâle.

III. — Dépot central de vente des publications concernant la Commission internationale.

Nous rappelons que, conformément au vœu qui a été exprimé au Congrès de Milan, le Comité central a fait les démarches nécessaires en vue de la création d'un *dépôt central de vente* des publications concernant la Commission.

La maison Georg & Cie, à Genève (Corraterie, 10), s'est chargée de ce dépôt. On y trouvera toutes les publications des sous-commissions nationales.

Œuvres complètes d'Euler.

Deux ans nous séparent à peine de la séance mémorable du 6 septembre 1909, dans laquelle la *Société helvétique des Sciences naturelles* décida d'entreprendre la publication des œuvres complètes d'Euler. Grâce aux travaux préparatoires très complets et fort bien documentés de la Commission Euler, le travail effectif a pu être commencé presque immédiatement, et au mois de novembre 1911 deux volumes ont déjà été distribués aux souscripteurs. Nous les signalerons ici par leur titre complet :

Euleri, Leonhardi, *Opera omnia*. Sub auspiciis societatis scientiarum naturalium helveticæ edenda curaverunt Ferd. Rudio, Ad. Krazer, Paul Stäckel.

Séries I. Opera mathematica. Vol. I. *Vollständige Anleitung zur Algebra mit den Zusätzen von J. L. Lagrange.* Herausgegeben von H. Weber. Mit einem Bilde von Euler, einem Vorwort zur Euleransgabe und der Lobrede von Nicol. Fuss. — B. G. Teubner, Leipzig, 1911. M. 28,50.

Séries III : Opera physica, Miscellanea, Epistolae. Vol. 3 : *Dioptrica*. Edidit Emil Cherbuliez. Volumen prius. [4°, VIII et 510 p.] — B. G. Teubner, Leipzig, 1911. Mk. 24.

Ainsi que nous l'avions annoncé, le Comité de Rédaction est composé de M. F. Rudio (Zurich), Rédacteur en chef, et de MM. A. Krazer (Carlsruhe) et P. Stäckel (Carlsruhe). Il s'est assuré le concours de nombreux mathématiciens qui se chargeront de la publication des différents volumes.

Les œuvres d'Euler comprendront *45 volumes* in-4°, répartis en *3 séries* [1] :

Série I, Mathématiques pures, 18 volumes.

Série II, Mécanique et astronomie, 16 volumes.

Série III, Physique. Travaux divers. Correspondance, 11 volumes.

Ces volumes renfermeront non seulement les nombreuses publications fort dispersées et dont la liste a été établie par M. G. Eneström (Stockholm), dans son *Verzeichnis der Schriften Leonhard Euler* [2], mais encore divers travaux restés en manuscrits.

La partie financière de la publication est assurée, comme on sait, d'une part par un fonds de près de 135,000 fr. réunis par la Société helvétique des Sciences naturelles, et, d'autre part, par plus de 350 souscripteurs aux œuvres complètes.

Cette publication constituera le plus beau monument qu'on ait pu élever à la mémoire de l'illustre mathématicien de Bâle, l'un des plus grands savants de tous les temps. H. F.

Académie des Sciences ; prix décernés *(Suite et fin)*.

Prix Montyon (Statistique), 1000 francs. — M. René Risser, actuaire du Ministère du travail, pour son ouvrage intitulé : Mécanisme historique actuariel et financier de la loi des retraites ouvrières et paysannes.

Prix Binoux (Histoire des Sciences), 3000 francs. — Le prix est partagé entre M. Antonio Favaro, professeur à l'Université de Padoue, pour la publication des œuvres de Galilée, et M. Edmond Bonnet, assistant au Muséum d'histoire naturelle de Paris.

Prix Bordin (3000 francs). — M. A. Demoulin, professeur à l'Université de Gand.

Prix Saintour (3000 francs). — M. Jules Drach, professeur à l'Université de Toulouse, pour ses études sur les « groupes de rationalité des équations différentielles ».

---

[1] On trouvera le plan général, élaboré par M. Stäckel, dans le *Jahresb. d. deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 1910, p. 104-116 et p. 129-142.

[2] 1. Lieferung, 208 p., B. G. Teubner, Leipzig, 1910.

Etats-Unis. — Thèses de doctorat.

Pendant l'année universitaire 1910-1911, les Universités des Etats-Unis ont délivré 437 grades de docteurs, dont 239 (178 en 1909-10) pour les sciences. Les thèses de mathématiques, au nombre de 26 (23), sont les suivantes (le nom de l'Université est indiqué entre parenthèses) :

H.-L. Agard (Yale) : The extension of some theorems in the theory of sets of points in N-dimensional space. — T.-B. Ashcraft (Johns Hopkins) : Quadratic involutions on the plane rational quartic. — Miss C.-L. Bacon (Johns Hopkins) : The Cartesian oval and the elliptic functions. — R.-P. Baker (Chicago) : The problem of the angle bisectors. — Miss I. Barney (Yale) : Line and surface integrals. — W.-H. Bates (Chicago) : An application of symbolic methods to the treatment of mean curvature in hyperspace. — F.-W. Beal (Princeton) : Associated normal congruences. — Miss A.-D. Biddle (California) : Constructive theory of the unicursal plane quartic by synthetic methods. — P.-P. Boyd (Cornell) : On the perspective Jonquières involutions associated with the (2, 1) ternary correspondence. — D. Buchanan (Chicago) : A class of periodic solutions of the problem of three bodies, two of equal mass, the third moving on a straight line. — B.-H. Camp (Yale) : The convergence of singular integrals. — R.-D. Carmichael (Princeton) : Linear difference equations and their analytic solutions. — J.-L. Jones (Yale) : Number concept. — S. Lefschetz (Clark) : On the existence of loci with given singularities. — L. Lindsay (Syracuse) : The minors of a compound determinant. — W.-R. Marriott (Pennsylvania) : The determination of the order of the groups of isomorphisms of the groups of order P^4, where P is a prime. — W.-O. Mendenhall (Michigan) : On the characteristic properties of sum formulas in the theory of divergent series. — W.-J. Montgomery (Clark) : Singularities of twisted quinted curves. — L. O'Shaughnessy (Pennsylvania) : The integrability of the differential equation representing the sum of a family of series. — A.-D. Pitcher (Chicago) : The interrelations of eight fundamental properties of classes of functions. — H.-W. Reddick (Columbia) : Systems of tautochrones in a general field of force. — E.-B. Stouffer (Illinois) : Invariants of linear differential equations with applications to projective differential geometry. — S.-E. Urner (Harvard) : Certain singularities of point transformations in space of three dimensions. — Miss W.-P. Webber (Cincinnati) : On the construction of doublyperiodic functions which have singular points (polar and essential) in the period parallelogram. — Miss M.-B. White (Chicago) : The de-

pendence of the focal point on curvature in space problems of the calculus of variations. — W.-A. Wilson (Yale): Theory of point aggregates applied to Lebesgue integrals.

Société suisse des professeurs de mathématiques.

Réunion de Zurich, 12 octobre 1911.

La Société suisse des professeurs de mathématiques s'est réunie à Zurich, le 12 octobre 1911, sous la présidence de M. le Prof. Dr C. Brandenberger (Zurich), à l'occasion des cours de vacances organisés pour les professeurs de l'enseignement moyen. En raison des conférences et des séances de discussion inscrites au programme de ces cours, et dont on trouvera plus loin un compte rendu de la partie mathématique, la réunion a été presque entièrement limitée à une séance administrative.

M. le Dr K. Matter, professeur au Gymnase de Frauenfeld, a été nommé trésorier en remplacement de M. le Prof. Dr Arn. Emch, appelé à l'Université d'Urbana (Ill.), aux Etats-Unis.

M. le Prof. F. Scherrer (Küsnacht) attire l'attention de l'assemblée sur une résolution adoptée par la Société suisse des professeurs de géographie et demandant que l'enseignement de la géographie physique et mathématique dans les écoles moyennes soit confié au maître de géographie. La question mérite d'être examinée avec soin dans les milieux intéressés. M. Scherrer en présente lui-même un exposé d'un grand intérêt en fournissant aussi des renseignements sur ce qui se fait dans d'autres pays. Il conclut en estimant que *l'enseignement de la géographie mathématique dans les écoles moyennes doit être confié à un maître possédant les connaissances nécessaires en géométrie descriptive, en astronomie et en mécanique*. Ces conclusions sont adoptées à l'unanimité.

M. le Prof. H. Fehr (Genève) signale les récentes publications dues à l'initiative de la Commission internationale de l'enseignement mathématique et rend brièvement compte du Congrès que la Commission a tenu à Milan (septembre 1911).

M. le Prof. Ch. Jaccottet (Lausanne) émet le vœu que les idées principales développées dans les rapports de la sous-commission suisse soient discutées dans les séances de la Société.

M. le Prof. L. Crelier (Bienne) annonce les *Cours de vacances* qui seront organisés, en 1912, à Bienne par le Technicum, pour les maîtres et les maîtresses des écoles secondaires et des écoles professionnelles. L'une des principales questions mise à l'étude est celle de *l'adaptation de l'enseignement du dessin technique et des mathématiques aux exigences modernes*.

Les mathématiques aux cours de vacances de Zurich.

Du 9 au 15 octobre 1911, il a été donné à Zurich des cours de vacances pour les maîtres de toutes les branches de l'enseignement moyen. L'organisation en a été faite par les soins du Comité de la Société suisse des professeurs de gymnases : la tâche ne dût pas être facile, car 48 cours ou séances de discussion répartis sur 11 sections étaient offerts aux 520 participants.

Les lignes ci-dessous ont pour but de donner une idée générale des matières traitées dans les différents cours de mathématiques. Leur auteur s'excuse d'avance pour les omissions ou les lacunes involontaires qui pourraient s'y trouver. Sollicité de faire un compte rendu, il l'a entrepris avec la persuasion que tout autre participant aurait été mieux qualifié pour le faire.

Il s'empresse de saisir l'occasion qui lui est offerte de remercier les organisateurs du cours et les distingués conférenciers et professeurs pour les jouissances élevées qu'ils ont procurées à leurs auditeurs.

Dans ce qui suit, les cours sont groupés suivant l'ordre du programme et nous indiquons, en tête de chacun des paragraphes qui les concernent, le nombre des heures qui y ont été consacrées.

On ne saurait s'attendre à ce que les matières enseignées soient, dans un temps si court, traitées complètement : il importait davantage de fournir aux auditeurs les moyens de continuer et d'approfondir ces études. C'est pourquoi les indications bibliographiques n'ont pas été négligées et nous avons cru bon d'en faire figurer aussi quelques-unes dans ce compte rendu.

Introduction à la théorie des groupes (6 heures), par M. Fueter, professeur à l'Université de Bâle.

1re leçon. Consacrée à l'examen de l'objet de cette théorie et à celui de quelques opérations qui serviront d'exemples types pour les applications de la suite du cours : permutations, rotations d'un polygone et d'un polyèdre régulier, racines de l'unité, classes de congruences, mouvements. Quelques mots d'historique, de Gauss et Galois à Klein et à Lie, et de bibliographie (Weber, *Algèbre*, I, II; Picard, *Traité d'analyse*, III; Netto, dans la Collection Schubert; Burnside, *Theory of Groups*).

2e leçon. Définition du groupe d'opérations. Examen des quatre conditions nécessaires : uniformité des opérations, leur propriété spéciale que l'application successive de deux opérations constitue une autre opération du même groupe, existence de la loi d'association et d'une opération inverse.

Comme conséquences immédiates, on déduit l'existence dans

chaque groupe d'une opération unité ou opération identique et le fait de la réciprocité des opérations inverses.

3e leçon. Définition de l'ordre d'un groupe: groupes finis et groupes infinis; définition de la puissance d'une opération et existence d'une puissance telle que l'opération qu'elle représente est l'opération unité. Démonstration du théorème : le plus petit des exposants pour lesquels cette propriété existe est un diviseur de l'ordre.

Arrangement des opérations suivant le procédé de Lagrange.

Comme application, démonstration du théorème de Fermat.

4e leçon. Isomorphisme de deux groupes; définition et application aux groupes des permutations de 4 éléments et des rotations d'un octaèdre régulier. Théorème : Chaque groupe est isomorphe avec un groupe déterminé de permutations.

Définition du sous-groupe et du groupe cyclique; l'ordre d'un sous-groupe est un diviseur de l'ordre du groupe.

Définition des opérations et des sous-groupes conjugués; groupes abéliens.

5e leçon. Etude du groupe des permutations. Permutations cycliques ou cycles; toute permutation peut être remplacée par une suite finie de cycles. Transposition. Chaque cycle peut être décomposé en un nombre fini de transpositions. Il en est donc de même pour une permutation. Si ce nombre est pair, la permutation est de 1re espèce, en cas contraire de 2e espèce.

Application aux restes quadratiques.

6e leçon. Représentation graphique des opérations et des groupes par les procédés de Dyck et de Cayley.

Applications à un groupe cyclique de 5e ordre et à un groupe quelconque d'ordre 10.

Application de la théorie des groupes à la résolution de l'équation générale du 3e degré, suivant le schéma que voici :

1. Représentation graphique et calcul par une méthode d'approximation quelconque d'une des racines.
2. Etude des fonctions symétriques des racines, relations entre les racines et les coefficients de l'équation.
3. Formation du discriminant.
4. Détermination des 2 autres racines; discussion.

Observations astronomiques et détermination d'un lieu par des procédés simples (3 h.), par M. Mauderli, prof. à l'Ecole cantonale de Soleure et priv.-doc. pour l'astronomie à l'Université de Berne.

1re leçon. M. Mauderli donne quelques renseignements sur l'enseignement de l'astronomie à l'Ecole cantonale de Soleure; il présente des travaux d'élèves comme exemples de l'*emploi des éphémérides;* c'est ainsi qu'il a fait construire les courbes représentant diverses quantités : longueur du jour sous une latitude

donnée, équation du temps, position d'une planète, etc. Il emploie aussi les *cartes du ciel* et pour inciter les élèves aux observations, il leur distribue ces cartes en leur demandant d'y noter la trajectoire et l'époque des étoiles filantes qu'ils observent; en reportant ces observations sur une carte unique, on obtient le point radiant de ces astéroïdes.

Ephémérides : Nautisches Jahrbuch, Nautical Almanac, Connaissance des temps..

Cartes du ciel de Mang, Weinecks, Eckhards et Möllinger.

2e *leçon.* — Consacrée à la description des instruments présentés, dont quelques-uns exigent déjà des observateurs expérimentés et surtout une mise de fonds assez importante.

Les appareils de mesure du temps à recommander sont les *chronomètres,* soit ceux de poche, soit ceux de marine (Nardin au Locle).

Pour la mesure des hauteurs, les instruments les plus simples sont le *quart de cercle à niveau* de Butenschön (Bahrenfeld près Hambourg), d'un prix très abordable (80-120 fr.), et le sextant employé avec un horizon artificiel.

Un *instrument de passage,* construit par la maison Heyde à Dresde, peut donner une idée de la lunette méridienne et coûte environ 250 francs.

L'*instrument universel* de la même maison ou le théodolite sont plus compliqués et plus chers, mais donnent à la fois les deux coordonnées d'un astre.

Pour appliquer la méthode des hauteurs égales, on se servira avec avantages du *chronodéik,* simple, d'un maniement facile et donnant des résultats suffisamment précis.

M. Mauderli rappelle que la simple observation, à l'œil nu, du passage d'une étoile dans un *plan vertical* peut être utilisée pour calculer la correction d'un chronomètre. Ce plan peut être fixé et déterminé par un fil tendu suivant un triangle, maintenu dans un plan vertical par un poids ; on amortit les oscillations de ce dernier en le plongeant dans un récipient plein d'eau (Harzer'sches Fadengestell).

Enfin mentionnons encore deux belles lunettes destinées à l'observation physique des astres.

3e *leçon.* Elle est employée à l'examen et à la discussion de problèmes résolus à Soleure sous la direction de M. Mauderli par ses élèves ; des feuilles autographiées, mises obligeamment à la disposition des auditeurs, facilitent ces opérations.

Le conférencier insiste sur le fait que toute observation doit être suivie du calcul complet ; le but de l'enseignement dans une école secondaire ne doit pas être une détermination poussée aux dernières limites de l'exactitude, mais les calculs seront effectués comme pour des observations de précision.

Il serait imprudent d'aborder avec les commençants l'examen de toutes les causes d'inexactitudes dans les observations ; cela pourrait les rebuter et leur faire croire que les calculs astronomiques se réduisent au calcul des erreurs et des corrections instrumentales.

En terminant, M. Mauderli fait un chaleureux appel à la bonne volonté de ses collègues, pour qu'un enseignement de l'astronomie, fût-il même facultatif, soit donné dans les gymnases suisses. Les instruments les plus rudimentaires suffisent pour commencer et une fois l'intérêt général éveillé, peut-être se trouvera-t-il quelque personne bienveillante qui fera un utile emploi de son argent en dotant l'école d'un instrument nouveau et plus puissant. On peut trouver ces généreux donateurs sans aller jusqu'en Amérique et c'est en souhaitant à chacun d'en faire un jour la découverte que M. Mauderli termine son intéressant exposé.

Les fondements de la géométrie (5 heures), par M. Schur, professeur à l'Université de Strasbourg.

Le cours a porté sur deux sujets également intéressants : les axiomes fondamentaux et les quantités incommensurables dans l'enseignement élémentaire.

Axiomes fondamentaux.

Après quelques mots d'historique sur les auteurs de recherches critiques sur l'axiome des parallèles, dans lesquels il rappelle les grands noms de Bolyai, Riemann, Helmholtz et Lobatschewsky, le conférencier indique la direction des recherches actuelles, qui ont pour but d'établir un système d'axiomes complets, indépendants et non contradictoires.

Elles ont été inaugurées par Pasch qui a publié ses travaux en 1882. Depuis lors divers savants s'en sont occupés ; les différents systèmes proposés sont exposés dans un traité d'Enriques « Fragen der Elementargeometrie ». M. Schur lui-même a établi un pareil système de postulats qu'il examine et commente en esquissant quelquefois la démonstration de leur indépendance.

Voici ces propositions :

A. *Postulats projectifs.*

1. Il existe une infinité d'éléments que nous nommerons *points*.

2. Deux points différents quelconques déterminent d'une façon unique un ensemble de points en nombre infini auquel ils appartiennent et qui est appelé *segment*. Si C est un point du segment AB, chaque point d'un des segments AC et BC appartient à AB et réciproquement, c'est-à-dire qu'un quatrième point quelconque du segment AB appartient à AC ou à BC ; toutefois il ne peut appartenir aux deux à la fois.

3. Si c'est un point différent de B du segment AB et B un point du segment CD, C, et par suite aussi B, appartient au segment AD.

4. Si C est un point des segments AB et AD, B sera sur AD ou D sur AB.

1re définition. L'ensemble des points D qui déterminent avec A des segments tels que le point B appartient au segment AD s'appelle le prolongement du segment AB dans la direction de B : on le désigne par $\overrightarrow{AB}$.

2e définition. Une *droite* AB est formée par les points du segment AB et par ceux de ses deux prolongements.

5. En dehors d'une droite quelconque, il existe des points.

6. Si A, B, C, sont 3 points non situés sur la même droite, D un point du segment BC et E un point du segment AD, il existe un point F, appartenant au segment AB, tel que E est sur le segment CF.

3e définition. L'ensemble des segments, respectivement des droites, qui joignent l'un quelconque de 3 points non en ligne droite avec les points du segment déterminé par les deux autres, s'appelle triangle, respectivement *plan*.

7. En dehors d'un plan quelconque, il existe des points.

4e définition. L'ensemble des points des droites qui joignent 1° l'un quelconque des 4 points, non situés dans une même plan ; avec les points du triangle déterminé par les trois autres et 2° les points de l'un quelconque des segments déterminé par deux de ces points avec les points du segment déterminé par les deux autres s'appelle un *espace*.

8. Hors d'un espace, il n'existe pas de points.

B. *Les postulats du mouvement.*

9. Il existe une correspondance de deux figures telle qu'à chaque segment de l'une des figures et à chaque point de ce segment correspond sans ambiguïté dans l'autre figure un segment et un point de ce segment et réciproquement.

Cette correspondance ainsi que sa réciproque sont appelées *mouvement*.

10. Deux mouvements consécutifs peuvent être remplacés par un seul mouvement.

5e définition. — Les points C d'une droite AB tels que C soit sur AB ou B sur AC, appartiennent au même *côté* de la droite ou à la même *demi-droite*.

6e définition. Un point D d'un plan ABC est sur le même *côté* du plan que C, ou sur le même *demi-plan* AB C, si le segment CD ne renferme aucun point de la droite AB.

11. Si l'on donne 2 plans, α et α', deux droites, l'une d dans le plan α, l'autre d' dans le plan α', et deux points, A sur d et A' sur

d', il existe un mouvement, et il n'y en a qu'un seul, qui transporte A en A', un côté déterminé de d sur un côté indiqué d'avance de d' et un demi-plan déterminé de α sur un demi-plan fixé d'avance de α'.

12. Le mouvement, dans lequel un point A est fixe, qui transporte la demi-droite AB sur la demi-droite AC et le demi-plan (AB)C sur le demi-plan (AC)B, transporte aussi AC en AB (Réversibilité de l'angle).

13. Le mouvement qui transporte un point A en un point B et le prolongement de AB dans le sens de A sur le prolongement de AB dans le sens de B et qui laisse fixe un des côtés d'un plan α contenant AB, transporte aussi B en A (Réversibilité du segment).

C. *Axiome des parallèles.*

14. Dans un plan, on peut mener par un point A, non situé sur une droite C, une droite, et une seule, qui ne coupe pas C. Elle s'appelle la *parallèle* à C par le point A.

D. *Postulat archimédique.*

15. Si, dans un mouvement le long de la droite AA_1, le point A vient en A_1, celui-ci en A_2, ce dernier en A_3, etc., tout point de la demi-droite $(A)A_1$ appartient à l'un des segments $A_n A_{n+1}$.

2

2e partie. — Quantités incommensurables.

Une des difficultés de l'enseignement des longueurs proportionnelles est l'explication du cas où il n'est pas possible de trouver une commune mesure de ces quantités. M. Schur expose un procédé dans lequel ce point délicat est évité ; il dit, par définition, que l'on a la proportion

$$OA : OB = OA' : OB'$$

si, lorsqu'on reporte ces segments sur 2 axes perpendiculaires, à partir du point d'intersection comme origine, les droites AA' et BB' sont parallèles.

Pour déduire de cette définition les propriétés connues des proportions et, en particulier, l'interchangeabilité des moyens, il suffit de faire usage du fait que les 3 hauteurs d'un triangle ont un point commun.

Une difficulté analogue, due aussi à des grandeurs incommensurables, se retrouve dans la recherche des aires et dans celle des volumes. C'est ainsi, par exemple, que le volume d'un tétraèdre ne peut être déterminé que par un procédé d'exhaustion.

Peut-on obtenir directement le volume d'un corps connaissant celui d'autres corps ?

M. Schur esquisse les recherches faites pour résoudre ce pro-

blème et introduit la notion de figures décomposables en éléments égaux et celle des figures complémentaires.

Il termine en rappelant que Dehn, en 1900, a montré qu'en général un prisme et un tétraèdre ne peuvent pas être décomposés en éléments égaux; Hill, en 1896, avait trouvé cette décomposition possible pour certains tétraèdres déterminés.

On pourra consulter sur ces questions l'ouvrage de M. Schur, Grundlagen der Geometrie (Leipzig, 1903) et celui d'Enriques et Amaldi intitulé : *Elementi di geometria ad uso scolare secondario* (Bologne, 1903).

Analyse vectorielle (4 heures), par M. Veillon, professeur à l'Université de Bâle.

1re leçon. Le but de l'analyse vectorielle est la suppression de tout système de coordonnées. Cette analyse a de nombreuses applications dans tous les domaines des mathématiques appliquées. Définition des grandeurs scalaires et des vecteurs. Exemples. Notations.

Egalité de 2 vecteurs. Vecteur zéro. Définition de la somme d'un point et d'un vecteur, de la somme de 2 vecteurs.

Multiplication d'un vecteur par une grandeur scalaire : elle suit les lois de la multiplication ordinaire.

Vecteurs unités : parallélisme de 2 ou de 3 vecteurs.

Représentation d'un point sur une droite, dans un plan ou dans l'espace, au moyen de vecteurs.

2e leçon. Applications à la recherche des équations d'une droite, donnée par 2 points, à celle de l'équation d'un plan dont on connaît 3 points.

Produits de deux vecteurs : produit intérieur ou scalaire et produit extérieur ou vectoriel. Le premier jouit des propriétés commutatives et associatives des produits ordinaires, tandis que le second ne les possède pas.

Applications à la recherche du théorème du cosinus en trigonométrie plane et à l'expression de l'angle de 2 droites dans l'espace.

3e leçon. Différentielle d'un vecteur quelconque et d'un vecteur unité.

Applications à la recherche de la courbure d'une courbe, à celle des lois de Kepler.

4e leçon. Application à la recherche de l'équation de Poisson pour les gaz.

Notions sur le gradient d'un nombre, le rotationnel et la divergence d'un vecteur.

Physique.

Les cours de la section de Physique étaient au nombre de trois; nous devons nous borner à en donner la liste.

M. Einstein, professeur à l'Université de Prague, a étudié quelques-uns des progrès réalisés dans le domaine de la Physique théorique (6 h.).

M. Greinacher (Zurich) a parlé de la radioactivité, des ions et des électrons (6 h.).

M. le Prof. Hahn (Berlin) a examiné la méthodique dans les travaux pratiques de physique. Ces conférences ont été suivies d'une séance de discussion ayant pour objet les travaux pratiques des élèves.

A l'occasion de ces cours, il avait été organisé une exposition d'appareils nouveaux pour les démonstrations et manipulations en Physique.

Séances de Discussion.

I. — *La notion de fonction dans l'enseignement secondaire.*

M. Brandenberger, professeur à l'Ecole cantonale de Zurich, introduit la question. Il montre comment il fait intervenir les considérations sur les fonctions et les infiniment petits dans les différentes parties de son enseignement.

Il introduit la notion de fonction dès l'âge de 14 ans; il l'approfondit constamment et la développe dans les classes supérieures jusque et y compris les éléments du calcul infinitésimal.

Les raisons qui, à son point de vue, justifient sa manière de faire sont : 1° L'importance générale de cette notion pour les mathématiques pures ou appliquées; 2° La possibilité de donner à l'enseignement mathématique une concentration absolue; 3° La facilité que donne la notion de dérivée de remplacer par une méthode simple et unique les différents procédés de l'analyse algébrique.

Il partage l'étude des fonctions en 2 parties : dans un premier degré, destiné aux élèves de 14 à 17 ans, les exemples jouent un rôle prépondérant. Ces exemples, tirés de l'arithmétique, de l'algèbre et de la géométrie, font ressortir les notions de variable, de constante et de fonctions; on introduit les représentations graphiques et les élèves s'habituent peu à peu à examiner la dépendance de 2 quantités variables.

Dans le 2e degré, les élèves ont de 17 à 19 ans; leur maturité d'esprit leur permet de récapituler les connaissances acquises dans les 3 années précédentes et d'en faire le point de départ d'un développement nouveau : les éléments du calcul différentiel.

En terminant, M. Brandenberger indique que, pour lui, la tâche de l'école secondaire n'est pas d'aller aussi loin que possible, mais de donner aux élèves une idée absolument claire des notions qu'ils reçoivent.

Les idées exposées par M. le rapporteur ont obtenu l'assentiment unanime de l'assemblée et dans l'échange des vues qui a suivi son exposé, aucune proposition contraire n'a été faite.

M. le Dr Ehrat, professeur au gymnase de Winterthour a, depuis, fait savoir que, pour lui, l'introduction de la notion de fonction ne doit pas être faite aussi tôt. Il préfère exercer de bonne heure, déjà dans les classes inférieures, ce qu'il appelle les « composantes » de cette notion. Il attire l'attention sur la variabilité de certaines grandeurs, montre comment les termes d'une suite de nombres dépendent de ceux d'une autre suite, etc.

La communication de M. Ehrat a été soumise à M. Brandenberger qui maintient son point de vue et qui renvoie son contradicteur aux raisons et aux développements exposés dans son rapport[1].

II. — *De la concordance entre le dessin technique et la géométrie descriptive.*

M. le Dr Brandenberger, qui préside l'assemblée, montre que dans aucun autre domaine, comme en géométrie descriptive et en dessin technique, les divergences des programmes des écoles suisses ne sont aussi accentuées et qu'en aucun cas les limites fixées par le programme d'admission à l'Ecole polytechnique ne sont aussi largement dépassées. L'exposition des dessins le prouve surabondamment.

Extrait du rapport de M. le professeur Schmid, ingénieur à St-Gall. — L'examen des plans d'études des écoles réales supérieures suisses et étrangères, fait voir que les intéressés ont des opinions très diverses sur ces rapports. Il en résulte que des méthodes d'enseignement très variées sont utilisées, méthodes qui ne satisfont pas toutes aux exigences des praticiens. Ces derniers sont absolument convaincus de la liaison intime de ces deux branches d'enseignement. Nous ne devons par conséquent pas priver nos élèves de cette dépendance naturelle, mais plutôt la développer scientifiquement, afin de convaincre les ingénieurs de l'utilité de la géométrie descriptive.

Les professions techniques auxquelles se destinent la plupart de nos élèves, demandent des dessinateurs habiles, connaissant les différents modes de projection et les relations entre les figures dans les limites utilisées dans la pratique, ainsi qu'une vision dans l'espace très développée.

Une bonne partie de ces exigences est du domaine de la géométrie descriptive. Je ne dois cependant pas cacher que la technique exige beaucoup moins de théorie qu'on n'est porté à le croire

---

[1] *Der mathem. Unterricht an den schweiz. Gymnasien u. Realschulen.* Fasc. 4 des rapports de la sous-commission suisse. Georg & Cie, Genève.

dans les milieux mathématiques, mais par contre elle demande d'autant plus d'exercices pratiques.

Il est hors de doute que nous devons former en tout premier lieu des dessinateurs ayant du goût et travaillant rapidement. Les travaux seront exécutés à l'encre et au crayon ; on donnera un soin particulier à l'étude des diverses sortes de traits et à leur emploi dans la technique, car l'utilisation du dessin en dépend. Le choix du dessin est au gré du maître. mais il peut notablement élever la valeur du travail et développer l'intérêt des élèves en prenant ses sujets dans les objets techniques. Il est vrai que les jeunes élèves ne sont pas encore capables d'utiliser les modèles ; pour eux le maître dessinera des esquisses au tableau noir ; les élèves transcriront celles-ci dans un cahier et exécuteront d'après elles leur dessin au net.

L'enseignement de la géométrie descriptive doit commencer par la projection orthogonale cotée. Le passage aux autres modes de représentation, nécessaires pour les besoins de nos élèves, se fera très simplement. La théorie et spécialement les relations géométriques seront fixées dans la mémoire par de nombreux exercices très simples. Un dessin propre, exécuté au crayon suffit parfaitement pour ces travaux ; on peut même le préférer à une exécution à l'encre, car on gagne du temps et on oblige l'élève à une étude préliminaire plus approfondie.

L'école réale ne doit pas s'arrêter à des recherches purement théoriques ; elle a aussi pour tâche de faire connaître à ses élèves les procédés pratiques. Le dessin d'après des modèles est particulièrement approprié à ce but. Chaque objet fournit un certain nombre de problèmes géométriques qui doivent être isolés et résolus par les élèves. Cela fera disparaître les dispositions malheureuses, impossibles en pratique et condamnées avec raison par les constructeurs. Dans le dessin on rencontre fréquemment de nouveaux problèmes qui donneront lieu à de nouvelles recherches théoriques. Chacun des cours est donc un facteur de développement pour l'autre.

Cette manière de procéder nous permet de faire connaître aux élèves les divers domaines de la technique, de leur apprendre à dessiner proprement et correctement et de rendre leur travail aussi intéressant qu'utile. N'oublions pas que l'habitude du dessin est le meilleur moyen de faciliter aux élèves qui embrasseront une carrière technique de bonnes études à l'Université ou à l'Ecole polytechnique.

M. Brandenberger (Zurich). — Le but de l'école secondaire doit être le développement de la vision des corps dans l'espace. Il est absolument nécessaire que l'élève soit exercé dans l'exécution exacte, nette et soignée d'un dessin. L'étude des divers procédés techniques ne peut pas faire partie du programme d'une école

moyenne dont la caractéristique est l'éducation générale. Ce sont des corps géométriques et non des objets techniques qui doivent servir à developper la vision de l'espace et l'habileté dans le dessin. Pour éveiller et maintenir l'intérêt, pour approfondir et appliquer les notions tirées de l'enseignement théorique, il faut faire connaître à l'élève les applications tirées de domaines aussi divers que possible, mais ne rien dessiner qui n'ait été parfaitement compris. Il est aussi très important d'utiliser ces cours pour le développement linguistique des élèves.

M. Flatt, recteur de l'Ecole réale supérieure de Bâle, expose que son point de vue est intermédiaire entre ceux qui viennent d'être développés. Pour lui, le dessin technique doit faire constamment usage des notions théoriques étudiées non seulement dans le cours de géométrie descriptive, mais dans le cours de géométrie et même dans d'autres cours de mathématiques (trigonométrie). Par contre, les exemples d'application seront toujours pris dans le domaine technique, afin que les élèves soient toujours ramenés à l'examen de cas concrets et ne soient pas tentés de ne voir, dans les déductions de la théorie, que des exercices sans utilité pratique.

Ce procédé exige, il est vrai, un choix judicieux des modèles à faire dessiner, mais le nombre de ceux que l'on peut utiliser est est assez grand.

M. le Dr Grossmann, professeur de géométrie descriptive à l'Ecole polytechnique fédérale, expose son point de vue comme suit :

L'enseignement de la géométrie descriptive à l'Ecole polytechnique fédérale doit être adapté aux besoins des futurs techniciens et ne doit par conséquent pas se borner à leur donner des notions théoriques, il doit au contraire leur donner l'occasion d'appliquer ces notions à des exemples pratiques.

Le rapporteur esquisse les sujets qui font l'objet de ses leçons [1] et s'étend davantage sur les applications faites dans les exercices pratiques.

En considération du grand nombre d'étrangers et d'élèves venant de gymnases littéraires, on n'exige, comme connaissances préliminaires, que les éléments de la géométrie descriptive, dans les limites du règlement d'admission. Il serait très désirable que les étudiants reçoivent à l'école secondaire des notions sur l'affinité et l'homologie. Il est absolument nécessaire qu'ils connaissent les constructions fondamentales de la méthode des trois projections orthogonales.

---

[1] Voir son rapport *Der math. Unterricht an der Eidg. techn. Hochschule*, 7e fascicule du rapport de la sous-commission suisse de l'enseignement mathématique. Genève, 1911 (Georg et Cie).

Il faut attacher aussi une grande importance à l'exactitude du dessin, développer chez l'élève le sentiment de la précision dans l'exécution, sans négliger le côté artistique dans la présentation de son travail.

Le rapporteur met en garde contre une insuffisance de préparation dans ces directions, qu'il ne faut pas sacrifier à une trop grande extension des matières traitées.

Au reste, son intention n'est pas de se prononcer pour l'une des trois méthodes qui viennent d'être exposées ; les élèves de Zurich, Bâle ou St-Gall, comme ceux de la plupart des gymnases suisses, sont également bien préparés pour poursuivre leurs études à l'Ecole fédérale. Par contre, il ne faut pas se dissimuler que dans nombre de gymnases, la dépendance de la géométrie descriptive et du dessin technique n'est pas encore comprise et il serait très désirable que ces établissements veuillent bien étudier les résultats de la discussion d'aujourd'hui et en tirer les conséquences.

III. — *Sur l'opportunité de certains problèmes de physique comme applications dans l'enseignement des mathématiques.*

M. le Dr Huber, professeur au gymnase libre de Berne, introduit cette question.

Les notions acquises dans l'enseignement théorique ainsi que les formules qui y ont été obtenues ne sont parfaitement comprises et assimilées que lorsqu'elles sont appliquées à des problèmes. Il va sans dire que ces problèmes seront choisis de telle sorte qu'ils puissent être utilisés pour le développement de la méthode et de la matière traitées.

C'est pour cette raison que la commission d'organisation des cours a décidé de discuter la question qui nous occupe.

On peut considérer de diverses façons le sens du mot opportun.

En premier lieu, on peut l'appliquer aux problèmes tirés des leçons sur l'électricité, c'est-à-dire d'un domaine actuellement au premier rang.

En second lieu, nous pouvons donner des problèmes tirés des divers chapitres de la physique, en particulier, les problèmes classiques de la mécanique et de l'optique, et considérer comme opportune leur résolution, en faisant ressortir la dépendance d'une variable et des autres quantités qui entrent dans la question (notion de fonction).

Troisièmement, nous pourrions considérer comme opportunes les questions qui se présenteraient au jour le jour, dans la pratique du laboratoire ou de la vie ordinaire, et dont les constantes seraient ainsi fournies par les élèves.

Enfin, nous pouvons admettre qu'un problème est opportun

lorsqu'il montre, d'une manière particulièrement claire et frappante, la relation mathématique qu'il s'agit d'illustrer, peu importe que ce problème soit ancien ou moderne.

Aussi longtemps que les programmes des diverses écoles présenteront des divergences accentuées, il ne sera pas possible d'indiquer d'une façon générale le moment où l'on doit traiter, dans les leçons de mathématiques, tel problème de physique. Cela ne serait pas même désirable, mais chaque maître de mathématiques se fera un devoir de s'informer des questions traitées en physique et, inversement, le maître de physique cherchera à faire usage des notions développées en mathématiques.

Mais d'une façon générale, il serait désirable que l'ensemble des programmes des deux branches, du moins dans leurs parties principales, soit vu assez à temps, pour que l'on puisse, avant l'examen de maturité, faire de nombreuses applications de l'une des branches dans l'autre. Ce n'est, en effet, qu'à la fin des études du gymnase que l'enseignement mathématique peut faire un large emploi des connaissances physiques des élèves.

Après cette introduction générale, le rapporteur examine quelques exemples de chacune des catégories ci-dessus. Comme les problèmes relatifs à l'électricité se prêtent mal à l'enseignement mathématique, il montre comment ici, inversement, le maître de physique pourra faire plus de mathématiques que ce n'est généralement le cas. Dans cette voie, l'enseignement mathématique pourrait aussi acquérir de nouvelles relations.

S. May,
Directeur du Gymnase scientifique,
de Lausanne.

Nouvelles diverses. — Nominations et distinctions.

Allemagne. — M. G. Faber, professeur à l'Ecole technique supérieure de Stuttgard, est nommé professeur ordinaire de mathématiques à l'Université de Königsberg i. Pr.

M. D. Hilbert, professeur à l'Université de Gœttingue, est nommé membre honoraire de l'Académie des Sciences de Vienne.

M. le Prof. Study (Bonn) est nommé membre de la Société des Sciences de Gœttingue.

M. Wieghardt, professeur à l'Ecole technique supérieure de Hanovre, est nommé à la chaire de Mécanique de l'Ecole technique supérieure de Vienne, en remplacement de M. le prof. Finger.

Privat-docents. — Ont été admis en qualité de privat-docents : M. R. Baldus, à l'Université d'Erlangen. — M. K. Knopp, à l'Université de Berlin. — M. K. Kommerell, à l'Ecole technique supé-

rieure de Stuttgard. — M. Fritz Nœther, à l'Ecole technique supérieure de Carlsruhe. — M. A. Timpe, à l'Université de Münster i. W.

Angleterre. — La « Royal Society » de Londres a décerné : 1° la *Médaille royale* au professeur G. Christal pour ses travaux de mathématiques et de physique, en particulier pour ses recherches sur les seiches et les oscillations libres des lacs d'Ecosse.

2° *Médaille Copley*, à Sir G.-H. Darwin, pour ses recherches dans le domaine de l'évolution astronomique.

— M. E.-W. Hobson, professeur à l'Université de Cambridge, est nommé membre de l'Académie des Sciences de Halle.

Sir J.-J. Thomson, professeur à l'Université de Cambridge, est nommé associé étranger de l'Académie royale des Sciences de Naples.

Autriche-Hongrie. — M. E. Kruppa a été admis en qualité de privat-docent à l'Université de Czernowitz.

M. Fr. Nusl, professeur extraordinaire, est nommé professeur ordinaire à l'Ecole technique supérieure bohême de Prague.

Belgique. — La Classe des Sciences de l'Académie royale de Belgique a élu comme membre titulaire M. A. Demoulin (Gand) et comme correspondant M. G. Lecointe de l'Observatoire d'Uccle (Bruxelles).

Elle a couronné un mémoire d'analyse de M. S. Bernstein (Kharkof) et décerné le *Prix F. Deruyts* pour la Géométrie à M. J. Fairon (Liège).

Etats-Unis. — M. H.-E. Buchanan est nommé professeur à l'Université de Tennesee.

M. H.-L. Rietz est nommé professeur extraordinaire à l'Université de l'Illinois.

France. — *Jubilé Gaston Darboux.* Le jubilé scientifique de M. G. Darboux, secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, sera célébré le 21 janvier 1912, à la Sorbonne. On fêtera à la fois le 70e anniversaire de l'éminent géomètre, ses noces d'or universitaires et le cinquantenaire de son entrée à l'Ecole normale supérieure.

Faculté des Sciences de Paris. Sur l'invitation du Conseil de l'Université de Paris, M. Volterra, professeur à l'Université de Rome, fera deux conférences générales et une série de leçons sur « l'extension de la théorie des fonctions, sur les équations du type intégrodifférentiel et intégral et sur leurs applications ». La première conférence aura lieu le 22 janvier 1912.

Ecole normale d'enseignement technique. Dans sa séance du novembre 1911, le Conseil supérieur de l'enseignement tech-

nique a émis un vœu pour la création d'une Ecole normale de l'enseignement technique.

Société mathématique de France. M. P. Andoyer a été nommé président de la Société pour 1912.

Grèce. — M. le professeur N. Hatzidakis (Athènes) est nommé membre correspondant de l'Académie des Sciences de Vienne.

Italie. — M. P. Burgatti, professeur extraordinaire de mécanique rationnelle à l'Université de Bologne, y a été nommé professeur ordinaire.

M. F. Enriques, de l'Université de Bologne, a été nommé docteur honoraire de droit (L. L. D.) de l'Université de St-Andrews.

M. Z. Giambelli, privat-docent, a été nommé professeur extraordinaire d'analyse algébrique à l'Université de Cagliari.

M. G. Lauricella, ancien professeur de l'Université de Catane, qui avait été appelé à la chaire d'Analyse supérieure de l'Université de Rome, revient, sur sa demande, à Catane, pour des raisons de famille.

Indes anglaises. — Une somme de 20.000 roupies a été mise à la disposition de l'Université de Calcutta pour la publication, accompagnée d'une traduction anglaise, d'anciens manuscrits mathématiques hindous.

Suède. — M. H. Henriques, professeur extraordinaire, est nommé professeur ordinaire de Géométrie descriptive à l'Ecole technique supérieure de Stockholm.

Suisse. — La *Société mathématique* a tenu une séance extraordinaire à Berne, le 10 décembre 1911, sous la présidence de M. R. Fueter (Bâle). La séance était consacrée à une conférence de M. Plancherel (Fribourg) sur les principaux problèmes de la *théorie des équations intégrales.*

— M. H. Ströhle a été admis en qualité de privat-docent à l'Université de Neuchâtel.

Nécrologie.

M. G. Chrystal, professeur à l'Université d'Edimbourg, est décédé à l'âge de 60 ans.

M. G.-W. Jones, professeur émérite à la Cornell University à Ithaca (N. Y.), est décédé le 29 octobre 1911, à l'âge de 74 ans.

NOTES ET DOCUMENTS

Commission internationale de l'Enseignement mathématique.

Compte rendu des travaux des sous-commissions nationales [1].

(5e article.)

ALLEMAGNE

Les problèmes commerciaux et l'enseignement des mathématiques dans les écoles secondaires.

Die kaufmännischen Aufgaben im mathematischen Unterricht der höheren Schulen [2], von Dr H. E. Timerding, o. Professor an der technischen Hochschule in Braunschweig. — Une série d'études ayant pour objet les rapports des mathématiques avec tous les domaines du savoir humain, ne peut laisser de côté l'arithmétique politique, car, dans les mains d'un bon maître, cette branche peut, mieux que toute autre, servir d'introduction à notre vie économique. La compétence de M. Timerding et ses goûts l'auraient porté à exposer l'histoire de l'arithmétique politique ; il ne l'a pas fait de peur de donner une trop grande place à ses idées personnelles. Sa brochure est ainsi mieux adaptée aux nécessités de notre époque ; elle nous fait pourtant profiter des études historiques de l'auteur puisque c'est sans doute à elles qu'il doit en grande partie son sens de la réalité et de la mesure.

On voit dès l'abord que M. Timerding n'est pas de ces professeurs qui voudraient tout sacrifier à leur spécialité ; les programmes ne l'inquiètent guère, car il sait que les exigences de l'enseignement ne sont pas toujours les mêmes ; il considère l'arithmétique politique en elle-même, s'efforce de lui donner sa place, de montrer les liens qui la rattachent à la vie et d'en prouver l'utilité ; l'application de ces idées dépendra donc des cironstances. M. Timerding s'adresse ainsi à tous les professeurs de tous les pays.

Tout l'enseignement dépend du but que l'on assigne à l'école. Les uns veulent que, par une gymnastique intellectuelle intense, elle habitue l'esprit à bien penser et craignent toutes les questions pratiques que compliquent trop les contingences de la vie pour qu'elles soient un bon aliment de la pensée pure. Les autres, se défiant des esprits trop logiques, désirent, au contraire, que l'école inculque des connaissances précises à ses élèves et les mette en contact avec la complexité des choses.

M. Timerding ne songe pas à trancher le différend ; il remarque seulement que l'arithmétique politique offre les éléments d'un compromis. Par son côté mathématique, elle développe la logique formelle et le raisonne-

[1] Voir *l'Ens. math.* 13e année 1911, nos 1 à 4.

[2] *Abhandlungen über den mathem. Unterricht in Deutschland.* Band III. Heft 5. — 1 fasc. de 45 p. ; 1 M. 60 ; B. G. Teubner, Leipzig. — Résumé par M. S. Dumas (Berne).

ment abstrait ; elle traite d'autre part de questions dont les hommes d'affaires s'occupent chaque jour et que l'on n'ignore que sous peine d'être étranger à la vie.

L'auteur divise en trois groupes les problèmes d'arithmétique politique. Dans le premier, il met ceux qui ont leur source dans le commerce des marchandises ; les principaux en sont la détermination des prix de revient et de vente. Les opérations les plus simples suffisent à les résoudre, mais il faut tenir compte de tant de commissions, provisions et frais divers que leur place est surtout dans les écoles de commerce.

Les problèmes se rapportant à l'argent forment le second groupe ; ils ont une beaucoup plus grande importance mathématique que les précédents et contribuent bien davantage à la culture générale. C'est ici qu'on apprendra ce qu'est la monnaie, quel est son titre, quels sont les principaux systèmes monétaires et comment l'on passe de l'un à l'autre. Puis viendront les calculs d'intérêts simples et composés, d'échéance moyenne, etc. Poussant plus loin, on montre comment on est conduit aux logarithmes naturels en suppposant dans les calculs d'intérêts composés, que la période de capitalisation devient infiniment courte. C'est une excellente occasion de rendre les élèves attentifs au fait que les notions mathématiques ne sont pas arbitraires, mais qu'on y a été amené par la force des choses.

C'est dans le même groupe que l'on ferait figurer les opérations de bourse, le change et les arbitrages. M. Timerding n'en parle pas, sans doute de crainte d'empiéter sur l'enseignement professionnel ; mais a-t-il assez considéré qu'il est bon de mettre les jeunes gens en garde contre la spéculation et qu'un bon moyen de les en détourner est de leur montrer que le jeu n'est pas équitable mais qu'il n'est avantageux qu'aux financiers assez forts pour faire la bourse.

Les problèmes du troisième groupe, ceux que l'on rencontre dans la statistique et l'assurance sur la vie, sont sensiblement plus difficiles et l'on peut se demander, avec M. Timerding, s'il ne le sont pas trop pour l'enseignement secondaire. Il faut les faire précéder par un peu de calcul des probabilités ; les éléments en sont faciles, à moins que l'on ne veuille dépasser les exercices qui ressortissent à l'analyse combinatoire ; dans ce cas, on est vite arrêté par les difficultés des notions pourtant fondamentales de dispersion et de loi des erreurs.

Que doit dire le maître de l'espérance morale ? Comme tous les sujets dans lesquels la vérité et l'erreur sont étroitement unis, son étude peut devenir des plus instructives ; elle permet de faire aisément comprendre pourquoi le jeu, qui a pour but le gain, n'est jamais avantageux, tandis que les assurances, qui doivent nous préserver d'une perte, le sont. Ces avantages compensent mal, aux yeux de M. Timerding, les défauts de l'espérance morale, aussi estime-t-il que le maître ne devra introduire cette notion qu'avec prudence. Nous irions plus loin ; la notion d'espérance morale a deux gros défauts : premièrement elle est beaucoup trop précise ; la satisfaction de posséder croît plus lentement que la fortune, mais rien ne prouve qu'elle varie comme un logarithme plutôt que suivant tout autre loi. Nous sommes en présence d'une erreur très répandue : on s'imagine démontrer quelque chose en mettant une loi compliquée et mal connue sous une forme analytique simple et l'on néglige de vérifier si les faits s'accordent avec la formule inventée. Le second défaut est que l'on peut tout prouver par des hypothèses de cette nature ; les mathématiques risquent donc d'y perdre un peu de la

confiance qu'elles inspirent à chacun, car seuls les esprits avisés verront l'abus. Nous croyons donc qu'il ne faut parler d'espérance morale dans les écoles secondaires, qu'à la condition d'avoir la possibilité de la soumettre à une critique très serrée et la certitude que cette critique sera comprise.

La statistique est un domaine très difficile, parce qu'elle exige une grande culture générale ; mais justement parce qu'elle touche à tous les sujets, elle se prête à de nombreux développements. Les exemples simples n'y manquent pas ; ils permettraient de montrer aux jeunes gens en quoi consiste une de nos principales méthodes de recherche et de démonstration. La plupart des hommes cultivés n'en ont pas la moindre idée ; ils tirent des statistiques les conséquences les plus absurdes faute de savoir qu'un nombre ne contient que ce qu'on y a mis. Pour eux, la statistique n'est qu'un objet de moquerie; ils en font pourtant chaque jour.

L'assurance sur la vie est en contact intime avec la réalité ; elle illustre les bienfaits de l'association ; la comparaison des diverses combinaisons attire l'attention des jeunes gens sur les éléments dont il faut tenir compte pour juger une affaire. Elle ne présente pas de difficultés trop grandes pour de bons élèves ; le calcul des réserves demande de l'attention et de la sagacité, mais, outre qu'il doit comprendre la vraie nature de l'assurance, il donne un bon exemple d'une fonction de plusieurs variables. Si ces matières avaient été il y a une cinquantaine d'années déjà dans nos programmes, nous ne verrions pas tant de gens qui, consacrant à l'assurance la totalité de leurs économies, payent les yeux fermés, par incapacité d'estimer, même approximativement, la valeur vénale d'une police. Nous ne verrions pas non plus tant de sociétés de secours mutuels faire faillite.

Pour indiquer ce qu'est l'enseignement de l'arithmétique politique, M. Timerding fait l'analyse des principaux manuels de langue allemande. Il sait bien que l'important n'est pas le livre, mais l'usage qu'on en fait ; pourtant, sa méthode lui permet de reconnaître les tendances de l'enseignement.

Il divise les exercices en deux classes : les problèmes réels et les problèmes fantaisistes. Autrefois, on aimait surtout les derniers, tandis que maintenant on préfère les premiers. C'est un progrès, mais il ne faut rien exagérer. A cause de leur complexité, les problèmes réels sont souvent au-dessus de la portée des élèves secondaires ; il faut les simplifier ; mais il importe d'en conserver les éléments essentiels car on doit bien se garder de montrer aux jeunes gens une image déformée de la vie ; il importe aussi que l'élève reconnaisse toujours la classe du problème à résoudre.

Les problèmes fantaisistes ont une autre raison d'être : pour certaines questions, ils éclairent un côté mathématique que la pratique laisse dans l'ombre ; ils n'ont pas d'inconvénients si le résultat en est possible ; malheureusement, bien des personnes ont tendance à bannir le bon sens de l'étude des mathématiques ; c'est un grand tort, car la première vérification d'un calcul est de voir si le résultat est celui qu'un homme raisonnable devait attendre.

A un autre point de vue encore, l'arithmétique politique est utile ; c'est peut être la partie de l'arithmétique qui fournit les meilleurs exemples de calcul numérique ; elle se prête ainsi à l'étude des divers procédés et appareils à l'usage des calculateurs : règles à calcul, tables numériques, méthodes graphiques, etc. Les méthodes graphiques, en particulier, n'ont pas dans l'enseignement la place qu'elles méritent. Une courbe parle mieux à l'enten-

dement qu'une formule, surtout pour les jeunes gens dont la pensée est généralement concrète. D'autre part, un abaque réunit sur une feuille de papier des résultats que jamais une table numérique ne présenterait aussi clairement.

L'enseignement de l'arithmétique politique doit éviter deux écueils : il ne doit pas entrer trop dans les détails, car l'école secondaire ne prépare pas uniquement au commerce, mais à une foule d'autres professions ; il ne doit pas non plus être trop abstrait ; l'arithmétique politique est une partie des mathématiques appliquées et l'on en perd le sens si l'on ne serre pas de près la réalité. Le maître qui s'inspirera de la brochure de M. Timerding trouvera le juste milieu, surtout s'il sait se pénétrer de la méthode qui en fait le charme et la valeur. M. Timerding, en effet, ne s'égare pas dans de vagues spéculations ; il appuie chacune de ses remarques par des exemples dont le choix est si judicieux qu'ils nous amènent tout naturellement à des considérations très générales.

M. Timerding ne cache pas la difficulté d'un enseignement tel qu'il le conçoit : la préparation des maîtres. C'est à l'Université de bien organiser les études et les examens dans ce but ; un bon cours d'économie politique, par exemple, habituerait les futurs maîtres à ne pas voir du point exclusivement mathématique, les questions que nous avons touchées. Il leur aiderait à rester plus tard en contact avec la vie économique et leur montrerait dans quel sens ils doivent se perfectionner, car un bon maître, désireux de donner un enseignement fructueux, ne ménagera pas sa peine pour connaître toujours mieux un domaine qui, comme l'arithmétique politique, montre à quoi peuvent servir les abstractions mathémathiques. S. Dumas (Berne).

Le dessin linéaire et la géométrie descriptive dans les écoles réales.

Der Unterricht im Linear-Zeichnen und in der darstellenden Geometrie an den deutschen Realanstalten [1], von D. P. Zühlke, Oberlehrer am Realgymnasium in Grünewald.

L'auteur a visité une trentaine d'écoles en Allemagne et quatre en Autriche. Son travail objectif contient de nombreux renseignements relatifs aux méthodes et aux manuels employés, à la matière traitée, aux instruments et aux salles de dessin.

L'enseignement de la Géométrie descriptive est plus développé dans l'Allemagne du Sud qu'en Prusse. Presque tous les maîtres estiment qu'une méthode générale doit être expliquée d'abord sur un corps abstrait et appliquée ensuite à quelques exemples pratiques. Il est plus important pour l'élève d'avoir bien compris les notions fondamentales et de savoir les utiliser avec assurance que de dessiner des machines trop compliquées. L'emploi de modèles n'est recommandé que pour l'enseignement préparatoire.

Dans les Gymnases, on illustre l'étude de la stéréométrie par des projections orthogonales, en plan et en élévation, ou par des perspectives cavalières.

La fusion de la théorie et du dessin est réalisée d'une façon très heureuse dans les écoles réales bavaroises remaniées en 1907 ; elle est prévue aussi

[1] Abhandlungen uber dem mathem. Unterricht in Deutschland, Band III, Heft 3. — 1 fasc. de 92 p. ; 2 M. 40 ; B. G. Teubner, Leipzig. — Résumé par M. le Prof. L. Kollros (Zurich).

dans le Wurtemberg par un décret de 1906 ; en Prusse, on ne consacre au dessin technique qu'une heure facultative par semaine.

M. Zühlke forme le vœu que les maîtres de dessin approfondissent davantage les mathématiques et que, d'autre part, les maîtres de géométrie se perfectionnent dans le dessin ; il désire que le but de l'école moyenne continue à être une bonne culture générale plutôt qu'une préparation spéciale de futurs techniciens.

L. Kollros (Zurich).

AUTRICHE

La Géométrie descriptive à l'Ecole réale et à l'Ecole technique supérieure[1].

Der Unterricht in der darstellenden Geometrie an den Realschulen und Realgymnasien von A. Adler. — *Der Unterricht in der darstellenden Geometrie an den technischen Hochschulen Œsterreichs*, von E. Müller. — En général, on consacre plus de temps à la culture de l'intuition de l'espace en Autriche qu'en Allemagne. Les « Instructions » accompagnant les plans d'études de 1879, 1898 et 1909 ont eu une heureuse influence sur l'organisation de l'enseignement moyen. Les problèmes fondamentaux de la géométrie descriptive sont étudiés d'une manière approfondie dans la 1re classe de l'école réale supérieure. Les autres questions usuelles sont traitées comme *exercices* et — autant que possible — en classe. La leçon de dessin est réservée aux applications pratiques. Les répétitions en vue des examens de maturité se font de la manière la plus rationnelle, c'est-à-dire par l'étude soigneuse et complète de quelques problèmes instructifs heureusement combinés.

Dans les « *Realgymnasien* » de 8 classes, 2 heures hebdomadaires sont destinées, en 5me et 6me, aux éléments de la Géométrie descriptive et du Dessin. Ces branches sont facultatives dans les Gymnases *(Reform-Realgymnasium* et *Gymnasium)*.

Le rapport de M. le Dr E. Müller, professeur à l'école technique supérieure de Vienne, intéressera les maîtres de géométrie descriptive de tous les pays ; il ne renferme pas seulement des détails historiques et statistiques sur les écoles polytechniques autrichiennes (Vienne, Prague, Graz, Brünn, Lemberg), mais encore une foule de renseignements précieux sur les cours généraux et spéciaux, sur les exercices et les répétitions, les travaux de séminaire et de diplôme, les examens et la préparation des maîtres.

Personne ne songera à reprocher à l'auteur le caractère subjectif de son rapport ; on lui saura gré, au contraire, d'avoir bien voulu communiquer, à tous, les résultats de ses expériences pédagogiques et les nombreux sujets d'étude qu'il propose à ses élèves depuis une dizaine d'années.

L. Kollros (Zurich).

---

[1] Ces 2 rapports sont réunis en 1 fascicule de 124 p., (2 M. 40) Heft 9 des *Berichte über den math. Unterricht in Œsterreich*. Alf. Hölder, Wien.

FRANCE

Enseignement des jeunes filles.

Enseignement des jeunes filles[1], publié sous la direction de Mlle Amieux, prof. au Lycée Victor-Hugo, Paris. — Le Vme volume des rapports de la Sous-commission française traite de l'enseignement mathématique des jeunes filles en France et comprend l'enseignement primaire, l'enseignement professionnel et l'enseignement secondaire. L'enseignement supérieur des jeunes filles, étant commun avec celui des jeunes gens, est exposé dans le volume III.

Les trois premiers rapports du volume V sont relatifs à *l'enseignement secondaire*, donné par les lycées et collèges et à l'école normale. Le cours des études des lycées et collèges est de 5 ans, il est divisé en deux cycles. Dans le 1er (3 années d'étude, âge moyen d'entrée en 1re année 12 ans) l'enseignement mathématique est obligatoire ; dans le 2me il est facultatif.

Mlle Amieux indique, dans le 1er rapport, la place qu'occupent les mathématiques dans le plan d'études des 1er et 2me cycles et, les raisons qui en 1880, lors de la création de ces écoles, ont contribué à faire cette place très modeste. Elle fait remarquer que dans le 2me cycle, malgré leur caractère facultatif, les cours mathématiques sont très fréquentés ; elle estime du reste que « l'aptitude des jeunes filles à profiter d'un enseignement mathématique élémentaire, mais sérieux, est désormais un fait d'expérience. » Une 6me année a dû être créée dans un certain nombre de lycées, pour préparer au baccalauréat les jeunes filles en nombre toujours croissant, qui veulent faire des études supérieures. D'autre part, les lycées ont également jugé nécessaire de s'annexer des classes préparatoires pour enfants de 5 à 12 ans. L'enseignement mathématique est donc divisé en enseignement obligatoire, donné dans les classes préparatoires et les 3 classes secondaires du 1er cycle et en enseignement facultatif, donné dans les 2 classes du 2me cycle et dans les classes de 6me année.

Mlle Amieux expose ensuite l'organisation générale pour les 2 cycles. Celle des classes préparatoires et de la 6me année varie d'un lycée à l'autre.

La 3me partie du rapport s'occupe plus particulièrement de l'enseignement *obligatoire*. Le programme de chaque année d'étude est accompagné de considérations sur le but de l'enseignement et la manière dont le programme est interprété.

En géométrie, pendant les deux premières années l'enseignement doit « initier les élèves aux constructions et à la connaissance des formes géométriques et leur permettre de mieux appliquer le système métrique ». La 3me année a pour but d'« initier les élèves à la culture logique de l'intelligence, exercer leur faculté de raisonnement, les habituer à la rigueur de la pensée, à la précision et à la clarté d'expression ».

La question de la valeur respective des trois méthodes d'Euclide, de Méray et de la méthode mixte est encore très controversée, aussi toute liberté est laissée au corps enseignant. Mlle Amieux termine son rapport

[1] 1 vol. de 95 pages ; 3 fr. 50 ; Librairie Hachette, Paris.

par un exposé de l'enseignement géométrique de 3me année au lycée Victor Hugo à Paris.

L'enseignement des mathématiques dans le 2me cycle, soit les 4me et 5me années de l'enseignement secondaire, fait l'objet du second rapport lequel est dû à Mme H. Baudeuf, prof. au lycée de Bordeaux. Cet enseignement prépare aux baccalauréats et aux divers concours de l'enseignement secondaire féminin, il est facultatif en ce qui concerne les mathématiques, tandis que la physique et la cosmographie ainsi que les autres branches d'étude sont obligatoires. Mme Baudeuf regrette ce caractère d'exception donné aux mathématiques. Il a pour résultat naturel de faire, trop souvent, négliger les mathématiques vers la fin de la 5me année, à l'approche des examens du diplôme de fin d'études. Contrairement aux idées reçues au moment de l'élaboration des programmes des lycées de jeunes filles, l'expérience des 28 dernières années a prouvé que les jeunes filles sont plus fréquemment attirées vers l'étude des mathématiques que vers celle des sciences naturelles.

Quant au programme notons que l'arithmétique est une revision du champ déjà parcouru, mais avec des tendances plus théoriques, systèmes de numération, divisibilité, etc. Le programme d'algèbre comporte les équations du second degré. La géométrie plane est traitée en 4me année, la géométrie dans l'espace en 5me année. Les cours mathématiques sont de 2 heures par semaine. En 4me année le cours de cosmographie est obligatoire, 1 heure par semaine pendant I semestre, tandis qu'en 5me année il est facultatif et fait partie du cours de mathématiques pures auquel sont consacrées 2 heures par semaine.

L'enseignement qui suit le diplôme de fin d'études, soit en 6me année, est en réalité réparti sur 1 ou 2 ans et comporte 3 sections. La 1re prépare les élèves à la 1re partie du baccalauréat ès sciences (latin-Sciences ou Science-langues vivantes) avec 5 heures de mathématiques par semaine. La 2me section est destinée aux élèves qui ont passé la 1re partie et se préparent à la 2me partie du baccalauréat, 8 h. par semaine sont attribuées aux mathématiques.

Le programme est celui de la classe correspondante des lycées de garçons (classe de mathématiques élémentaires), avec adjonction d'un cours élémentaire de géométrie analytique à cause des candidates au certificat d'aptitude à l'enseignement des sciences dans les collèges de jeunes filles. Celles-ci, après avoir obtenu le baccalauréat, complètent et approfondissent leurs connaissances en suivant une seconde fois le même cours.

Enfin la 3me section prépare au concours d'admission à l'école normale supérieure de Sèvres avec 5 heures de mathématiques par semaine. Le programme, plus élémentaire que pour le baccalauréat, doit être possédé parfaitement.

M. P. Appell, doyen de la Faculté des Sciences de Paris et professeur à l'Ecole de Sèvres, rapporte sur *l'enseignement mathématique à l'Ecole normale supérieure de Sèvres.* Cette école a pour but de préparer les professeurs femmes des lycées et collèges de jeunes filles. De même que l'école normale des jeunes gens, elle a une section littéraire et une section scientifique. Elle est un internat, les études et la pension sont gratuites. L'admission des élèves, environ 15 annuellement se fait à la suite d'un concours dont le programme mathématique contient de l'arithmétique, de l'algèbre jusqu'aux progressions, de la géométrie plane et dans l'espace et des éléments de trigonométrie.

Les études à l'École sont réparties sur trois années, dont la troisième a pour but principal la préparation au concours du certificat d'aptitude à l'enseignement dans les lycées et collèges. M. Appell estime que pour les élèves de Sèvres le programme de ce concours est trop voisin de celui d'entrée à Sèvres. Notons que le programme mentionne la notion de dérivée, la variation des fonctions, des notions de géométrie analytique.

La troisième année prépare au concours de l'agrégation des jeunes filles, qui, pour les sciences, est divisé en section des sciences mathématiques et section des sciences physiques et naturelles. Les concours, soit de l'agrégation, soit du certificat d'aptitude ne sont pas exclusivement réservés aux élèves de l'École.

En troisième année, outre la revision du programme, les élèves apprennent à faire elles-mêmes des leçons dans des cours de conférences. Dans le courant de l'année chacune d'entre elles passe une quinzaine de jours à faire de véritables leçons dans les lycées de Paris et de Versailles.

L'*enseignement professionnel* des jeunes filles fait l'objet d'un rapport par Mme Pivot, professeur à l'école professionnelle Emile Dubois, à Paris, et par Mlle Fredon, professeur à l'École pratique du Havre. Ces écoles, appelées écoles pratiques de commerce et d'industrie en province et écoles professionnelles et ménagères à Paris, peuvent se diviser en section commerciale et section industrielle. Elles sont encore dans une période d'organisation, c'est pourquoi ce rapport indique plutôt les tendances de leur enseignement. Leur but est de « former des employées de commerce et des ouvrières aptes à être immédiatement utilisées au comptoir et à l'atelier ».

Le cycle des études est de trois ans. L'admission se fait entre 12 et 15 ans par voie de concours. Malgré le caractère essentiellement pratique de l'enseignement, la culture générale n'est pas négligée. Le temps consacré aux mathématiques est relativement restreint, il varie entre 1 $^1/_2$ et 3 heures par semaine, suivant les années et les sections, contre 10-18 heures de classe et 32-24 heures de travaux pratiques.

Par les cours d'arithmétique on cherche à mettre l'élève à même de résoudre tous les calculs qui peuvent se présenter dans la vie domestique ou professionnelle. Dans la section commerciale quelques leçons sont affectées au calcul algébrique. La géométrie est enseignée surtout en vue du dessin et de la coupe.

Les professeurs des écoles professionnelles se recrutent en général parmi les élèves des sections normales annexées à l'École pratique du Havre, sections qui vont être transférées à Paris. Le rapport se termine par un projet de programme pour les écoles professionnelles de la ville de Paris.

La troisième partie du volume V présente un aperçu sommaire de l'*enseignement primaire féminin*, enseignement qui est sensiblement analogue à celui des écoles primaires de garçons déjà étudié dans le volume I. Les écoles primaires de filles sont divisées en écoles primaires élémentaires, de 5 à 13 ans, et écoles primaires supérieures. Elles préparent respectivement au certificat d'études primaires élémentaires et au certificat d'études primaires supérieures ; les dernières conduisent également, dans certains cas, au brevet simple et au brevet supérieur.

Le personnel enseignant se recrute, pour les écoles élémentaires, dans les écoles normales primaires d'institutrices ; pour les écoles primaires supérieures et pour les écoles normales primaires, surtout à l'école normale supérieure de Fontenay-aux-Roses.

Dans sa « Note sur l'enseignement des mathématiques dans les écoles primaires élémentaires », Mlle Amieux se borne à rappeler les programmes officiels et à renvoyer le lecteur au rapport correspondant sur les écoles de garçons par M. Lefebvre.

M. Tallent, professeur à l'école Turgot, à Paris, passe en revue, dans le second rapport, l'enseignement des mathématiques dans les écoles primaires supérieures de jeunes filles. L'enseignement général en est sensiblement semblable à celui des écoles de garçons.

A partir de la deuxième année, l'enseignement se répartit sur trois sections, une section d'*enseignement général* conduisant à l'Ecole normale ou à l'administration des postes, télégraphes et téléphones, une section *commerciale* et une section *ménagère*.

M. Tallent indique le programme mathématique correspondant aux différentes sections. L'algèbre n'en fait pas partie.

Le cycle des études est généralement de trois ans, exceptionnellement de quatre, par exemple à Paris dans les écoles Edgar Quinet et Sophie Germain.

Pour l'enseignement des mathématiques dans les écoles normales d'institutrices primaires, le rapporteur, M. Vareil, professeur à l'Ecole normale de Melun, renvoie au rapport des écoles de garçons correspondantes.

Le volume se termine par deux rapports sur l'enseignement des mathématiques à l'Ecole normale supérieure d'institutrices de Fontenay-aux-Roses. L'un par M. Fontené, inspecteur à l'Académie de Paris, sur l'arithmétique et l'algèbre, l'autre sur la géométrie, par M. G. Kœnigs, professeur à la Sorbonne. Le cycle des études est de trois ans, l'arithmétique fait l'objet de la première année, la géométrie de la seconde. Dans la troisième année les élèves font elles-mêmes des leçons sur l'une et l'autre des deux branches alternativement.

Renée Masson (Genève).

ILES BRITANNIQUES [1]

Note préparatoire. — Les rapports sur l'enseignement mathématique dans les Iles Britanniques sont publiés avec le concours du *Board of Education*, en une série de fascicules, mis en vente séparément. Ils sont intitulés *Special Reports on Educational subjects. The Teaching of Mathematics in the United Kingdom* (Wyman & Sons, éditeurs, Londres).

En tête de chaque fascicule une *Note préparatoire* rappelle l'origine de ces travaux et la composition de la délégation et de la sous-commission anglaises : Sir G. Greenhill, Prof. E. W. Hobson, Mr. C. Godfrey, délégués, et Mr. C.-E. Ashford, Sir George H. Darwin, Mr. G.-H. Hardy, Mr. C. S. Jackson, Sir Joseph Larmor, Prof. A. E. H. Love, et Prof. Gibson.

Cette commission a été chargée d'organiser les travaux, mais, quoique les rapports soient dirigés par le *Board* sur la proposition de la commission, il est bien entendu que ni celle-ci, ni le Board n'acceptent aucune responsabilité concernant les renseignements ou les opinions qu'ils renferment.

---

[1] Ces rapports ont été résumés par M. J.-P. Dumur (Genève).

Nº 1. — Les mathématiques supérieures dans la sixième classe classique.

Higher Mathematics for the Classical Sixth Form [1], by Mr. W. Newbold, Assistant Master à Tondbrige School. — L'auteur déplore tout d'abord le fait que les élèves des sixièmes classes des Public Schools qui préparent leur entrée à l'université soient plus ou moins obligés d'abandonner les mathématiques, du moins pendant le ou les trimestres précédant immédiatement l'examen. Il en résulte que nombre de jeunes gens intelligents quittent la Public School en ne possédant qu'une connaissance très minime des mathématiques, ils n'ont pas la moindre envie de les continuer et les laissent complètement de côté durant le reste de leur vie. Les mathématiques supérieures représentent à leurs yeux un domaine inaccessible qu'il ne faut même pas songer à aborder. Des tentatives devraient être faites pour modifier si possible cet état de choses, sans toutefois nuire au côté classique de l'éducation.

Dans tous les pays et aux diverses périodes de l'enseignement, deux branches surtout occupent une place toute spéciale dans les programmes. Ce sont la langue maternelle et les mathématiques. En ce qui concerne la première de ces branches, l'élève de la sixième classe classique possède une préparation relativement satisfaisante, car, abstraction faite du travail scolaire proprement dit, il lui est possible d'acquérir indirectement l'habileté et la facilité requises dans ce domaine, par l'usage continu de sa langue maternelle, par ses lectures littéraires, etc.

Pour les mathématiques, il en est tout autrement ; s'il les abandonne à son entrée à l'université il y a bien peu de chances qu'il s'y intéresse à nouveau une fois ou l'autre. C'est pourquoi une large proportion des meilleurs élèves des Public Schools ne sont équipés pour le reste de leur vie que de maigres rudiments d'arithmétique, d'algèbre et de géométrie et parfois d'une teinture de trigonométrie. Ceci est d'autant plus regrettable que ces jeunes gens sont précisément arrivés à un degré de développement mental et de culture générale qui se prêterait favorablement à quelques incursions dans certains domaines des mathématiques supérieures.

Lorsque, il y a trois ans, Mr. G. St. L. Carson fut chargé du département des mathématiques à Tonbridge School, il réorganisa leur enseignement pour toute l'école. En septembre 1909, on décida de réserver quatre heures de mathématiques par semaine pour les élèves de la sixième supérieure (Upper Sixth) qui, pour une année n'avaient pas d'examen d'entrée à l'université en perspective immédiate. Ces jeunes gens, au nombre de six formèrent ce qu'on appela le groupe spécial (Special Set) et l'auteur du présent rapport fut chargé de leur enseignement. Les conditions au début étaient très peu favorables. Les élèves, âgés de 17 ans en moyenne, n'avaient fait, à part l'un deux, que des mathématiques très élémentaires, et la plupart n'en avaient plus fait depuis une année environ. Le travail se fit sans programme bien arrêté ; le but à poursuivre consistait surtout à développer de nouvelles idées concernant la signification des problèmes et la façon de les aborder, spécialement les questions de statistique que l'on rencontre journellement dans le commerce, la politique ou les sciences. Sans entrer dans les détails,

[1] Price one Penny, Wyman and Sons, Londres.

citons simplement les sujets principaux qui furent abordés durant l'année. Il fallut tout d'abord dérouiller pour ainsi dire les élèves, leur faire acquérir une certaine souplesse dans le maniement des chiffres et des lettres et développer le côté plutôt mécanique du travail. Un certain temps fut consacré ensuite à l'extension des éléments de statistique (naissances, population, etc.) avec emploi des méthodes graphiques, et à l'acquisition, jusqu'à un certain degré, des notions de fonction et de limite et des éléments du calcul différentiel. En même temps, certaines questions d'algèbre, de géométrie et de trigonométrie furent traitées incidemment, lorsque l'occasion s'en présentait ; par exemple les polyèdres réguliers, les aires et volumes de la pyramide et de la sphère par la méthode infinitésimale. Ces questions conduisirent naturellement à quelques développements sur les progressions et les séries et aux notions fondamentales de convergence, de valeur approchée et de valeur limite.

Suivent les quetions qui furent proposées aux examens d'été 1910, à la fin de l'année scolaire et qui donnent une idée précise du travail accompli. Les résultats furent d'une façon générale satisfaisants et justifient pleinement cette tentative.

L'auteur fait remarquer l'importance du choix des problèmes. L'élève doit être à même d'en comprendre toute la portée, le sujet traité doit lui être familier. Bien des erreurs pourraient être évitées si ces conditions étaient satisfaites. En outre, un ou deux élèves du groupe seulement connaissaient un peu la mécanique élémentaire, de sorte que toute une catégorie de questions ne pouvaient être abordées. Cet inconvénient n'aura plus lieu dans l'avenir, car la mécanique élémentaire figure actuellement au programme de Tonbridge School. En ce qui concerne le côté abstrait de l'enseignement, l'auteur estime qu'il ne faut pas l'éviter complètement ; mais il faut bien persuader l'élève qu'une exactitude rigoureuse n'a pas plus d'importance pour les besoins de la pratique qu'une approximation poussée jusqu'à un degré suffisant.

M. W. Newbold nous a exposé ces résultats pour nous montrer, ce que les élèves de la sixième classe étaient capables de faire et pour nous convaincre de l'utilité d'introduire dans cette classe quelques aperçus de mathématiques plus avancées. Le bénéfice que les élèves en retireront ne concernera pas seulement leurs connaissances purement mathématiques, mais aura encore sa répercussion dans leur vie politique, commerciale ou scientifique, sans parler du côté esthétique de la question qui doit également entrer en ligne de compte.

Depuis une cinquantaine d'années, les méthodes scientifiques se sont extraordinairement développées, et il est urgent que les élèves de la sixième classe classique qui représentent les éléments les plus cultivés des Public Schools reçoivent un enseignement ad hoc. De toutes façons une réforme s'impose et il faut espérer qu'elle se réalisera au plus vite.

N° 2. — Les relatious entre les mathématiques et la physique.

The Relations of Mathematics and Physics [1], by Dr L. N. G. Filon, F. R. S., Professeur assistant de mathématiques à University College, Londres. —

[1] Price one penny.

Le siècle dernier a été caractérisé, au point de vue scientifique, par une réunion toujours plus étroite des mathématiques et de la physique. La thermodynamique, l'électromagnétisme et la théorie électromagnétique de la lumière sont parmi les plus grands triomphes de cette alliance des méthodes expérimentales et analytiques. L'esprit qui animait les grands savants de cette époque est rendu manifeste par cette phrase de Fourier[1] :

« L'étude approfondie de la nature est la source la plus féconde des découvertes mathématiques.

« Non seulement cette étude, en offrant aux recherches un but déterminé, a l'avantage d'exclure les questions vagues et les calculs sans issue ; elle est encore un moyen assuré de former l'Analyse elle-même, et d'en découvrir les éléments qu'il nous importe le plus de connaître et que cette science doit toujours conserver.

« Ces éléments fondamentaux sont ceux qui se reproduisent dans tous les effets naturels. »

Actuellement, il faut le constater, cette féconde harmonie de la physique et des mathématiques s'affaiblit graduellement. La tendance se fait sentir de plus en plus de séparer les mathématiques autant que possible de leur substance physique, de faire une part moins large à l'intuition et à l'expérience et de s'attacher davantage à leur côté abstrait. Cette tendance n'est peut-être pas en elle-même une mauvaise chose ; elle a rendu de grands services dans certains domaines (revision des bases des mathématiques élémentaires, théorie des groupes de transformation, théorie des variables complexes, théorie des équations intégrales).

Malheureusement, tandis que ces nouvelles branches des mathématiques pures se développent rapidement, il n'en est pas de même des recherches de physique mathématique qui semblent se relâcher considérablement ; on n'assiste plus à l'apparition de ces méthodes nouvelles et fécondes, notre génération n'a rien fourni qui puisse se comparer aux théorèmes de Fourier, Green ou Stokes.

D'autre part la physique expérimentale de son côté, grâce au développement de nouvelles branches (radioactivité, météorologie, physique technique) s'accroît de faits nouveaux et de méthodes nouvelles. En fait, cette science a atteint un degré de spécialisation tel qu'il est difficile pour le mathématicien pur de s'en rendre maître également.

Or il n'est pas douteux que les grandes victoires de la physique durant le siècle dernier sont dues à la réunion chez un même individu de la puissance d'investigation expérimentale et de l'esprit d'analyse. Cherchons donc les causes qui, à l'heure qu'il est, contribuent à éloigner le mathématicien du domaine expérimental.

Nous avons déjà mentionné cette tendance qu'ont les mathématiques de devenir métaphysique. Les mathématiques modernes sont en effet caractérisées par une revision complète de résultats qui reposent sur des méthodes infinitésimales (théorie des nombres irrationnels, théorie des groupes, fondements du calcul différentiel et intégral, séries et produits infinis, fractions continues, théorie moderne des séries divergentes, nombres transfinis) et par la rediscussion des axiomes de la géométrie amenée par la découverte de la géométrie non-euclidienne. Un champ nouveau d'investigation est ainsi

---

[1] *Théorie analytique de la Chaleur*, Œuvres, édition DARBOUX, vol. I, p. XXII.

offert au mathématicien et le détourne plus ou moins des problèmes d'intérêt plus directement pratique. Il en résulte aussi que la preuve de la possibilité d'un problème est aussi importante, si ce n'est plus importante, pour le mathématicien, que sa résolution effective. Or c'est précisément cette résolution effective qui prend de l'importance pour le physicien dont la tâche est d'exprimer sous forme analytique les phénomènes naturels. On comprend dès lors facilement qu'une certaine réaction se soit produite et que les physiciens commencèrent à douter sinon des mathématiques, au moins des mathématiciens, et à s'effrayer de leurs méthodes rigoureuses.

Une autre tendance dont l'efficacité est certainement douteuse est celle qui consiste à accumuler les faits sans en donner en même temps l'interprétation théorique (tables météorologiques, mesures spectroscopiques). On peut se demander en pareil cas si l'exactitude prématurée ou la multiplication des observations ne décourage pas plutôt que ne stimule.

Une autre cause qui détourne actuellement le mathématicien des problèmes de physique, c'est les progrès de l'électrodynamique en opposition à la dynamique mécanique. De même l'interprétation théorique de bien des faits physiques ne peut plus se faire maintenant avec la même simplicité qu'autrefois.

Tout ceci n'est pas fait pour donner confiance au mathématicien qui préfère manifester son activité dans un domaine qui lui est plus familier. Il faut constater encore la décadence progressive des mathématiques appliquées dans la plupart des universités. Cette décadence est due en grande partie au fait qu'un temps disproportionné est consacré à la résolution de problèmes qui ne se présentent jamais en pratique, basés sur des hypothèses irréalisables et conduisant parfois à des résultats en complet désaccord avec le sens commun. L'enseignement de cette branche, en outre reste stationnaire, il ne satisfait plus aux exigences modernes. Ainsi l'électricité est en train de révolutionner complètement la mécanique, et pourtant, elle ne figure pas au programme ; les phénomènes électriques sont exclus de la théorie du potentiel ; on n'aborde même pas la théorie cinétique des gaz et la thermodynamique.

Il semble qu'actuellement la physique soit parvenue à une période où de nouveaux faits et des observations plus précises rendent les anciennes lois insuffisantes. De nouveaux problèmes surgissent, et de nouvelles méthodes mathématiques s'imposent. C'est pourquoi un certain temps sera nécessaire pour la réorganisation et le développement de ces méthodes, temps pendant lequel on ne doit pas s'attendre à une coopération active des mathématiciens et physiciens.

Les diverses causes de divergences qui viennent d'être passées en revue peuvent être classées en deux catégories. Les unes constituent une phase nécessaire de l'histoire de la science et doivent être acceptées comme telles. Ce sont :

1° Le besoin de nouvelles méthodes mathématiques répondant aux nouveaux faits de la physique.

2° L'incertitude et la nouveauté des théories électriques modernes.

3° L'intérêt développé par l'apparition de nouveaux domaines des mathématiques pures.

Les autres représentent des tendances susceptibles d'être améliorées jusqu'à un certain point. Ce sont :

1° Le malentendu réciproque provenant d'une spécialisation à outrance.

2° L'accumulation de matériel non interprété en physique et de concepts abstraits en mathématiques.

3° Le déclin des mathématiques appliquées.

On remédiera d'une façon sensible aux deux premiers points par l'éducation appropriée des maîtres, examinateurs et chercheurs des deux branches; mais c'est surtout par une revision complète du programme des mathématiques appliquées qu'une amélioration décisive s'opérera. Il faut que ce programme renferme des questions d'ordre réellement pratique et ne soit pas réduit à une pure gymnastique cérébrale ; ce qui ne veut pas dire toutefois que le cours de mathématiques appliquées soit transformé en un cours de physique expérimentale.

Un programme bien compris, qui initierait les auditeurs aux méthodes fondamentales de la physique et leur fournirait en même temps des résultats de nature mathématique en évitant cependant de trop grandes difficultés analytiques, constituerait une excellente base d'action commune pour le mathématicien et le physicien. J.-P. Dumur (Genève).

Cours universitaires.

RUSSIE

Cours annoncés pour l'année universitaire 1911-1912 [1].

Dorpat (Jurjew); *Université*. — Alexejew : Applications du Calcul diff. à la Géométrie, 4 (1. *s.*). Calcul intégral, 2 (1. *s.*). Géométrie descriptive, 4 (1. *s.*). — Gravé : Introduction à l'Analyse, 4 (1. *s.*). Géométrie analyt. du plan, 4 (1. *s.*). avec exercices, 1 (1. *s.*). Théorie des fonctions d'une variable complexe, 4 (1. *s.*). — Kolossoff : Mécanique analyt., I : Cinématique, 4 (1. *s.*). II : Dynamique des systèmes de points et des solides, 3 (1. *s.*); Calcul des variations, 2 (1. *s.*). — Pokrowsky : Mécanique (pour les étudiants-chimistes), 3 (1. *s.*). Mathématiques élémentaires, 2 (1. *s.*). Cours général d'astronomie, 4 (1. *s.*). Connaissance du ciel, 1 (1. *s.*). Astronomie théorique, 2 (1. *s.*). — Orloff : Géodésie sup., 2 (1. *s.*). Calcul des perturbations spéciales des planètes et des comètes, 6 (1. *s.*).

Kazan ; *Université*. — Kotelnikoff : Géométrie analyt., 3 (1. et 2.) ; Travaux prat., 1 (1. et 2.). Algèbre sup., 3 (1. *s.*) ; Travaux prat., 1 (2. *s.*). — Porphyrieff : Calcul diff., 3 (1. *s.*). Exerc. 1 (2. *s.*). Applications analyt. et géomét. du Calcul diff., 3 (2. *s.*) ; Trigonométrie sphérique, 1 (1. *s.*) ; Equations aux dérivées partielles, 2 (1. *s.*) ; Travaux pratiques d'intégration des équations diff., 2 (2. *s.*). — Parphentieff : Calcul intégral (intégrales indéfinies), 3 (1. *s.*) ; Travaux pratiques d'application du Calcul intégral à la Géométrie, 2 (1. *s.*). Intégration des équations diff., 2 (1. et 2.). Théorie des intégrales définies, 4 (2. *s.*). — Slouguinoff : Théorie des nombres, 2 (1. *s.*). Applications du Calcul diff. à la Géométrie, 2 (2. *s.*). — Blagélvsky : Histoire des Mathématiques, 2 (1. et 2.). Cinématique, 2 (1. et 2.). — Zeiliguer : Cinétique, 6 (1. *s.*), 3 (2. *s.*). Aviation, 2 (1. *s.*). Géométrie com-

[1] Explications des abréviations : (1. *s.*) : premier semestre (septembre à décembre 1911) ; 2. *s.* : deuxième semestre (janvier à mai 1912) ; 1. et 2. : pendant deux semestres.

plexe de la droite, 2 (1. *s.*). Cinématique, 3 (2. *s.*). Cours itératif de Mécanique, 4 (2 *s.*). — DOUBIAGO : Astronomie sphérique et générale, 3 (1. et 2). Astronomie théorique, 2 (1. *s.*) ; Travaux pratiques d'Astronomie pratique (1. et 2.). Mécanique céleste, 2 (2. *s.*) ; Travaux pratiques d'Astronomie sphérique, 1 (2. *s.*).

Kharkov ; *Université*. — SINTZOFF : Géométrie analyt. du plan. 3 (1. *s.*) ; Applications du Calcul diff. à la Géométrie, 3 (1. *s.*). Intégration des équations diff., 3 (1. *s.*) ; Travaux pratiques, 1 (1. *s.*). Géométrie analyt. de l'espace, 3 (2. *s.*) ; Travaux pratiques, 1 (2. *s.*). Introduction à la Géométrie, 2 (2. *s.*). — ROUSSIAN : Théorie d'intégration des fonctions, 3 (1. *s.*) ; Travaux pratiques, 2 (1. *s.*). Théorie des intégrales définies (p. II), 2 (1. *s.*). Calcul diff., 4 (2. *s.*) ; Travaux pratiques, 2 (2. *s.*). Théorie des intégrales définies (p. I), 3 (2. *s.*). Intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, 3 (2. *s.*). — PSCHEBORSKY : Introduction à l'Analyse et éléments de théorie des nombres. 4 (1. *s.*). Théorie des fonctions d'une variable complexe, 3 (1. *s.*). Calcul des variations, 2 (1. *s.*). Analyse algébrique, 4 (2. *s.*). Théorie des fonctions ellipt., 3 (2. *s.*). — ZAGOUTINSKY : Mathématiques supérieures (pour les étudiants naturalistes), 4 (1. et 2.). Travaux pratiques de Géométrie analyt., 1 (1. et 2.). Travaux pratiques d'application du Calcul diff. à la Géométrie, 1 (1. *s.*). Géométrie projective, 2 (2. *s.*). — ZATYCHEFF : Géométrie descriptive, 2 (2. *s.*) ; Travaux pratiques, 1 (2. *s.*). — BERNSTEIN : Calcul des probabilités, 2 (1. *s.*). Intégration des équations de la Physique mathém., 3 (1 *s.*). Calcul des différences finies, 2 (2. *s.*). Théorie analyt. des équations diff., 3 (2. *s.*). — SALTYKOFF : Mécanique théorique (Statique et Cinématique), 4 (1. *s.*) ; Travaux pratiques, 2 (1. et 2.). Séminaire de Mécanique théorique, 2 (1. et 2). Mécanique théorique (dynamique), 4 (2. *s.*) — STROUVÉ : Astronomie générale, 3 (1. et 2.). Détermination des orbites, 3 (1. *s.*), 2 (2. *s.*). Travaux pratiques à l'Observatoire (observations astronomiques), 3 (1. et 2.). — EUDOKIMOFF : Trigonométrie sphér., 1 (1. *s.*). Astronomie sphér., 3 (2. *s.*) ; Travaux prat.. d'Astronomie sphér., 2 (2. *s.*).

Kiew ; *Université*. — KHANDRIKOFF : Cours fondamental des Mathématiques (pour les étudiants naturalistes) : Géométrie analyt. et Calcul diff., 4 (1. *s.*). Calcul intégral, 4 (2. *s.*). — BOUKREIEFF : Introduction aux Mathématiques supérieures, 4 (1. *s.*). Intégration de fonctions, 2 (1. *s.*). Applications du Calcul diff. à la Géométrie, 4 (1. *s.*). Calcul diff. (théorie et applications analyt.), 4 (2. *s.*). Intégrales définies et intégrales multiples, 4 (2. *s.*). — GRAVÉ : Géométrie analyt., 4 (1. s.), 3 (2. *s.*) ; Travaux pratiques, 2 (1. et 2.). Analyse algébrique, 3 (1. et 2.). Théorie des nombres, 1 (1. et 2.). Théorie de division du cercle, 2 (1. et 2.). — PFEIFFER : Intégration des équations diff., 3 (1. *s.*) ; Exerc., 1 (2. *s.*). Intégration des équations aux dérivées partielles, 2 (1. et 2.) ; Travaux pratiques sur les applications du Calcul diff., 2 (1. *s.*). Calcul des différences finies, 2 (1. *s.*). Calcul des probabilités, 1 (2. *s.*). Travaux pratiques de Calcul diff., 1 (2. *s.*). Travaux pratiques de Calcul intégral, 2 (2. *s.*) — SOUSSLOW : Cinématique d'un système invariable, 2 (1. *s.*). Dynamique des solides, 2 (1, *s.*). Statique et théorie du potentiel, 2 (1. *s.*). Dynamique d'un système, 4 (2. *s.*). Giration d'un solide, 2 (2. *s.*). — WORONETZ : Cinématique du point, 2 (1. *s.*), 3 (2. *s.*). Calcul des variations, 3 (1. *s.*). Equilibre des corps flottants, 2 (1. *s.*). Intégration des équations de la dynamique, 3 (2. *s.*). — BILIMOWITSCH : Théorie de l'élasticité, 2 (1. *s.*). Travaux pratiques de mécanique, 2 (1. et 2.). Travaux pratiques de théorie

de l'élasticité, 1 (1. et 2.). Oscillations petites, 2 (2. *s.*). — Rekaschew : Géométrie descript., 3 (1. *s.*). Statique graphique, 3 (2. *s.*). — Vogel : Astronomie descript., 2 (1. et 2.). Astronomie sphér., 2 (1. et 2.). Travaux pratiques d'Astronomie, 3 (1. et 2.). Théorie des instruments astronomiques, 2 (2. *s.*). — Kordisch : Thermodynamique, 3 (1. *s.*). Electrostatique. 3 (2. *s.*).

Moscou ; *Université.* — Andreeff : Géométrie analyt. du plan, 4 (1. *s.*). Algèbre sup., 6 (1. *s.*), 3 (2. *s.*). Géométrie analyt. de l'espace, 3 (2 *s.*). Trigonométrie sphérique, 1 (2. *s.*). — Lakhtin : Introduction à l'analyse, 4 (1. *s.*). Calcul intégral, 4 (1. *s.*), 3 (2. *s.*). Calcul des probabilités, 2 (1. et 2.). Calcul diff., 4 (2. *s.*). Calcul des différences finies, 2 (2. *s.*) — Egoroff : Géométrie infinitésimale, 4 (1. *s.*). Intégration des équations diff., 2 (1. *s.*), 3 (2. *s.*). Théorie arithmétique des régions algébriques, 2 (1. *s.*). Calcul des variations, 2 (2. *s.*). Séminaire mathématique, 2 (2. *s.*). — Bobynin : Théorie des nombres, 1 (1. *s.*), 2 (2. *s.*). Histoire des connaissances mathématiques antérieures à la science, 1 (1. et 2.) (pour les étudiants mathématiciens et les étudiants philologues). Histoire des mathématiques dans la Grèce antique, 2 (1. et 2.) (pour les mêmes) ; Histoire des mathématiques au moyen âge, 1 (1. et 2.) (pour les mêmes). Histoire des mathématiques modernes 1 (1. et 2.). — Bogoiawlensky : Algèbre sup. (Résolution des équations par radicaux), 2 (1. *s.*). — Dmitrowsky : Courbes planes des ordres supérieurs, 2 (1. et 2.). Travaux pratiques de géométrie analytique du plan, 2 (1. *s.*). Travaux pratiques de géométrie analytique de l'espace, 2 (2. s.). — Buschguens : Travaux pratiques de géométrie infinit., 2 (1. *s.*). Travaux pratiques d'intégration des équations diff., 2 (1. *s.*), 4 (2. *s.*). Théorie des congruences rectilignes, 2 (2. *s.*). — Joukowsky : Cinématique et Statique, 3 (1. *s.*). Travaux pratiques de cinématique et Statique, 2 (1. *s.*). Dynamique des solides (cours spécial), 2 (1. *s.*). Aérodynamique avec des applications à l'aéronautique, 1 (1. *s.*), 2 (2. s.). Dynamique du point et théorie de l'attraction, 3 (2. *s.*). Travaux pratiques de Dynamique du point, 2 (2. s.). — Mertzaloff : Géométrie descript., 2 (1. *s.*). Dessin linéaire, 2 (1. et 2.). Mécanique appliquée (Théorie des mécanismes), 2 (1. *s*). Travaux pratiques de Géométrie descriptive, 2 (2. *s.*). Mécanique appliquée (Théorie générale des machines), 2 (2. *s.*). — Kowalensky : Résistance des matériaux, 4 (1. s.). Hydraulique, 4 (2. s.). — Bolotoff : Théorie du choc, 2 (1. *s.*). Théorie de l'élasticité, 2 (2. *s.*). — Stankiewitsch : Hydrodynamique, 2 (1. et 2.). Equations intégrales, 3 (2. *s.*) Théorie des ondes et des marées, 3 (2. *s.*). — Appelroth : Sur la rotation du gyroscope de S. W. Kowalewsky, 1 (1. et 2.). — Sternberg : Géodésie supérieure, 2 (1. et 2.). Travaux pratiques, 2 (1. et 2.). Astronomie sphérique, 2 (1. et 2.). Travaux pratiques, 2 (1. *s.*). Astronomie descript., 2 (2. *s.*). — Kazakoff : Astronomie théorique, 2 (1. et 2.). Travaux pratiques de calcul des orbites, 2 (1. et 2.). — Blaschko : Astronomie pratique et travaux pratiques à l'Observatoire, 3 (2. *s.*). — Iweronoff : Géodésie, 2 (2. *s.*).

Saint-Pétersbourg ; *Université.* — Sokhotsky : Algèbre sup., 3 (1. et 2.). Théorie des intégrales définies, 2 (1. et 2.). — Markoff : Calcul des probabilités, 3 (2. *s.*). — Ptaschitsky : Géométrie analyt., 4 (1. et 2.). Fonctions ellipt., 3 (1. *s.*). Applications du Calcul intégral à la géométrie, 3 (2. *s.*). — Stekloff : Intégration des équations diff., 3 (1. et 2.). Intégration des équations aux dérivées partielles, 3 (1. et 2.). Iwanoff : Applications du Calcul diff. à la Géométrie, 4 (1. *s.*). Théorie des nombres, 4 (2. s.). —

Borissoff : Eléments de mathématiques supérieures (p. II), 3 (1. et 2). Travaux pratiques, 1 (1. et 2.). — Sawitsch : Géométrie descript., 1 (1. *s.*) et 2 (2. *s.*). — Günther : Introduction à l'Analyse, 4 (1. *s.*). — Calcul des différences finies, 2 (1. *s.*). — Wassilieff : Eléments de mathématiques supérieures, (p. I), 3 (1. et 2.). Introduction à la chimie mathématique, 1 (1. et 2.). — Adamoff : Intégration des fonctions, 3 (1. *s.*). Travaux pratiques d'application du Calcul diff. à la Géométrie, 2 (1. *s.*). Travaux pratiques d'application du Calcul intégral à la géométrie, 2 (2. s.). — Somoff : Analyse vectorielle, 2 (1. s.). — Bobyleff : Cinématique, 2 (1. *s.*) Mécanique d'un système de points matériels et d'un corps solide, 4 (1. *s.*). Théorie de l'élasticité, 1 (1. *s.*). Mécanique du point matériel, 3 (2. *s.*). Hydrostatique, Hydrodynamique et théorie de l'attraction, 3 (2. *s*). — Metschersky : Méthodes pour la résolution des problèmes de Mécanique du point matériel (1 (1. *s.*)) et d'un système de points matériels (1 (2. *s.*)). — Frisendorf : Eléments de Mécanique, 2 (1. et 2.). Statique, 2 (2. *s.*). — Glasenap : Astronomie descript., 3 (1. et 2.). Astronomie pratique, 2 (1. *s.*). Cours général d'Astronomie, 2 (2. *s.*) — Iwanoff : Astronomie sphérique, 3 (1. *s.*). Travaux pratiques, 2 (1. *s.*). Astronomie théorique, 3 (1. *s.*). Géodésie, 3 (2. *s.*). Mécanique céleste, 3 (2. *s.*). Physique du soleil, 2 (2. *s.*). — Séraphimoff : Trigonométrie sphérique, 1 (1. *s*) Théorie de la figure de la Terre, 2 (1. et 2.). — Tatschaloff : Travaux pratiques à l'Observatoire, 2 (2. *s.*). — Borgmann : Optique supérieure (cours théorique), 2 (1. et 2.). — Boulgakoff : Thermodynamique, 2 (1. et 2.).

V. Bobynin (Moscou).

BIBLIOGRAPHIE

H. Andoyer. — **Nouvelles tables trigonométriques fondamentales.** — 1 vol., in-4°, de XXXII-604 p. ; 30 fr. ; Hermann & fils, Paris.

Nous avons déjà signalé en détails cet important travail en résumant[1] le rapport du Prix Jérôme Ponti qui avait été attribué à l'auteur par l'Académie des Sciences. Ces tables, qui sont l'œuvre propre de M. Andoyer, contiennent les logarithmes des lignes trigonométriques de centième en centième du quadrant avec dix-sept décimales, de neuf en neuf minutes avec quinze décimales, et de dix en dix secondes avec quatorze décimales.

Il y avait un grand intérêt scientifique à établir des tables trigonométriques d'un degré de perfection supérieur à celui des tables en usage jusqu'à ce jour. Ces nouvelles tables, qui ont été calculées et imprimées avec le plus grand soin, serviront sans doute de base à toutes les publications ultérieures du même genre, mais moins étendues.

Cet ouvrage a été publié à l'aide d'une subvention accordée par l'Université de Paris sur les arrérages de la fondation Commercy. Il sera hautement apprécié de tous ceux qui auront à s'en servir.

---

[1] *Ens. math.*, Janvier 1911, p. 51-52.

Annuaire du Bureau des Longitudes pour l'année 1912. — 1 vol. in-16 de 750 p.; 1 fr. 50, franco 1 fr. 85; Gauthier-Villars, Paris.

L'Annuaire du Bureau des Longitudes pour l'année 1912 vient de paraître. Cet excellent Recueil renferme cette année, après les documents astronomiques, des Tableaux relatifs à la Physique et à la Chimie, aux Étoiles variables.

Cet Ouvrage ne se trouvera pas seulement sur la table du technicien, du physicien, du mathématicien; chacun voudra le consulter pour avoir sous les yeux la liste des constantes usuelles, et aussi pour lire les intéressantes Notices de cette année : celle de M. Bigourdan sur la *Température moyenne en France* et de M. P. Hatt, *Notions sur la Méthode des moindres carrés*.

R. Guimaraes. — **Les Mathématiques en Portugal.** Appendice II. — 1 vol. in-8., 107 p.; Imprimerie de l'Université, Coïmbre 1911.

Ce fascicule contient des titres de plusieurs écrits omis dans le premier volume (42 p.). Il contient ensuite l'index des noms d'auteurs, une table générale des matières et un important errata (3 p.). Ce fascicule est un complément indispensable de l'utile ouvrage que nous avons analysé (E. M. nº de mars 1910) et qui a été d'ailleurs très favorablement apprécié et accueilli. Nous adressons de nouveau nos félicitations à l'auteur. Er. Lebon.

Alf Guldberg und Georg Wallenberg. — **Theorie der linearen Differenzengleichungen.** — 1 vol gr. in-8 de XIV-288 pages; 10 M.; B. G. Teubner, Leipzig, 1911.

Ce volume est une exposition merveilleusement esthétique et claire de la théorie des équations aux différences finies. Les traités sur le sujet, tel celui de Markoff, n'abondent pas et bien des recherches de Boole, Bortolotti, Casorati, Guichard, Heymann, Horn, Jensen, Lerch, Mellin, Nielsen, Nörlund, Petersen, Pincherle, Poincaré, Seliwanoff, Spitzer, Torelli, etc., restaient jusqu'ici isolées.

Dans le présent ouvrage les auteurs ont cherché à faire une théorie d'ensemble construite, autant que possible, sur le modèle de celles des équations différentielles linéaires. Le grand Traité de Schlesinger les a même visiblement inspirés. Les différences considérées sont toujours relatives à une variation d'une unité de la variable x. Et comme ces différences Δ s'expriment immédiatement à l'aide des valeurs

$$y_{x+n}, \quad y_{x+n-1}, \quad \dots, \quad y_x$$

de la fonction inconnue, l'équation linéaire générale pourra toujours s'écrire

$$(1) \qquad P(y_x) \equiv y_{x+n} + p_x^{(1)} y_{x+n-1} + \dots + p_x^{(n)} y_x = p_x$$

les p étant des fonctions données, rationnelles de préférence.

Avec beaucoup de sagacité, les auteurs n'ont pas cherché à débuter par des généralités. Ils prennent au contraire des équations simples, telles

$$(2) \qquad y_{x+1} - y_x = 0$$

et font remarquer qu'elles définissent des fonctions déjà très générales, ce qui donne immédiatement l'envie de considérer des équations plus complexes dans l'espoir, non déçu, d'apercevoir sans peine des fonctions plus générales encore.

Ainsi (2) définit toutes les fonctions périodiques ω, la période pouvant toujours être représentée par *un*, et comme la fonction ω reste constante pour une infinité de valeurs x toutes distantes de l'unité, on conçoit déjà que, dans le nouveau calcul, les fonctions périodiques joueront un rôle analogue à celui joué par les véritables constantes dans la théorie des équations différentielles ordinaires.

Viennent ensuite les équations équivalentes (si on prend les logarithmes dans la première) :

$$y_{x+1} = p_x y_x \qquad \text{ou} \qquad y_{x+1} - y_x = p_x ,$$

déjà étudiées par M. Guichard à l'aide du calcul des résidus, ce qui peut conduire aux célèbres formules sommatoires de Plana-Abel et d'Euler. L'équation particulièrement simple $y_{x+1} = xy_x$ définit la fonction Γ dont toute la théorie tient en quelques pages. Et alors il est encore impossible de ne pas remarquer que des équations plus générales du type (1) doivent définir des fonctions qu'on peut aussi considérer comme des généralisations de Γ.

Quant aux généralités présentées par le premier membre de (1), il y a d'abord des propriétés qui rappellent celles de simples polynômes. Les expressions aux différences sont susceptibles d'une représentation symbolique qui fait, par exemple, qu'on peut les décomposer en facteurs. Parallèlement à la théorie des équations différentielles linéaires on peut abaisser l'ordre d'une équation (1) quand on en connaît une solution particulière. De même, du cas où le second membre p_x est nul, on passe à l'équation complète par des méthodes qui rappellent point par point la méthode de la variation des constantes, due à Lagrange. Enfin les équations aux différences possèdent des groupes qui permettent de prévoir et de classer leurs procédés d'intégration.

Ne pouvant m'étendre davantage sur ces généralités, je dédommagerai le lecteur en lui signalant de fort jolies propriétés des équations qui s'intègrent par des expressions analytiques élémentaires, telles les équations à coefficients constants. De telles équations lient, par exemple, les termes des séries récurrentes. Ainsi la suite de Fibonacci

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ \ldots$$

correspond à l'équation

$$y_{x+2} = y_{x+1} + y_x$$

qui intégrée donne

$$y_x = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^x\right].$$

Citons encore le problème de Boole : n rayons de polygone régulier tournent autour du centre ce qui définit, pour une courbe fixe, n rayons

vecteurs ; trouver une courbe telle que la somme de ces rayons reste constante. Pour $n = 2$ on trouve une conchoïde de cercle.

Les équations à coefficients linéaires peuvent s'intégrer par des intégrales définies tout comme dans le cas d'équations différentielles et enfin d'autres s'intègrent par des séries, ce qui fournit notamment l'occasion de considérer des équations aux différences du type hypergéométrique. Certaines solutions divergent toujours mais possèdent la convergence asymptotique au sens de M. Poincaré.

Je regrette la brièveté d'un résumé qui, faute de place, laisse de côté bien des choses des plus simples et des plus élégantes. Le livre en est rempli. Espérons que de nombreux lecteurs sauront s'en apercevoir.

A. Buhl (Toulouse).

Sir Thomas L. Heath. — **Diophantus of Alexandria**. A Study in the History of Greek Algebra. Second Edition. — 1 vol. 8°, 887 p. ; University Press, Cambridge.

La première édition de cet ouvrage fut publiée en 1885 ; elle s'épuisa en quelques années. D'importants travaux ayant été consacrés à Diophante depuis une vingtaine d'années, il y avait un réel intérêt pour tous les historiens des mathématiques à posséder une nouvelle édition de cette intéressante étude.

L'Ouvrage comprend trois parties. La première débute par une étude sur Diophante et ses travaux : elle donne la liste des manuscrits et des écrits relatifs au savant grec, les notations et définitions qu'il a introduites, ses méthodes de résolutions pour les opérations, les porismes et propositions de son arithmétique.

La seconde partie est presque entièrement consacrée à l'*Arithmétique* de Diophante : problèmes du 1er degré, du 2me degré et de degrés supérieurs avec les applications.

La troisième partie contient des Notes sur les solutions données par Fermat et Euler aux problèmes difficiles posés par Diophante. On y trouvera des comparaisons d'un grand intérêt entre les méthodes des anciens et celles des algébristes depuis Fermat et Euler à nos jours.

Ern. Lebon. — **Gabriel Lippmann**. Biographie, Bibliographie analytique des écrits. (Collections des *Savants du Jour*). — 1 vol. in-8, de VIII-70 p. : avec un portrait ; 7 fr. ; Gauthier-Villars, Paris.

En présentant à l'Académie des Sciences, dans la séance du 17 juillet 1911, la Notice sur Gabriel Lippmann, dont M. Ernest Lebon vient d'enrichir sa Collection bien connue des *Savants du Jour*, M. Gaston Darboux, Secrétaire Perpétuel, s'est exprimé en ces termes :

« Cette Notice nouvelle est composée avec le même soin, avec le même
« souci de l'exactitude et selon la même méthode que les Notices précédem-
« ment parues. Nous y signalerons plus particulièrement les détails si inté-
« ressants et si curieux que donne M. E. Lebon sur la jeunesse et les pre-
« mières études de notre illustre Confrère, sur les séjours qu'il a faits dans
« les Universités étrangères, sur l'accueil qu'il y reçut des savants les plus
« éminents ; Kirchhoff et Helmholtz en particulier...

« M. Ernest Lebon ne néglige pas de nous faire connaître la genèse des
« plus belles découvertes de Gabriel Lippmann, il nous donne une longue

« liste des travaux qu'il a inspirés et qui ont été accomplis dans son labo-
« ratoire de la Sorbonne.

« Nous n'hésitons pas à prédire à cette nouvelle Notice, le succès et la
« faveur qui ont accueilli les précédentes. »

Dr Hans Otti. — **Hauptfragen und Hauptmethoden der Kartenentwurfslehre** mit besonderer Rücksichtnahme auf die Abbildung der Schweiz. Beilage zum Jahresbericht der Aargauischen Kantonsschule. — 1 vol. de 50 p. et 7 tables, 3 fr. 60. Sauerländer & Cie, Aarau.

Bien qu'on ne manque pas d'ouvrages sur les projections cartographiques, le présent volume répond à un besoin. En effet, la plupart des traités sont trop développés pour une première introduction ou exigent de la part du lecteur beaucoup de connaissances mathématiques, ou encore, s'ils sont élémentaires, ne vont pas assez loin. Il n'y a que peu d'exposés qui abordent, avec des moyens élémentaires, mais d'une manière un peu complète. les principaux problèmes des cartes géographiques. Le présent volume fait partie de cette dernière catégorie. L'auteur est parvenu à examiner d'une manière élémentaire, sans le secours de l'analyse, les problèmes les plus importants de la théorie des cartes géographiques en choisissant les exemples types les plus fréquents. Le texte est accompagné de nombreuses figures établies par l'auteur. Nous ne saurions recommander d'ouvrage qui convienne mieux à une introduction à la construction des cartes géographiques que l'exposé si vivant et si clair de M. Otti. Nous le signalons aux professeurs de l'enseignement secondaire comme une mine très riche d'applications fort intéressantes de la Planimétrie, de la Trigonométrie, de la Géométrie descriptive et de la Géométrie analytique. C. Brandenberger (Zurich).

Jean Renard. — **La Pédagogie à l'Université.** Formation des professeurs d'Athénées et spécialement des professeurs de mathématiques. — 1 vol. in-8o, 102 p. ; Dessain, Liège.

Chacun sait que la préparation professionnelle du corps enseignant des écoles moyennes est fort négligée, sinon nulle, dans beaucoup de pays. Elle préoccupe à juste titre tous ceux qui s'intéressent aux progrès de l'enseignement. Pour ce qui concerne tout particulièrement les mathématiques, elle fera l'objet d'une étude approfondie de la Commission internationale de l'enseignement mathématique, qui l'inscrira à l'ordre du jour de l'un des prochains congrès.

Le présent ouvrage est une intéressante contribution à cette étude. Il prouve qu'en Belgique aussi il se dessine un mouvement de réforme, bien que les Universités belges possèdent déjà un cours de méthodologie mathématique, ce qui n'existe guère ailleurs. Mais l'auteur estime que cela ne suffit pas, et il montre que le manque de préparation présente de sérieux inconvénients quant aux méthodes actuellement employées. M. Renard, qui est bien au courant des tendances actuelles, indique dans quelle mesure on pourrait développer la formation didactique et met en évidence les points essentiels que devrait comporter la préparation professionnelle.

G. Scheffers. — **Lehrbuch der Mathematik**. Deuxième édition. — 1 vol. de VIII - 732 p. et 413 fig. 18 M.; Veit & Comp.. Leipzig, 1911.

Ce traité de Mathématiques, dont la deuxième édition suffit à prouver le succès, est écrit pour l'étudiant qui désire s'initier de lui-même aux éléments

mathématiques nécessaires à l'étude des sciences techniques et expérimentales. C'est ce qu'en français on appellerait un Traité de Mathématiques générales. *L'Enseignement mathématique* a déjà montré tout l'intérêt qu'il portait aux tentatives de ce genre tant par les analyses détaillées des traités dus à MM. Appell, Vogt, Fabry, Bouasse, etc., que par la publication toute récente (1911, p. 481) des travaux du Congrès de Milan où toute la troisième séance a été consacrée au sujet en question.

Ce qui distingue le nouvel ouvrage, ce n'est pas le souci d'être général ou complet. Bien des choses importantes, les équations différentielles par exemple, n'y figurent pas. C'est au contraire le souci de ne prendre que des sujets simples, faciles à limiter, et de les développer avec un luxe d'explications et d'exemples qui est tellement grand qu'on peut se demander s'il n'est pas exagéré. Cependant je ne le critiquerai pas davantage car on n'est pas tenu de tout lire d'une manière continue. Chacun prendra les exemples lui plaisant le mieux et c'est sans doute ce choix possible qui a fait et qui fera encore le succès d'un livre qui peut s'adresser ainsi aux esprits les plus divers.

Ainsi, avant de tracer des courbes, l'auteur passe en revue tous les procédés graphiques imaginés par les statisticiens, les populations des différents pays étant, par exemple, aussi bien représentées par des aires de carrés que par des segments.

Pour la dérivée et pour l'intégrale il insiste longuement sur les polynômes, fonctions aussi faciles à intégrer qu'à dériver, toujours avec l'appui d'élégants tracés.

La fonction logarithmique est présentée comme une aire attachée à l'hyperbole équilatère. Les applications sont intéressantes, telles la loi de Fechner, d'après laquelle la sensation est le logarithme de l'excitation.

Pour la fonction exponentielle l'intérêt est plus grand encore. C'est la fonction dont la variation est proportionnelle à la fonction même. Elle donne la loi d'accroissement des sociétés vivantes, sociétés de cellules ou sociétés d'êtres supérieurs. Elle représente le refroidissement d'un corps dans un milieu qui ne s'échauffe pas, la décharge d'un conducteur dans une grande capacité, etc., etc.

La théorie des dérivées d'ordre supérieur au premier est interprétée élégamment dans les questions de courbure. La possibilité de dériver une fonction conduit à la série de Taylor, la possibilité de l'intégrer à la série de Fourier.

Dans ses grandes lignes l'ouvrage ne fait appel qu'à un très petit nombre de notions et avec cela l'auteur a eu le talent de traiter d'innombrables problèmes qui semblent appartenir à toutes les branches de la science. En résumé, les succès obtenus et à obtenir encore sont, à coup sûr, bien mérités.

A. Buhl (Toulouse).

Dr Toulouse. — **Henri Poincaré.** — 1 vol. in-12, 204 p. ; 3 fr. 50; Flammarion, Paris.

Les personnes auxquelles les recherches psychologiques sont peu familières trouveront peut-être un peu bizarres les séries de recherches exposées dans ce livre, et qui ont porté sur les fonctions mentales de M. Poincaré. Le Dr Toulouse a soumis celui-ci à diverses épreuves ou tests, ayant pour but de chercher à se rendre compte des caractères de sa mémoire, de

son attention, de son association des idées, de son langage, etc. A vrai dire, ces expériences sont bien rapides, bien superficielles, et en trop petit nombre. On ne saurait cependant en faire un reproche à l'auteur. Ces expériences prennent du temps, sont souvent fort ennuyeuses pour celui qui les subit, et pour des raisons faciles à comprendre, il n'était guère possible d'exiger que M. Poincaré y consacrât plus de séances. Si maigres en soient les résultats, ceux-ci sont susceptibles de prendre de l'intérêt si on les rapproche de résultats obtenus chez d'autres personnalités marquantes, et en tout cas, comme le fait remarquer l'auteur avec une juste modestie, l'observation de M. Poincaré, « si elle ne permet pas de résoudre les problèmes, elle les montre ». — Le Dr Toulouse a d'ailleurs interprété avec ingéniosité les résultats de son enquête, et, en les comparant à ceux que lui avait fournis Zola, avec des tests identiques, est parvenu à esquisser entre ces deux hommes de génie, une opposition curieuse. Chez Zola, l'activité intellectuelle était surtout volontaire, s'acharnant sur les difficultés, triomphant de l'ennui ; son intelligence était consciente, logique, méthodique, paraissant faite pour la déduction mathématique : cependant, elle enfanta tout un monde romanesque. Au contraire l'activité mentale de M. Poincaré est spontanée, peu consciente, plus proche du rêve que de la démarche rationnelle, et semblait surtout apte aux œuvres de pure imagination : elle triompha dans la recherche mathématique ! Surprise intéressante, qui nous montre que nous avons encore bien à faire avant de pouvoir établir les lois des types intellectuels et des variétés de génie ! Ed. Claparède (Genève).

P. Treutlein. — **Der geometrische Anschauungsunterricht** als Unterstufe eines zweistufigen geometrischen Unterrichtes an unseren höheren Schulen. Mit einem Einführungsvorwort von F. Klein und mit 38 Tafeln und 87 Abbildungen. — 1 vol. in-8°, 216 p. ; 5 Mk. ; B.-G. Teubner, Leipzig.

Dans cet ouvrage, qui est le fruit d'une expérience de plus de quarante ans dans l'enseignement moyen, M. Treutlein examine d'une manière très approfondie le rôle de l'intuition dans l'étude de la Géométrie. Il estime que cette étude doit comprendre deux cycles, le premier étant surtout intuitif et expérimental. Cette répartition en deux cycles est adoptée dans beaucoup de pays, notamment en Autriche, où elle est maintenue au programme depuis plus de 60 ans, malgré de nombreux remaniements des plans d'études.

Après avoir retracé le développement historique de l'enseignement intuitif de la Géométrie, depuis les Grecs à nos jours, l'auteur montre comment on peut organiser cet enseignement d'une manière méthodique et rationnelle. Les nombreuses remarques personnelles de l'auteur témoignent d'une grande pratique de l'enseignement et d'un véritable don de professeur. Aussi sommes-nous certains que son ouvrage sera lu avec profit par tous ceux qui enseignent dans les classes inférieures des écoles moyennes.

Maximilien Winter. — **La Méthode dans la philosophie des Mathématiques.** — 1 vol. in-16 de 200 p. ; 2 fr. 50 ; Alcan, Paris.

Ce profond ouvrage sera lu avec intérêt non seulement par les philosophes, mais par les mathématiciens, car si les discussions philosophiques qu'il renferme sont remarquables par leur ampleur et leur élévation, elles font toujours appel à une étude précise et même technique des problèmes ;

elles mettent ainsi en pleine lumière l'unité et l'originalité propres de la pensée mathématique.

La question capitale que se pose M. Winter est la suivante : « Quelle est la méthode qui, à l'heure actuelle, présente des garanties scientifiques suffisantes pour aborder l'examen critique des principes fondamentaux de la science mathématique ? »

La *méthode métaphysique* paraît s'imposer au premier abord, car elle s'efforce, semble-t-il, de chercher « une infrastructure philosophique au-dessous des notions scientifiques ». Mais cette recherche est vaine, car les principes qu'elle découvre restent, sous leur apparente précision, aussi vagues et confus que les notions de la conscience vulgaire. Le kantisme et le néo-kantisme, par exemple, sont les systèmes philosophiques dont les méthodes se rapprochent le plus de la vraie critique scientifique. Cependant les conceptions kantiennes de l'espace et du temps sont restées sans influence sur la critique scientifique des postulats de la géométrie et de la physique contemporaines.

Critiquer les concepts mathématiques au moyen de la *logistique* est également une erreur ; car, ou bien la logistique est considérée, à tort il est vrai, comme une métaphysique et par conséquent elle est dénuée d'utilité scientifique ; ou bien elle est elle-même une science qui a sa fonction propre (déterminer et classer les éléments grammatico-logiques) ; mais dans ce cas elle n'est d'aucun secours pour résoudre des problèmes proprement mathématiques comme la généralisation du nombre ou la notion de fonction.

La seule méthode vraiment féconde est celle qu'a suivie Mach dans ses études sur la Mécanique et que M. Winter appelle la *méthode historico-critique*. Cette méthode, M. Winter l'applique à deux théories qui ont en mathématiques un caractère fondamental : la théorie des nombres et l'algèbre supérieure.

La définition des nombres a de tout temps préoccupé les philosophes ; mais sur cette difficile question les travaux arithmétiques des Lagrange, Gauss, Jacobi, Kummer, Dirichlet, Hermite éclaireront « mieux que des dissertations scolastiques sur l'un et le multiple, le continu et le discontinu, celui qui cherche à connaître la nature des nombres » (p. 105). Ces divers travaux, M. Winter les analyse avec la compétence d'un spécialiste et fait ressortir l'unité de pensée qui les anime. La conception d'Hermite en particulier par le rôle qu'elle attribue aux variables continues « présente, au point de vue philosophique, un intérêt capital puisqu'elle montre que, contrairement à certaines théories métaphysiques, la continuité peut jouer dans le domaine des nombres que des philosophes considèrent comme le domaine exclusif du discontinu, un rôle important. » (p. 132.)

Quant à l'algèbre, la théorie des équations y occupe une position centrale. Comment, de méthodes particulières et quasi-empiriques, cette théorie s'est-elle peu à peu élevée jusqu'à la conception générale des groupes de substitutions. C'est l'histoire de ce problème que M. Winter expose avec une remarquable netteté depuis Tartaglia jusqu'à nos jours.

Arnold Reymond (Lausanne).

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. Publications périodiques :

Bibliotheca mathematica. Zeitsch. f. Geschichte der mathem. Wisseuschaften herausgegeben von G. Eneström. — 3. Folge, Teubner, Leipzig.

Band 11 ; Heft 2. — G. Loria : Sopra una relazione che passa fra due antiche soluzioni del problema di Delo. — H. Suter : Das Buch der Seltenheiten der Rechenkunst von Abu Kamil el-Misri. Uebersetzt und mit Kommentar versehen von H. Suter. — L. C. Karpinski : Hindu numerals in the Fihrist. — L. C. Karpinski : Robert of Chester's translation of the Algebra of Al-Khowarizmi. — F. Cajori : Fourier's improvement of the Newton-Raphson method of approximation anticipated by Mourraille. — L. Schlesinger : Ueber Jacobis Auffassung des realen Integrale als einer mehrdeutigen Funktion. — G. Valentin : Ueber den gegenwärtigen Stand der Vorarbeiten für die allgemeine mathematische Bibliographie.

Heft 3. — J.-L. Heiberg und E. Wiedemann : Eine arabische Schrift über die Parabel und parabolische Hohlspiegel. — L.-C. Karpinski : An italian algebra of the fifteenth century. — P. Staeckel : Ein Brief Eulers an d'Alembert. — G. Eneström : Wie soll die Herausgabe der Valentinschen mathematischen Bibliographie gesichert werden.

Heft 4. — G.-R. Kaye : Somes notes on Hindu mathematical methods. — F. Cajori : On Michel Rolle's book « Méthode pour résoudre les égalités » and the history of Rolle's theorem. — G.-A. Miller : Note on Willam R. Hamilton's place in the history of abstract group theory. — H. Wieleitner : Anton von Braunmühl. — G. Eneström : Kleine Bemerkungen zur letzen Auflage von Cantors « Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. — Rezensionen. — Neu erschienene Schriften. — Wissenschaftliche Chronik.

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences de Paris.

Année 1911 (suite). — 18 avril. — G. Bratu : Sur l'équation intégrale exponentielle. — M. Frechet : Sur la notion de différentielle. — M. d'Ocagne : Nomogramme pour la détermination des espaces parcourus en fonction du temps, pendant qu'un navire passe de la vitesse V_0 à la vitesse V_1. — H. Larose : Sur le problème du câble limité.

24 avril. — G. Tzitzeica : Sur certains réseaux conjugués. — F. Severi : Sur les intégrales simples de première espèce attachées à une surface algébrique. — H. Villat : Sur la détermination de certains mouvements discontinus des fluides.

1[er] mai. — J. Drach : Détermination des lignes de courbures de la surface des ondes de Fresnel. — L. Godeaux : Sur les congruences linéaires de

coniques. — J. Hadamard : Sur la solution fondamentale des équations aux dérivées partielles du type parabolique.

8 mai. — G. Remoundos : Sur le module minimum des fonctions entières. — Riquier : Sur l'existence d'intégrales satisfaisant à des conditions données le long d'un contour. — M. Plancherel : Sur l'application aux séries de Laplace du procédé de sommation de M. de la Vallée-Poussin. — P. Appell : Sur les liaisons exprimées par des relations non linéaires entre les vitesses. — C. Juel : Sur les surfaces cubiques simples. — H. Larose : Sur les développements trigonométriques à composantes non orthogonales. — L. Roy : De la viscosité dans le mouvement des fibres flexibles. — H. Vergne : Sur un développement des séries et son application au problème des ondes liquides par émersion.

15 mai. — A. Blondel : Sur les fonctions harmoniques déterminées par certaines conditions au contour. — A. Chatelet : Sur les corps abéliens du troisième degré.

22 mai.— L. Autonne : Sur certains groupes commutatifs et pseudo-nuls de quantités hypercomplexes. — L. Creux : Transformation du mouvement d'expansion en mouvement de rotation par la développante du cercle.

29 mai. — J. Drach : Détermination des lignes asymptotiques des surfaces générales du troisième degré. — L. Godeaux : Sur les congruences linéaires de coniques dotées de deux lignes singulières, ou d'un point principal et d'une ligne singulière. — G. Koenigs : La loi des courbures des profils superficiels conjugués. — Lémeray : Le principe de relativité et les forces qui s'exercent entre corps en mouvement. — H. Larose : Sur la propagation d'une discontinuité sur une ligne télégraphique avec perte uniforme.

6 juin. — E. Picard : Un théorème général sur les équations intégrales de troisième espèce. — M. Gevrey : Sur l'analycité de certaines équations aux dérivées partielles. — S. Lattès : Sur les formes réduites des transformations ponctuelles à deux variables. Application à une classe remarquable de série de Taylor.

12 juin. — M. Riescz : Une méthode de sommation équivalente à la méthode des moyennes arithmétiques. — J. Le Roux : Sur l'incurvation et la flexion dans les déformations finies.

19 juin. — C. Guichard : Sur certains systèmes triple-orthogonaux qui se déduisent de courbes plusieurs fois isotropes. — E. Vessiot : Sur la cinématique des milieux continus à n dimensions.— E. Delassus : Sur la réalisation matérielle des liaisons.— Louis Roy : Les discontinuités du premier ordre dans le mouvement des fils flexibles. — J. Hadamard : Mouvement permanent lent d'une sphère liquide et visqueuse dans un liquide visqueux.

26 juin. — L. Giuganino : Action de la translation terrestre sur les phénomènes lumineux.

3 juillet. — D. Montesano : Sur les congruences linéaires de coniques.— J. Clairin : Sur les transformations de Bäcklund de première espèce. — E. Delassus : Sur les intégrales linéaires des équations de Lagrange.

10 juillet. — Sylvanus-P. Thompson : Nouvelle méthode d'analyse harmonique par la sommation algébrique d'ordonnées déterminées.

17 juillet. — Ruben Malton.— Sur la construction des fonctions entières à croissance irrégulière. — A. Korn : Sur une classe importante de noyaux asymétriques dans la théorie des équations intégrales. — A. Pérot : Extension aux lignes géodésiques d'une propriété cinématique de la ligne droite.

31 juillet. — A. Korn : Sur une classe importante de noyaux asymétiques dans la théorie des équations intégrales. — R. Radeau : Les tables de la Lune, fondées sur la théorie de Delaunay.

14 août. — A. Denjoy : Sur l'Analysis situs du plan.

21 août. — F. Fekete : Sur quelques généralisations d'un théorème de Weierstrass.

28 août. — A. Denjoy : Sur l'analysis situs du plan. — A.-G. Webster : Sur un nouveau problème mixte de l'équation des télégraphistes. — J. Andrade : Sur un nouvel organe régulateur des chronomètres.

4 septembre. — H. Villat : Sur un problème mixte de la théorie des fonctions harmoniques dans une aire circulaire. — Merlin : Sur quelques théorèmes d'arithmétique et un énoncé qui les contient.

11 septembre. — E. Picard : Un complément sur un théorème relatif aux équations intégrales de troisième espèce. — A. Korn : Sur une classe importante de noyaux asymétriques dans la théorie des équations intégrales. — Th. Lalesco : Théorème sur les valeurs caractéristiques.

25 septembre. — P. Appell : Sur les fonctions θ de degrés supérieurs. — A. Demoulin : Sur les surfaces R et les surfaces Ω. — P. Duhem : Quelques indications sur son traité d'énergétique ou de Thermodynamique générale.

2 octobre. — É. Picard : Sur les solutions continues des équations intégrales de troisième espèce. — P. Appell : Sur les fonctions du quatrième degré. — D. Pompéiu : Sur les fonctions de variable complexe. — Et. Delassus : Sur les liaisons non linéaires.

9 octobre. — P. Levy : Sur une généralisation des théorèmes de MM. Picard, Landau et Schottky.

16 octobre. — A. Demoulin : Sur les surfaces R et les surfaces Ω. — E. Delassus : Sur les liaisons non linéaires et les mouvements étudiés par M. P. Appell. — Nicolau : Sur la variation dans le mouvement de la Lune.

23 octobre. — H. Villat : Sur certaines équations intégrales d'un type nouveau et sur quelques problèmes qui s'y rattachent. — E. Jouguet : La loi adiabatique dynamique dans le mouvement des fils.

30 octobre. — A. Demoulin : Sur les surfaces R. — E.-E. Levi : Sur les équations différentielles périodiques. — P. Dienes : Sur la sommabilité de la série de Taylor.

6 novembre. — C. Guichard : Sur une classe très étendue de systèmes triple- orthogonaux.

13 novembre. — A Demoulin : Sur les surfaces Ω. — L. Schlesinger : Sur un système différentiel à points critiques fixes. — G. Kowalewski : Sur une propriété des transformations de Volterra. — Jouguet : Sur l'accélération des ondes de choc dans les fils.

20 novembre. — P. Montel : Sur les fonctions analytiques qui admettent deux valeurs exceptionnelles dans un domaine. — G. Koenigs : Sur les surfaces qui au. cours d'un mouvement donné, sont continûment osculatrices à leur profil conjugué.

27 novembre. — E. Barre : Sur les surfaces minima engendrées par une hélice circulaire. — E. Cotton : Sur l'instabilité de l'équilibre. — Jouguet : Sur la vitesse et l'accélération des ondes de choc de seconde et de troisième espèce dans les fils. — A. Leaute : Sur certaines difficultés que présente l'emploi des développements exponentiel.

4 décembre. — Tzitzeica : Sur réseaux R. — M. Patron : Quelques propriétés des substitutions linéaires à coefficients ≥ 0 et leur application aux

problèmes de la production et des salaires. — L. LECORNU : Sur l'équilibrage des moteurs. — H. POINCARÉ : Sur la théorie des quanta. — L. ROY : De la viscosité dans le mouvement des membranes flexibles.

26 décembre. — G. LICK : Sur les notions de droites parallèles et de translation et la Géométrie différentielle non-euclidienne. — R. GARNIER : Sur les systèmes différentiels dont l'intégrale a ses points critiques fixes. — G. KOWALEWSKI : Sur une classe de transformations infinitésimales dans l'espace fonctionnel. — P. MONTEL : Sur l'indétermination d'une fonction uniforme dans le voisinage de ses points essentiels. — A. BLONDEL : Sur les valeurs singulières des noyaux non symétriques. — M. POTRON : Applications de quelques propriétés des substitutions linéaires à coefficients positifs. — ROSENBLATT : Sur les surfaces alg. admettant une série discontinue de transformations birationnelles. — E. BARRÉ : Sur les surfaces minima engendrées par des hélices circulaires.

2. Livres nouveaux :

Annuaire du Bureau des Longitudes pour 1912. Avec des notices scientifiques. — 1 vol. in-16, 750 p. ; 1 fr. 50 ; Gauthier-Villars, Paris.

W.-H. BESANT et A.-S. RAMSEY. — **A Treatise on Hydromechanics.** Part I. Hydrostatics. Seventh Edition. — 1 vol. in-8°, 275 p. ; G. Bell & Sons, Londres.

L.-F. BRAUDE. — **Ueber einige Verallgemeinerungen des Begriffes der Mannheimschen Kurve.** (Thèse, Heidelberg.) — 1 fasc. in-8°, 50 p. ; W. Neumann, Pirmasens.

G. BUGGE. — **Chemie und Technik.** (*Bücher der Naturwissenschaft*, 11. Band.) — 1 vol. in-16, 190 p. ; relié 1 M. ; Philipp Reclam jun., Leipzig.

Catalog mathematischer Modelle für den höheren mathematischen Unterricht veröffentlich durch die Verlagshandlung von Martin Schilling, siebente Auflage. — 1 fasc. in-8°, XIV-72 p. ; M. Schilling, Leipzig.

J. I. Del CARRAL. — **Nuevos Metodos para Resolver Ecuaciones Numericas.** — 1 vol. in-8°, 303 p. ; Ad. Romo, Madrid.

P. CRANTZ. — **Arithmetik und Algebra zum Selbstunterricht.** II. Teil. (*Aus Natur und Geisteswelt*, N° 205.) — 1 vol. in-8°, 124 p. ; relié 1 M. 25 ; 2e édit. ; B. G. Teubner, Leipzig.

P.-H. EIJKMAN. — **L'Internationalisme scientifique** (Sciences pures et Lettres). — 1 vol. in-8°, 428 p. ; W.-P. Van Stockum & fils, La Haye.

A. v. FLOTOW. — **Einleitung in die Astronomie** (*Sammlung Schubert*). 1 vol. in-8°, 289 p. ; 7 M ; G.-J. Göschen, Leipzig.

F. G.-M. — **Exercices de Géométrie** comprenant l'exposé des méthodes géométriques et 2000 questions résolues. 5e édition. — 1 vol. in-8°, cartonné, 1298 p. ; J. de Gigord, Paris.

Z.-G. de GALDEANO. — **Algunos conceptos fundamentales en un curso de Analisis Matemático y de las Funciones.** — 1 fasc. in-8°, XII-76 p. ; 2,50 pesetas ; Tipografia de Casanal, Coso, 98, Zaragoza.

N. ISVOLSKY. — **Traité de Geométrie,** I Géométrie plane ; II Geométrie dans l'espace (en russe). — 2 vol., 266 + 127 p. ; Moscou.

L. KIEPERT. — **Grundriss der Differential- und Integral-Rechnung.** I. Differential-Rechnung. Zwölfte vollständig umgearbeitete und vermehrte

Auflage des gleichnamigen Leitfadens von weil. Dr. Max Stegemann. — 1 vol. in-8°, XX-863 p.; 13 M. 50; Helwing, Hannover.

W. Lietzmann. — **Der Pythagoreische Lehrsatz.** (*Mathematische Bibliothek*, N° III.) — 1 vol. p. in-8°, 72 p.; M. 0,80; B. G. Teubner, Leipzig.

E. Löffler. — **Ziffern und Ziffernsysteme der Kulturvölker in alter und neuer Zeit.** (*Mathematische Bibliothek*, N° I.) — 1 vol. p. in-8°, IV-93 p.; M. 0,80; B. G. Teubner, Leipzig.

G. Loria. — **Poliedri, Curve e Superficie secondo i metodi della Geometrica Descrittiva.** — 1 vol. in-16, 235 p.; 3 lire; U. Hœpli, Milano.

W.-F. Meyer. — **Ueber die Theorie benachbarter Geraden und einen verallgemeinerten Krümmungsbegriff.** Eine Ergänzung zu den Lehrbüchern über Differentialgeometrie. — 1 vol. gr. in-8°, XVIII-152 p.; 8 M.; B. G. Teubner, Leipzig.

W. Nernst. — **Traité de Chimie générale.** II, traduit par A. Corvisy. — 1 vol. in-8°, 420 p.; 10 fr.; A. Hermann & fils, Paris.

G. Noodt. — **Mathematische Experimentiermappe** für den geometrischen Anfangsunterricht, mit einem Leitfaden (44 p. in-8°); 4 M.; B. G. Teubner, Leipzig.

H. Renfer. — **Lehrbuch der politischen Arithmetik.** — 1 vol. gr. in-8°, VIII-190 p.; 5 fr.; Fehr'sche Buchhandlung, St-Gall.

G. Schilling und H. Meldau. — **Der mathematische Unterricht an den deutschen Navigationsschulen.** (*Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland*, Band IV, Heft 4). — 1 fasc. gr. in-8°, VI-82 p.; 2 M.; B. G. Teubner, Leipzig.

H. Schubert. — **Niedere Analysis**, II: Funktionen, Reihen, Gleichungen. 2te Auflage (*Sammlung Schubert*). — 1 vol. in-8°, 215 p.; 3 M. 80; G.-J. Göschen, Leipzig.

D.-E. Smith et L.-C. Karpinski. — **The Hindu-Arabic Numerals.** — 1 vol. p. in-8°, 160 p.; Ginn & C°, Boston et Londres.

D.-E. Smith. — **The Teaching of Geometry.** — 1 vol. in-8°, 339 p.; Ginn & C°, Boston et Londres.

A. Suini. — 1. **La Confutazione della Geometria Non-Euclidea e la Teoria naturale delle Parallele.** — 2. **Delle Definizioni di Retta e di Piano** quali vere Basi della Geometria. (Complément au mémoire ci-dessus.) — 2 fasc. in-8°, 27 et 18 p.; 1 fr.; V. Porta, Piacenza.

R. Suppantschitsch. — **Lehrbuch der Geometrie**: Trigonometrie und Analytische Geometrie, für die VI. bis VIII. Klasse der Gymnasien u. Realgymnasien. Mit 176 Fig. im Text u. 795 Fragen u. Aufgaben. — 1 vol. in-8°, 294 p.; 4 K. 40 H.; F. Tempski, Wien.

J. Tannery, — **Science et Philosophie.** Avec une notice de E. Borel. — 1 vol. in-16, XVI-336 p.; 3 fr. 50; F. Alcan, Paris.

H.-E. Timerding. — **Die Infinitesimalrechnung auf der Schule.** — 1 fasc. in-8°, 26 p.; M. 0,80; B. G. Teubner, Leipzig.

H. Wieleitner. — **Geschichte der Mathematik.** II. Teil von Cartesius bis zur Wende des 18. Jahrhunderts. I. Hälfte. — 1 vol. in-8°, 251 p.; 6 M. 50; G.-J. Göschen, Leipzig.

H. Wieleitner. — **Der Begriff der Zahl.** (*Mathematische Bibliothek*, N° II.) — 1 vol. p. in-8°, 66 p.; M. 0,80; B. G. Teubner, Leipzig.

LA THÉORIE DES ÉQUATIONS INTÉGRALES[1]

Née il y a à peine dix ans, la théorie des équations intégrales a attiré d'emblée l'attention des mathématiciens tant par son attrait propre que par l'importance de ses applications. Plusieurs des résultats de cette théorie sont déjà classiques et nul doute que dans quelques années les cours d'Analyse ne leur consacrent un chapitre. Aussi désirerais-je vous montrer quelques-uns des principaux points de cette théorie en reliant ses résultats à des faits algébriques connus. Mais, envisagé ainsi, mon sujet est trop vaste ; je ne pourrai parler ni des équations intégrales de 1re espèce

$$\int_a^b K(s, t)\varphi(t)\,dt = f(s)$$

ni de celles de 3me espèce

$$k(s)\varphi(s) + \int_a^b K(s, t)\varphi(t)\,dt = f(s)$$

caractérisées par le fait que la fonction $k(s)$ change de signe dans l'intervalle (a, b). Je ne pourrai non plus rien dire des applications de la théorie aux équations différentielles et aux équations aux dérivées partielles. A part quelques travaux que je citerai, je me permettrai de renvoyer pour la bibliographie complète au rapport que publie actuellement M. Hahn[2].

1. Aperçu sur les travaux de Fredholm, Hilbert, Schmidt.

Dans des travaux classiques, C. Neumann a montré que la solution du problème intérieur de Dirichlet pour un domaine convexe

[1] Conférence donnée à la Réunion de la Société mathématique suisse, à Berne, le 10 décembre 1911, par M. Michel Plancherel, professeur à l'Université de Fribourg.

[2] H. Hahn, *Bericht über die Theorie der linearen Integralgleichungen*. B.G. Teubner, Leipzig. 1911. La première partie seule a paru jusqu'à présent comme « Sonderabdruck aus dem 20. Bande des Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung ».

peut s'exprimer comme potentiel d'une double couche portée par la frontière de ce domaine, potentiel que sa méthode de la moyenne arithmétique permet de calculer. Plus tard, H. POINCARÉ, levant la restriction de la convexité du domaine, montra toute l'importance de la méthode de Neumann ; puis, généralisant le problème, il posa la question de la détermination d'un potentiel de double couche par la condition que les valeurs de ce potentiel sur les deux côtés de la frontière vérifient une relation linéaire donnée. La densité de la double couche satisfait alors à une équation fonctionnelle facile à obtenir ; cette remarque, faite déjà par Neumann, fut le point de départ des recherches célèbres dans lesquelles FREDHOLM aborde et résout toute une classe d'équations fonctionnelles du type de l'équation rencontrée dans le problème de Neumann. Ces équations fonctionnelles, appelées aujourd'hui *équations de Fredholm* ou *équations intégrales linéaires de seconde espèce*, sont dans le cas le plus simple (le cas des fonctions de plusieurs variables n'apporte rien d'essentiellement nouveau à la théorie et se traite par les mêmes méthodes) de la forme

$$\varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)\varphi(t)\,dt = f(s) . \qquad (1)$$

$f(s)$ et $K(s, t)$ y sont deux fonctions réelles données des variables réelles s, t ($a \leqq s, t \leqq b$), λ est un paramètre et $\varphi(s)$ la fonction inconnue qu'il faut déterminer de manière à satisfaire identiquement en s dans (a, b) la relation (1). $K(s, t)$ est appelé le *noyau* de l'équation intégrale et $f(s)$ porte souvent le nom de second membre de l'équation.

Pour résoudre l'équation (1), il vient naturellement à l'esprit d'essayer de représenter la solution (comme l'ont fait Liouville et C. Neumann à l'occasion de problèmes particuliers) par un développement

$$\varphi(s) = \varphi_0(s) + \lambda\varphi_1(s) + \lambda^2\varphi_2(s) + \dots + \lambda^n\varphi_n(s) + \dots \qquad (2)$$

On obtient alors les relations de récurrence

$$\varphi_0(s) = f(s) , \qquad \varphi_n(s) = \int_a^b K(s, t)\varphi_{n-1}(t)\,dt , \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

qui permettent de calculer de proche en proche les coefficients

de λ^n dans la série (2). Si nous introduisons les noyaux *itérés*

$$K_n(s, t) = \int_a^b K_{n-1}(s, r) K(r, t) dr, \qquad K_1(s, t) = K(s, t), \qquad (n = 2, 3, \ldots) \tag{3}$$

les relations de récurrence donnent

$$\varphi_n(s) = \int_a^b K_n(s, t) f(t) dt$$

et $\varphi(s)$ prend la forme

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(\lambda; s, t) f(t) dt \tag{4}$$

avec

$$K(\lambda; s, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K_{n+1}(s, t). \tag{5}$$

Sous la seule hypothèse que $K(s, t)$ et $f(s)$ sont des fonctions bornées intégrables, on démontre la convergence des séries (2) et (5) dans le voisinage de $\lambda = 0$ et, par le fait même, l'existence dans ce voisinage d'une et d'une seule solution *bornée* donnée par (4). $\varphi(s)$ et $K(\lambda; s, t)$ sont alors des fonctions holomorphes de λ dans le voisinage de $\lambda = 0$. Il se pose naturellement à leur sujet la question difficile : *Peut-on prolonger analytiquement* $K(\lambda; s, t)$, et si oui, *quel est le caractère de la fonction de λ ainsi définie ?* La réponse à cette question fait l'objet fondamental de la théorie des équations intégrales et c'est à Fredholm que nous la devons[1]. Par une induction hardie, Fredholm est amené à mettre la *résolvante* $K(\lambda; s, t)$ sous forme de quotient de deux fonctions entières de λ

$$K(\lambda; s, t) = \frac{D(\lambda; s, t)}{D(\lambda)} = \frac{K(s, t) + \lambda A_1(s, t) + \ldots + \lambda^n A_n(s, t) + \ldots}{1 + a_1\lambda + \ldots + a_n\lambda^n + \ldots}, \tag{6}$$

les quantités numériques a_n et les fonctions $A_n(s, t)$ ayant les

[1] J. Fredholm, *Sur une classe d'équations fonctionnelles* (Acta Mathematica, t. 27 (1903), pp. 365–390).

valeurs

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n!} \int_a^b \dots (n) \dots \int_a^b K\begin{pmatrix} \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n \\ \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n \end{pmatrix} d\sigma_1 d\sigma_2 \dots d\sigma_n ,$$

$$A_n(s, t) = \frac{(-1)^n}{n!} \int_a^b \dots (n) \dots \int_a^b K\begin{pmatrix} s, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n \\ t, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n \end{pmatrix} d\sigma_1 d\sigma_2 \dots d\sigma_n , \quad (7)$$

et $K\begin{pmatrix} s_1, s_2, \dots, s_n \\ t_1, t_2, \dots, t_n \end{pmatrix}$ étant une abréviation pour le déterminant

$$\begin{vmatrix} K(s_1, t_1), & K(s_1, t_2), & \dots, & K(s_1, t_n) \\ K(s_2, t_1), & K(s_2, t_2), & \dots, & K(s_2, t_n) \\ \dots & & & \\ K(s_n, t_1), & K(s_n, t_2), & \dots, & K(s_n, t_n) \end{vmatrix} .$$

Sous la seule hypothèse que le noyau $K(s, t)$ est une fonction bornée intégrable, il établit la convergence dans tout le plan de la variable complexe λ des séries $D(\lambda; s, t)$, $D(\lambda)$ et il vérifie directement que la fonction $\varphi(s)$ donnée par les relations (4) et (6) est solution (unique) de l'équation intégrale (1). La formule (6) répond à la question posée plus haut : elle montre que $K(\lambda; s, t)$ est une *fonction méromorphe de λ* et que ses pôles, nécessairement isolés et en nombre dénombrable, sont les zéros d'une transcendante entière $D(\lambda)$. On peut d'ailleurs vérifier en développant dans le voisinage de $\lambda = 0$ l'expression (6) en série entière que la série ainsi obtenue est identique à (5), donc, que (6) est le prolongement analytique de (5). C'est ce qu'a fait Kellog.

Lorsque λ_0 est un zéro de $D(\lambda)$, Fredholm montre ensuite que l'équation *homogène*

$$\varphi(s) - \lambda_0 \int_a^b K(s, t)\varphi(t)\,dt = 0$$

admet un nombre fini > 0 de solutions (non identiquement nulles) linéairement indépendantes. Il donne le moyen de calculer ces solutions par des séries analogues à $D(\lambda; s, t)$ et il indique ensuite à quelles conditions doit satisfaire $f(s)$ pour que l'équation *inhomogène* (1) soit résoluble pour la valeur $\lambda = \lambda_0$.

La théorie générale des équations intégrales se trouve ainsi complètement édifiée dans le mémoire de Fredholm. Ce mémoire est d'une importance capitale. Mais Fredholm n'y indique pas l'intuition qui l'a guidé ni le procédé heuristique par lequel il arrive aux formules (6) et (7). Par cela même, sa méthode, malgré

toute son élégance, malgré la beauté des résultats obtenus par des démonstrations très simples, présente un caractère artificiel de vérification et laisse l'esprit non entièrement satisfait. Aussi, y a-t-il quelque intérêt à connaître la voie par laquelle HILBERT (reprenant rigoureusement le procédé heuristique suivi par Fredholm) établit les formules de Fredholm. Esquissons-la rapidement. Elle revient à remplacer, conformément à la définition de l'intégrale définie comme limite d'une somme, $\int_a^b K(s, t)\varphi(t)\,dt$ par sa valeur approchée

$$\delta \sum_{q=1}^{n} K(s, t_q)\varphi(t_q)$$

$$\left(a < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b , \qquad t_{q+1} - t_q = \delta = \frac{b-a}{n}\right)$$

et à résoudre d'abord, au lieu de (1), le problème voisin

$$\varphi_n(s) - \lambda\delta \sum_{q=1}^{n} K(s, t_q)\varphi_n(t_q) = f(s) \tag{8}$$

par rapport à la fonction inconnue $\varphi_n(s)$. Il est à prévoir, et Hilbert le démontre en toute rigueur, que $\lim\limits_{n=\infty} \varphi_n(s)$ existe et fournit la solution cherchée $\varphi(s)$ de (1). Calculons donc $\varphi_n(s)$; faisons, pour cela, s successivement égal à $t_1, t_2, \dots, t_n$ dans (8). Si nous notons

$$\varphi_n(t_p) = x_p , \qquad \delta K(t_p, t_q) = k_{pq} , \qquad f(t_p) = f_p , \tag{9}$$

nous obtenons alors un système linéaire

$$x_p - \lambda \sum_{q=1}^{n} k_{pq} x_q = f_p , \qquad (p = 1, 2, \dots, n) \tag{10}$$

de n équations à n inconnues $x_1, x_2, \dots, x_n$. Le déterminant $D_n(\lambda)$ des coefficients des inconnues est un polynôme de degré n en λ

$$D_n(\lambda) = 1 - \lambda \sum_{p=1}^{n} \delta K(t_p, t_p) + \frac{\lambda^2}{2!} \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} \delta^2 \begin{vmatrix} K(t_p, t_p), & K(t_p, t_q) \\ K(t_q, t_p), & K(t_q, t_q) \end{vmatrix} - \dots$$

Le mineur $D_n(\lambda; t_p, t_q)$ de l'élément figurant à la $p^{\text{ième}}$ colonne et à la $q^{\text{ième}}$ ligne du déterminant $D_n(\lambda)$ est un polynôme de degré $n-1$

en λ ; il a pour expression, si $p \neq q$

$$D_n(\lambda ; t_p, t_q) = \delta\lambda \left[K(t_p, t_q) - \lambda \sum_{r=1}^{n} \delta \begin{vmatrix} K(t_p, t_q) & K(t_p, t_r) \\ K(t_r, t_q) & K(t_r, t_r) \end{vmatrix} + \ldots \right].$$

La solution x_p du système (10) est donnée par

$$x_p = \frac{1}{D_n(\lambda)} \sum_{q=1}^{n} f_q D_n(\lambda ; t_p, t_q)$$

et $\varphi_n(s)$ se calcule ensuite par

$$\varphi_n(s) = f(s) + \lambda\delta \sum_{p=1}^{n} K(s, t_p) x_p .$$

Au passage à la limite $n = \infty$, les sommes multiples qui figurent comme coefficients des puissances de λ tendent vers les intégrales multiples dont elles sont des valeurs approchées ; $D_n(\lambda)$ converge vers le *déterminant de Fredholm* $D(\lambda)$, $D_n(\lambda ; t_p, t_q)$ vers $D(\lambda ; s, t)$ lorsque t_p tend vers s et t_q vers t. On retrouve de cette manière les formules de Fredholm et tout revient à justifier ce passage à la limite pour rendre rigoureuse cette méthode. C'est ce que fait Hilbert dans la 1re partie de la 1re des 6 notes qu'il a consacrées à la théorie des équations intégrales [1].

Mais là n'est pas le résultat le plus important de cette première note ; Hilbert spécialise le noyau en le supposant symétrique. Par une transformation orthogonale effectuée sur la forme quadratique $\sum_{p,q} k_{pq} x_p x_q$ qui se présente alors, il la transforme en une somme $\sum_{p=1}^{n} \frac{y_p^2}{\lambda_p}$ et obtient en passant à la limite des résultats de la plus haute importance sur l'existence des racines de $D(\lambda) = 0$, sur les relations d'orthogonalité des solutions de l'équation intégrale homogène et sur le développement de fonctions arbitraires en séries procédant suivant les solutions de l'équation intégrale homogène. Nous reviendrons plus loin sur ces résultats.

C'est à une méthode de résolution entièrement différente qu'aboutit E. Schmidt dans sa thèse classique [2]. Guidé par les résultats obtenus par Hilbert dans le cas du noyau symétrique, il

[1] D. Hilbert, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen* [Nachrichten der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse, 1904, 1905, 1906, 1910].

[2] E. Schmidt, *Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen.* I Teil : Entwicklung willkurlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener [Mathematische Annalen, Bd. 63 (1907). pp. 433-476].

montre que la résolution de l'équation générale peut se ramener à celle de l'équation à noyau symétrique et il aborde directement l'étude de l'équation intégrale homogène à noyau symétrique. Il établit par des raisonnements directs et très simples tous les théorèmes de Fredholm et de Hilbert dont l'énoncé ne fait pas intervenir les séries de Fredholm; puis, par une méthode imitée de méthodes de Schwarz et de Græfe, il établit l'existence d'un paramètre singulier et montre que la résolvante du noyau symétrique est une fonction méromorphe à pôles simples. La résolution de l'équation intégrale inhomogène découle ensuite facilement de celle de l'équation homogène. Établissant la forme canonique du noyau symétrique, il retrouve et généralise (en les débarrassant d'une restriction inutile) les théorèmes de développement de Hilbert. La thèse de Schmidt présente des qualités de simplicité et d'élégance remarquables; les démonstrations y font transparaître immédiatement les analogies algébriques profondes de la théorie des équations intégrales.

Les nombreux travaux parus à la suite des travaux cités n'ont pas modifié les lignes générales de la théorie. Nous ne citerons en passant que ceux de Plemelj et de Goursat relatifs à l'étude de la résolvante de Fredholm dans le voisinage de ses pôles et ceux de J. Schur démontrant sans l'intermédiaire des formules de Fredholm plusieurs propriétés des équations intégrales à noyau asymétrique. Par contre, des points de vue tout nouveaux ont été apportés par Hilbert dans ses 4me et 5me notes[1] : sa méthode des formes quadratiques à une infinité de variables a permis d'aborder des cas qui échappent à la théorie de Fredholm.

2. Analogies algébriques de la théorie des équations intégrales.

Du fait que les formules de Fredholm s'obtiennent comme cas limite des formules de résolution d'un système de n équations linéaires à n inconnues, il est à prévoir que la théorie des équations intégrales présentera des analogies avec celle de ces systèmes. MM. Hilbert et Tœplitz ont, dans leurs études sur les formes bilinéaires à une infinité de variables, insisté sur le fait que la notion de déterminant, qui joue un si grand rôle dans l'exposition ordinaire de la théorie des équations algébriques linéaires, est difficilement extensible au cas d'une infinité d'équations à une infinité d'inconnues. Aussi, pour bien montrer ces analogies, allons-nous d'abord, avec M. Tœplitz, énoncer sous une forme qui diffère de la forme ordinairement suivie, les théorèmes relatifs à la résolution des systèmes d'équations linéaires.

[1] *Loc. cit.*

en séparant nettement des autres ceux de ces théorèmes qui, dans leur énoncé, n'impliquent pas la notion de déterminant.

Considérons, pour cela, les systèmes suivants de n équations à n inconnues

$$(\mathrm{I}a)\quad \begin{cases} (1+k_{11})x_1 + k_{12}x_2 + \dots + k_{1n}x_n = f_1 \\ k_{21}x_1 + (1+k_{22})x_2 + \dots + k_{2n}x_n = f_2 \\ \cdots\cdots \qquad \cdots\cdots \\ k_{n1}x_1 + k_{n2}x_2 + \dots + (1+k_{nn})x_n = f_n \end{cases}$$

$$(\mathrm{I}b)\quad \begin{cases} (1+k_{11})x_1 + k_{12}x_2 + \dots + k_{1n}x_n = 0 \\ k_{21}x_1 + (1+k_{22})x_2 + \dots + k_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots \qquad \cdots\cdots \\ k_{n1}x_1 + k_{n2}x_2 + \dots + (1+k_{nn})x_n = 0 \end{cases}$$

$$(\mathrm{II}a)\quad \begin{cases} (1+k_{11})y_1 + k_{21}y_2 + \dots + k_{n1}y_n = g_1 \\ k_{12}y_1 + (1+k_{22})y_2 + \dots + k_{n2}y_n = g_2 \\ \cdots\cdots \qquad \cdots\cdots \\ k_{1n}y_1 + k_{2n}y_2 + \dots + (1+k_{nn})y_n = g_n \end{cases}$$

$$(\mathrm{II}b)\quad \begin{cases} (1+k_{11})y_1 + k_{21}y_2 + \dots + k_{n1}y_n = 0 \\ k_{12}y_1 + (1+k_{22})y_2 + \dots + k_{n2}y_n = 0 \\ \cdots\cdots \qquad \cdots\cdots \\ k_{1n}y_1 + k_{2n}y_2 + \dots + (1+k_{nn})y_n = 0 \end{cases}$$

(Ia) et (IIa) sont des systèmes inhomogènes; les matrices des coefficients des inconnues y sont *transposées*. (Ib) et (IIb) sont les systèmes homogènes correspondants; ils admettent toujours les solutions triviales $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, $y_1 = y_2 = \dots = y_n = 0$. Nous conviendrons de ne pas compter de telles solutions comme solutions propres de ces systèmes. On a les théorèmes :

I. *Les systèmes homogènes transposés* (Ib) *et* (IIb) *ont le même nombre* $\mathrm{r}\,(0 \leqq \mathrm{r} < \mathrm{n})$ *de solutions linéairement indépendantes.*

II. *Lorsque* $\mathrm{r} = 0$, *les systèmes inhomogènes transposés* (Ia) *et* (IIa) *ont chacun une solution unique et bien déterminée pour tout système de valeurs des seconds membres* $\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \dots \mathrm{f}_n$; $\mathrm{g}_1, \mathrm{g}_2, \dots \mathrm{g}_n$.

III. *Lorsque* $\mathrm{r} > 0$, *les systèmes* (Ia) *et* (IIa) *n'ont en général pas de solutions.* Notons par

$$\begin{array}{c|c} \alpha_1^{(1)},\ \alpha_2^{(1)},\ \dots,\ \alpha_n^{(1)} & \beta_1^{(1)},\ \beta_2^{(1)},\ \dots,\ \beta_n^{(1)} \\ \alpha_1^{(2)},\ \alpha_2^{(2)},\ \dots,\ \alpha_n^{(2)} & \beta_1^{(2)},\ \beta_2^{(2)},\ \dots,\ \beta_n^{(2)} \\ \cdots\cdots \quad \cdots\cdots & \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \\ \alpha_1^{(r)},\ \alpha_2^{(r)},\ \dots,\ \alpha_n^{(r)} & \beta_1^{(r)},\ \beta_2^{(r)},\ \dots,\ \beta_n^{(r)} \end{array} \qquad (11)$$

deux systèmes complets de r solutions linéairement indépendantes de (Ib) et de (IIb). La solution générale de (Ib) est par suite

$$x_p = c_1\alpha_p^{(1)} + c_2\alpha_p^{(2)} + \dots + c_r\alpha_p^{(r)}, \qquad (p = 1, 2, \dots, n)$$

et celle de (IIb)

$$y_p = c_1\beta_p^{(1)} + c_2\beta_p^{(2)} + \dots + c_r\beta_p^{(r)}, \qquad (p = 1, 2, \dots, n)$$

$c_1, c_2, \dots, c_r$ étant r constantes arbitraires quelconques. Pour que (Ia) soit résoluble, *il faut et il suffit* que $[f] = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ vérifie les r relations

$$f_1\beta_1^{(s)} + f_2\beta_2^{(s)} + \dots + f_n\beta_n^{(s)} = 0, \qquad (s = 1, 2, \dots, r) \quad (12)$$

et de même pour que (IIa) soit résoluble, *il faut et il suffit* que $[g]$ vérifie les r relations

$$g_1\alpha_1^{(s)} + g_2\alpha_2^{(s)} + \dots + g_n\alpha_n^{(s)} = 0, \qquad (s = 1, 2, \dots, r) \quad (13)$$

Lorsque les relations (12) sont vérifiées, la solution générale de (Ia) est de la forme

$$x_p = X_p + c_1\alpha_p^{(1)} + c_2\alpha_p^{(2)} + \dots + c_r\alpha_p^{(r)}, \qquad (p = 1, 2, \dots, n)$$

(X_p étant une solution particulière quelconque du système et $c_1, c_2, \dots, c_r$ r constantes arbitraires. De même, si les relations (13) sont vérifiées, et si Y_p désigne une solution particulière quelconque de (IIa), la solution générale de ce système est

$$y_p = Y_p + c_1\beta_p^{(1)} + c_2\beta_p^{(2)} + \dots + c_r\beta_p^{(r)}, \qquad (p = 1, 2, \dots, n).$$

Remarquons qu'il résulte des théorèmes I et II *l'alternative* suivante : *Ou bien* les systèmes inhomogènes transposés (Ia), (IIa) sont toujours résolubles, quelque soient leurs seconds membres $[f]$, $[g]$, *ou bien* les systèmes homogènes transposés (Ib), (IIb) possèdent des solutions (en même nombre) non identiquement nulles.

Pour montrer les analogues de ces théorèmes dans la théorie des équations intégrales, considérons les équations

(Ia) $\varphi(s) + \int_a^b K(s, t)\varphi(t)\,dt = f(s)$	(Ib) $\varphi(s) + \int_a^b K(s, t)\varphi(t)\,dt = 0$
(IIa) $\psi(s) + \int_a^b K(t, s)\psi(t)\,dt = g(s)$	(IIb) $\psi(s) + \int_a^b K(t, s)\psi(t)\,dt = 0$

(Ia) et (IIa) sont des équations inhomogènes à noyaux transposés. (Ib) et (IIb) sont les équations homogènes correspondantes; elles admettent les solutions triviales $\varphi(s) \equiv 0$, $\psi(s) \equiv 0$ que nous conviendrons de ne pas compter comme solutions. Nous admettrons pour simplifier que $K(s, t)$, $f(s)$, $g(s)$ sont des fonctions continues et nous exigerons des solutions $\varphi(s)$, $\psi(s)$ qu'elles soient aussi continues dans (a, b). La théorie de Fredholm permet alors d'établir les théorèmes analogues.

I. *Les équations intégrales homogènes transposées* (Ib), (IIb), *ont le même nombre* r *de solutions linéairement indépendantes.* r *est fini.*

II. *Lorsque* r = 0, *les équations intégrales inhomogènes transposées* (Ia), (IIa) *ont chacune une solution unique et bien déterminée, pour toutes fonctions* f(s), g(s).

III. *Lorsque* r > 0, *les équations intégrales inhomogènes* (Ia), (IIa) *n'ont en général pas de solution.* Soient

$$\varphi_1(s)\,,\ \varphi_2(s)\,,\ \ldots,\ \varphi_r(s)\ ;\qquad \psi_1(s)\,,\ \psi_2(s)\,,\ \ldots,\ \psi_r(s)$$

deux systèmes complets de r solutions linéairement indépendantes de (Ib) et de (IIb). La solution générale de (Ib) est

$$\varphi(s) = c_1\varphi_1(s) + c_2\varphi_2(s) + \ldots + c_r\varphi_r(s)$$

et la solution générale de (IIb) est

$$\psi(s) = c_1\psi_1(s) + c_2\psi_2(s) + \ldots + c_r\psi_r(s)$$

$c_1, c_2, \ldots, c_r$ étant r constantes arbitraires. Pour que (Ia) soit résoluble, *il faut et il suffit* que $f(s)$ vérifie les r relations

$$\int_a^b f(s)\psi_1(s)\,ds = 0\ ,\quad \int_a^b f(s)\psi_2(s)\,ds = 0\ ,\ \ldots,\quad \int_a^b f(s)\psi_r(s)\,ds = 0 \qquad (14)$$

et de même, pour que (IIa) soit résoluble, *il faut et il suffit* que $g(s)$ vérifie les r relations

$$\int_a^b g(s)\varphi_1(s)\,ds = 0\ ,\quad \int_a^b g(s)\varphi_2(s)\,ds = 0\ ,\ \ldots,\quad \int_a^b g(s)\varphi_r(s)\,ds = 0\ .$$

Si les relations (14) sont vérifiées, la solution générale de (Ia) est

$$\varphi(s) = \Phi(s) + c_1\varphi_1(s) + c_2\varphi_2(s) + \ldots + c_r\varphi_r(s)\ ,$$

$\Phi(s)$ étant une solution particulière quelconque et $c_1, c_2, \ldots, c_r$ r constantes arbitraires. De même, si les relations (15) sont véri-

liées et si $\Psi(s)$ est une solution particulière quelconque de (IIa), la solution générale de cette équation est

$$\psi(s) = \Psi(s) + c_1\psi_1(s) + c_2\psi_2(s) + \ldots + c_r\psi_r(s) .$$

Il résulte donc encore des théorèmes I et II *l'alternative : Ou bien* les équations intégrales transposées inhomogènes (Ia) et (IIa) sont résolubles quelque soient leurs seconds membres $f(s)$, $g(s)$ *ou bien* les équations homogènes transposées (Ib) et (IIb) admettent des solutions non identiquement nulles. Cette alternative est d'une extrême importance pour les applications de la théorie des équations intégrales.

Les théorèmes indiqués plus haut sur les systèmes linéaires d'équations algébriques peuvent s'établir sans faire usage des déterminants. De même, leurs analogues de la théorie des équations intégrales, bien qu'obtenus pour la première fois par Fredholm par l'intermédiaire de ses séries, peuvent se démontrer directement. Mais, s'il s'agit, en algèbre, de trouver des critères pour déterminer dans quel cas de l'alternative on se trouve ou de calculer effectivement les solutions l'emploi des déterminants est nécessaire. Pour les introduire ici de manière à conserver une analogie encore plus étroite, nous aurons avantage à introduire un paramètre λ et à considérer non plus les systèmes (I) et (II) mais le système (10) que nous avons obtenu en exposant la méthode de Hilbert. Nous étudierons donc les systèmes transposés

$$\begin{array}{ll|ll} (\mathrm{I}'a) : & x_p - \lambda\sum_{q=1}^{n} k_{pq}x_q = f_p & (\mathrm{I}'b) : & x_p - \lambda\sum_{q=1}^{n} k_{pq}x_q = 0 \\ (\mathrm{II}'a) : & y_p - \lambda\sum_{q=1}^{n} k_{qp}y_q = g_p & (\mathrm{II}'b) : & y_p - \lambda\sum_{q=1}^{n} k_{qp}y_q = 0 \end{array} \qquad (p = 1, 2, \ldots, n)$$

La théorie des déterminants montre que pour que (I'a) soit résoluble quelque soit $[f]$, il faut et il suffit que le déterminant $D_n(\lambda)$ des coefficients des inconnues soit $\neq 0$ et que pour que le système (I'b) soit résoluble, il faut et il suffit que ce déterminant soit nul. Si nous remarquons que le déterminant du système (II') est encore égal à $D_n(\lambda)$ et que l'équation du $n^{\text{ième}}$ degré $D_n(\lambda) = 0$ a n racines $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ finies ou infinies, nous voyons que

1. pour $\lambda \neq \lambda_p$, (I'a) et (II'a) sont toujours résolubles, quelque soient $[f]$, $[g]$.

2. pour $\lambda = \lambda_p$, (I'b) et (II'b) sont résolubles.

3. Dans le dernier cas, les solutions s'obtiennent au moyen des mineurs de $D_n(\lambda)$ et r_p étant le rang du premier mineur de $D_n(\lambda)$

qui ne s'annule pas pour $\lambda = \lambda_p$, le nombre r_p des solutions de l'équation homogène est égal à $n - \nu_p$, pour $\lambda = \lambda_p$.

Les analogies avec les résultats de Fredholm sont immédiates. Nous prendrons, pour les voir, les systèmes suivants d'équations intégrales :

$(\mathrm{I}'a) : \varphi(s) - \lambda \int_a^b \mathrm{K}(s, t)\varphi(t)dt = f(s)$	$(\mathrm{I}'b) : \varphi(s) - \lambda \int_a^b \mathrm{K}(s, t)\varphi(t)dt = 0$
$(\mathrm{II}'a) : \psi(s) - \lambda \int_a^b \mathrm{K}(t, s)\psi(t)dt = g(s)$	$(\mathrm{II}'b) : \psi(s) - \lambda \int_a^b \mathrm{K}(t, s)\psi(t)dt = 0$

D'après Fredholm, l'alternative dépend d'une transcendante entière $\mathrm{D}(\lambda)$, donnée par (6), qui n'a donc que des zéros isolés appelés *paramètres singuliers* de l'équation intégrale. Alors

1. si $\mathrm{D}(\lambda) \neq 0$, $(\mathrm{I}'a)$ et $(\mathrm{II}'a)$ sont résolubles quelque soient $f(s)$, $g(s)$.
2. si $\mathrm{D}(\lambda) = 0$, $(\mathrm{I}'b)$ et $(\mathrm{II}'b)$ sont résolubles.
3. le nombre des solutions et leur calcul dans le cas 2) dépendent de séries entières qui sont les analogues des mineurs de $\mathrm{D}_n(\lambda)$.

Remarquons que $\mathrm{D}(\lambda)$ peut ne pas avoir de zéros; il est alors de la forme $\mathrm{D}(\lambda) = e^{h(\lambda)}$. Ce cas se présente en particulier pour un noyau $\mathrm{K}(s, t)$ tel que $\mathrm{K}(s, t) = 0$ pour $s \leqq t$. Dans ce cas l'équation intégrale (équation de Volterra) se réduit à

$$\varphi(s) - \lambda \int_a^s \mathrm{K}(s, t)\varphi(t)dt = f(s)$$

et il est facile de vérifier que les séries (2) et (5) relatives à ce noyau convergent pour toute valeur finie de λ. L'équation homogène correspondante n'a jamais de solution (bornée).

3. Les analogies dans le cas du noyau symétrique.

Lorsque le noyau $\mathrm{K}(s, t)$ est une fonction symétrique de s, t : $\mathrm{K}(s, t) = \mathrm{K}(t, s)$ les quantités $k_{pq} = \mathrm{K}(t_p, t_q)$ sont telles que $k_{pq} = k_{qp}$. Les systèmes transposés (I') et (II') sont identiques et il suffit dans ce cas d'étudier l'un d'eux, par exemple (I'). La substitution $\lambda = \frac{1}{\mu}$ ramène l'équation $\mathrm{D}_n(\lambda) = 0$ à une équation bien connue sous le nom d'équation séculaire. Pour $n = 2, 3$ une équation de cette forme se présente dans la recherche des axes principaux des coniques et des quadriques (équation en « s ») et

l'on démontre que ses racines sont réelles. Ce fait est général ; de la symétrie $k_{pq} = k_{qp}$ résulte que *l'équation* $D_n(\lambda) = 0$ *a toutes ses racines réelles.* De plus, alors que dans le cas général $D_n(\lambda) = 0$ peut avoir toutes ses racines infinies, il existe ici *au moins une racine finie.* Notant par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ les solutions de $D_n(\lambda) = 0$, chacune répétée un nombre de fois égal au nombre des solutions linéairement indépendantes de (1'b) pour cette valeur de λ, nous pourrons trouver n systèmes de valeurs

$$x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \ldots, x_n^{(p)} \qquad (p = 1, 2, \ldots, n)$$

tels que chacun d'eux soit solution de (1'b) pour la valeur correspondante $\lambda = \lambda_p$ et tels que

$$\sum_{r=1}^{n} x_r^{(p)} x_r^{(q)} = \delta_{pq} \qquad (p, q = 1, 2, \ldots, n) \tag{15}$$

où $\delta_{pq} = 0$, si $p \neq q$ et $\delta_{pp} = 1$. La substitution

$$y_p = \sum_{r=1}^{n} x_r^{(p)} x_r \qquad (p = 1, 2, \ldots, n) \tag{16}$$

est alors une substitution orthogonale, c'est-à-dire qu'elle laisse invariante la somme $\sum_{p=1}^{n} x_p^2$

$$y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 .$$

Cette substitution transforme la forme quadratique

$$\sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} k_{pq} x_p x_q = x_1^2 + 2x_1x_2 + \ldots$$

en une somme algébrique de carrés

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{\left[x_1^{(p)} x_1 + x_2^{(p)} x_2 + \ldots + x_n^{(p)} x_n\right]^2}{\lambda_p} = \sum_{p=1}^{n} \frac{y_p^2}{\lambda_p} . \tag{17}$$

Nous obtenons ainsi la forme canonique de la forme quadratique. Cette forme canonique est bien connue pour $n = 2, 3$, la transformation effectuée étant alors la transformation d'une conique ou d'une quadrique à ses axes principaux. Sachant résoudre l'équa-

tion homogène (I'b) on pourra facilement exprimer la solution de (I'a) en fonction des seconds membres et des quantités $x_p^{(r)}$. Nous n'insistons pas là-dessus.

Indiquons maintenant les analogies. Nous considérons pour cela les équations à noyau symétrique

$$(\mathrm{I}'a): \quad \varphi(s) - \lambda\int_a^b \mathrm{K}(s, t)\varphi(t)\,dt = f(s)\ ; \qquad (\mathrm{I}'b): \quad \varphi(s) - \lambda\int_a^b \mathrm{K}(s, t)\varphi(t)\,dt = 0$$

On peut démontrer que toutes les racines de $\mathrm{D}(\lambda) = 0$ sont *réelles.* En d'autres termes, l'équation homogène (I'b) n'admet de solutions que pour des valeurs réelles de λ. De plus $\mathrm{D}(\lambda) = 0$ possède au moins une racine réelle finie. Il existe donc *au moins une* valeur finie de λ, pour laquelle (I'b) est résoluble. Soient encore λ_1, λ_2, ... λ_n, ... les zéros de $\mathrm{D}(\lambda)$, chacun d'eux étant répété dans cette suite autant de fois que l'équation (I'b) a de solutions linéairement indépendantes pour cette valeur de λ; nous pourrons faire correspondre à chaque λ_p une fonction $\varphi_p(s)$ vérifiant la relation

$$\varphi_p(s) - \lambda_p\int_a^b \mathrm{K}(s, t)\varphi_p(t)\,dt = 0 \qquad (18)$$

et telle que

$$\int_a^b \varphi_p(s)\varphi_q(s)\,ds = \delta_{pq} . \qquad (p, q = 1, 2, 3, \ldots) . \qquad (19)$$

Ces relations, analogues des relations (15), expriment que les solutions de l'équation intégrale homogène (I'b) relatives à deux valeurs différentes λ_p, λ_q sont orthogonales et que le système complet des solutions

$$\varphi_1(s) , \ \varphi_2(s) , \ \ldots \quad \varphi_p(s) , \ \ldots$$

forme un système orthogonal normé de fonctions pour l'intervalle (a, b). L'analogue de la forme (17) est ici la formule

$$\int_a^b\int_a^b \mathrm{K}(s, t)\psi(s)\psi(t)\,ds\,dt = \sum_p \frac{\left[\int_a^b \psi(s)\varphi_p(s)\,ds\right]^2}{\lambda_p} \qquad (20)$$

où au second membre la sommation est étendue à toutes les valeurs du paramètre singulier λ_p. De cette relation découlent des

propriétés très importantes relatives à la forme canonique

$$K(s, t) = \sum_p \frac{\varphi_p(s)\varphi_p(t)}{\lambda_p} \tag{21}$$

du noyau et au développement d'une fonction arbitraire $f(s)$ en série de la forme

$$f(s) = f_1\varphi_1(s) + f_2\varphi_2(s) + \dots \qquad f_p = \int_a^b f(s)\varphi_p(s)\,ds \tag{22}$$

procédant suivant les solutions de l'équation (I'b) (autofonctions ou fonctions fondamentales). La relation (21) a lieu lorsque la série du second membre est convergente et E. Schmidt a montré qu'un développement (22) uniformément et absolument convergent est valable pour toute fonction $f(s)$ susceptible d'une représentation de la forme

$$f(s) = \int_a^b K(s, t)g(t)\,dt \ . \tag{23}$$

Remarquons, en terminant, que la solution de (I'a) s'exprime aisément au moyen des solutions $\varphi_p(s)$ de (I'b). On a, en effet,

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \sum_p \frac{f_p}{\lambda_p - \lambda}\varphi_p(s) \ . \qquad f_p = \int_a^b f(s)\varphi_p(s)\,ds \ .$$

4. Les équations intégrales singulières.

Nous venons de voir l'étroite analogie qui existe entre la théorie des systèmes d'équations algébriques linéaires et celle des équations intégrales linéaires de seconde espèce. Remarquons encore que la plupart des résultats de la théorie de Fredholm subsistent encore dans le cas où $K(s, t)$ présente des singularités infinies mais où l'un des noyaux itérés $K_n(s, t)$ est fini. De même, dans le cas du noyau symétrique, les principaux résultats sont encore vrais si $\int_a^b \int_a^b [K(s, t)]^2 ds\,dt$ est finie.

Dans ses 4me et 5me notes sur la théorie des équations intégrales, Hilbert a montré la raison profonde de cette analogie, il en a trouvé les limites et par le même coup il a enrichi d'une nouvelle méthode la théorie des équations intégrales. Cette méthode est d'autant plus importante qu'elle permet d'aborder la théorie des

équations intégrales à noyau singulier, c'est-à-dire à noyau présentant des singularités assez élevées pour échapper aux méthodes de Fredholm et de Schmidt. Nous ne pouvons ici que donner un rapide aperçu de ses fondements.

Un système de fonctions $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$, ... définies dans un intervalle (a, b), de carré intégrable dans cet intervalle, est *orthogonal* relativement à (a, b), si l'intégrale du produit de deux fonctions différentes du système est toujours nulle: $\int_a^b \varphi_p(s)\varphi_q(s)\,ds = 0$, $p \neq q$. Un tel système est toujours dénombrable. Nous le *normerons* par la condition $\int_a^b [\varphi_p(s)]^2 ds = 1$. On a donc

$$\int_a^b \varphi_p(s)\varphi_q(s)\,ds = \delta_{pq} .$$

Il sera dit *fermé*, si toutes les relations

$$\int_a^b h(s)\varphi_p(s)\,ds = 0 . \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots)$$

ne sont vérifiées simultanément que par la seule fonction $h(s) \equiv 0$. Les fonctions

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\cos s}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin s}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\cos 2s}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin 2s}{\sqrt{\pi}}, \ldots$$

forment, par exemple, un système orthogonal fermé et normé pour l'intervalle $(0,2\pi)$. $f(s)$ étant une fonction de carré intégrable dans (a, b), on peut former les constantes (coefficients de Fourier de $f(s)$ relativement au système $[\varphi_p(s)]$)

$$f_p = \int_a^b f(s)\varphi_p(s)\,ds , \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots)$$

et la suite (f_p) vérifie l'inégalité

$$\sum_p f_p^2 \leqq \int_a^b [f(s)]^2\,ds$$

inégalité dans laquelle le signe $=$ est à prendre lorsque le système $[\varphi_p(s)]$ est fermé. Dans ce dernier cas, on a plus générale-

ment,

$$\int_a^b f(s)g(s)ds = \sum_p f_p g_p \tag{24}$$

$f(s)$ et $g(s)$ étant deux fonctions quelconques de carré intégrable, f_p, g_p leurs coefficients de Fourier.

La somme des carrés des coefficients de Fourier d'une fonction de carré intégrable est donc convergente. Inversement, MM. F. Riesz et E. Fischer ont montré qu'étant donnée une suite quelconque de constantes réelles $f_1, f_2, \ldots$ telles que $\sum_p f_p^2$ converge, il existe au moins une fonction $f(s)$ de carré intégrable admettant ces constantes comme coefficients de Fourier relativement au système orthogonal normé $[\varphi_p(s)]$. En particulier, cette fonction $f(s)$ est unique à une fonction d'intégrale nulle près lorsque le système $[\varphi_p(s)]$ est fermé. Remarquons cependant que le théorème de Riesz-Fischer n'est vrai sans exception que lorsqu'on étend la notion d'intégrale comme l'a fait Lebesgue. Nous prendrons donc dans tout ce § les intégrales au sens de Lebesgue.

Prenons maintenant l'équation intégrale

$$\varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)\varphi(t)dt = f(s) \tag{25}$$

et supposons $f(s)$ de carré intégrable dans (a, b) et $K(s, t)$ symétrique tel que

$$\int_a^b \int_a^b K(s, t)g(s)g(t)ds\,dt$$

existe pour toute fonction $g(s)$ de carré intégrable. Soit $[\varphi_p(s)]$ un système orthogonal fermé et normé relativement à l'intervalle (a, b). Notons

$$x_p = \int_a^b \varphi(s)\varphi_p(s)ds \ , \qquad k_{pq} = \int_a^b \int_a^b K(s, t)\varphi_p(s)\varphi_q(t)ds\,dt = k_{qp} \ ,$$

$$f_p = \int_a^b f(s)\varphi_p(s)ds \ . \tag{26}$$

multiplions l'équation intégrale par $\varphi_p(s)$ et intégrons dans (a, b)

en nous servant de la formule de Riesz (24). Il vient

$$x_p - \lambda \sum_{q=1}^{\infty} k_{pq} x_q = f_p , \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots) \qquad (27)$$

C'est un système d'une infinité d'équations du 1er degré à une infinité d'inconnues $x_1, x_2, \ldots$. Si ce système admet une solution (x_p) de somme des carrés convergente, on pourra lui faire correspondre par le théorème de Riesz-Fischer une fonction $\varphi(s)$, de carré intégrable, que l'on démontrera être solution de l'équation intégrale. *Il y a donc équivalence entre la résolution de l'équation intégrale et celle d'un système d'équations linéaires à une infinité d'inconnues.* On est ainsi amené à l'étude de tels systèmes d'équations et à celle des formes quadratiques qui en dépendent. Cette étude a été faite par Hilbert. Tœplitz et Hellinger, dans leurs recherches ultérieures, ont apporté des contributions nouvelles à cette théorie, ils l'ont surtout simplifiée en réduisant à un minimum les questions de convergence qui se posent inévitablement dans une telle théorie, et en éclairant mieux la face algébrique du problème. L'hypothèse faite plus haut sur $K(s, t)$ revient à dire que la forme quadratique à une infinité de variables $\sum_{p,q} k_{pq} x_p x_q$ est *bornée*, c'est-à-dire telle que

$$\left| \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} k_{pq} x_p x_q \right| < M$$

pour tout système de valeurs

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leq 1 , \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) .$$

M étant une constante convenablement choisie. C'est à l'étude des formes bornées que se limite la théorie de Hilbert. Hilbert considère comme solutions (et cela est naturel, d'après le théorème de Riesz-Fischer) les seules solutions $x_1, x_2, \ldots$ à somme des carrés convergente. Sa théorie montre alors que l'analogie trouvée plus haut ne subsiste plus en général. Ainsi, il peut y avoir des valeurs de λ, pour lesquelles les équations homogènes correspondantes de (27) possèdent une infinité dénombrable de solutions. Les valeurs de λ où le système (27) n'est pas résoluble sont encore réelles et il en existe encore au moins une, mais elles peuvent ne pas être isolées et former un ensemble ayant la puissance du continu. Dans ces cas, *l'alternative n'existe plus :* il y a des valeurs de λ pour lesquelles ni les équations (27) ni les équations homogènes corres-

pondantes n'ont de solutions à somme des carrés convergente. Par suite, les valeurs nécessairement réelles de λ où l'équation intégrale (25) n'a pas de solution de carré intégrable peuvent donc, dans le cas général, ne pas être isolées et former un ensemble ayant la puissance du continu et *l'alternative n'existera plus :* il y aura des valeurs de λ où ni l'équation (25) ni l'équation homogène correspondante n'admettent de solutions de carré intégrable dans (a, b). Il se présente par contre des *faits nouveaux* sur lesquels je ne puis insister ici[1]. Je me bornerai pour finir, à signaler que la théorie des formes quadratiques à une infinité de variables permet de trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour que l'alternative ait encore lieu, qu'elle retrouve ainsi les résultats de Fredholm et de Schmidt sur les noyaux symétriques et que de plus elle permet d'aborder des équations intégrales inaccessibles aux méthodes de ces deux savants.

M. Plancherel (Fribourg).

LES RECTRICES. ÉTUDE DE GÉOMÉTRIE PHYSIQUE

Sommaire : 1. Les rectrices. — 2. Les rectrices et la surface de l'onde. — 3. Applications pratiques des rectrices. — 4. Les rectrices centrales des quadriques. — 5. La correspondance logarithmique entre quadriques et cônes recteurs. — 6. Les rectrices et la représentation des phénomènes. — 7. La dualité géométrique et les rectrices. — 8. La matière élastique et le complexe du second ordre. — Les lignes de rupture. — 10. La rectrice chimique. — 11. La loi cissoïdale atomique.

1. **Les Rectrices.** — Quand on examine une glace étamée recouverte d'une poussière légère, on observe que les grains de poussière paraissent s'aligner vers l'œil. L'effet est, dans une certaine mesure, d'autant plus apparent que la glace est plus épaisse. Si la glace, au lieu d'être plane, constitue une surface courbe, aux alignements rectilignes correspondent des courbes tracées sur la surface. Il est facile d'expliquer l'effet d'alignement par la réflexion de chaque grain de poussière.

On voit aisément que ces courbes sont en somme les trajectoires

---

[1] Cf. E. Hellinger, *Neue Begründung der Theorie quadratischer Formen von unendlich vielen Veränderlichen* (Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 136 (1909), pp. 210-271).

de points assujettis à rester sur la surface, tout en se dirigeant à chaque instant vers un point fixe. Le plan déterminé par celui-ci et la tangente en un point à la courbe est normal à la surface en ce dernier point. Toutes les courbes qui remplissent cette condition sont les orthogonales des sphériques déterminées dans la surface par des sphères dont le centre est au point fixe. Nous les désignerons, pour abréger, sous le nom de « rectrices ».

On montre que dans toute transformation vectorielle de la surface telle qu'à un rayon vecteur issu du point fixe, en corresponde un autre dans la même direction, dont la grandeur soit fonction seulement de celle du premier, la qualité de la rectrice se conserve. Les transformations : inverse, homothétique, conchoïdale etc..., ainsi que les combinaisons diverses de ces transformations conservent donc la rectrice.

Dans la transformation par polaires réciproques, aux sphériques correspondent les enveloppes des plans tangents situés à une même distance du point fixe. A une rectrice correspond l'enveloppe d'un plan tangent qui se rapproche du point fixe par la voie la plus courte à chaque instant. On voit ainsi que dans la théorie géométrique de Poinsot, du mouvement d'un solide autour d'un point fixe, la développable circonscrite à l'ellipsoïde le long de la polhodie n'est autre que la polaire réciproque d'une rectrice.

2. **Les rectrices de la surface de l'onde.** — Une autre transformation est intéressante à examiner. On considère les sections planes passant par un point fixe; de celui-ci on mène les normales à la courbe de section ; sur la perpendiculaire au plan de section par le point fixe, et à partir de celui-ci, on porte une longueur qui est fonction uniquement de la longueur d'une des normales. Le point ainsi déterminé décrit une certaine surface quand le plan de section varie. Le plan défini par ce point et la normale correspondante dans la section est normal à la surface ainsi décrite, au point considéré. Les surfaces apsidales se rattachent au cas général qui précède.

En particulier, en appliquant la transformation à un ellipsoïde par rapport à son centre, et portant des longueurs égales aux axes de la section, on sait que l'on obtient la surface de l'onde. On en déduit immédiatement que celle-ci a deux nappes, et que les cônes recteurs de l'une des nappes sont les cônes sphériques de l'autre. Cela se traduit, dans le phénomène de la réfraction des biaxes, par ce fait que sur une même direction les plans déterminés par celle-ci et par les vibrations propagées sont rectangulaires, propriété découverte par Hamilton.

Un cône recteur — ou sphérique — de la surface de l'onde est — on le verrait aisément — le cône complémentaire d'un cône sphérique de l'ellipsoïde générateur. On sait qu'un tel cône est du second ordre et appartient à la famille linéaire définie pour

les cônes — imaginaires — asymptotes de l'ellipsoïde et de la sphère. Les cônes recteurs de la surface de l'onde sont donc du second ordre et forment une famille linéaire tangentielle.

Les courbes isochromatiques sont, comme on le sait, les traces des cônes sphériques de la surface aux différences des rayons vecteurs des deux nappes de la surface de l'onde dans une même direction. Les courbes d'égale intensité, et non plus de même coloration, sont, l'expérience le montre, les orthogonales des précédentes ; ce sont des hyperboles équilatères passant par les traces des deux axes du milieu biréfringent. Ces courbes sont les traces des cônes recteurs de la surface différentielle lesquels constituent aussi une famille de cônes du second ordre. Nous n'insisterons pas sur la question au point de vue géométrique.

3. **Applications pratiques des rectrices.** — On rencontre les rectrices et les sphériques dans des questions d'ordre très différent. Ainsi en stéréotomie on les trouve dans l'appareillage d'un berceau oblique à tête circulaire. La projection sur le mur de tête des courbes de joint est la trajectoire orthogonale des rectrices planes parallèles au mur de tête, c'est-à-dire des sphériques du berceau ayant leur centre à l'infini dans la direction normale à ce mur. Les courbes de joint sont donc les rectrices du berceau dans cette direction.

En topographie les lignes de plus grande pente, qui correspondent aux hachures, et théoriquement en général au tracé des cours d'eau, sont des rectrices de la surface du sol, les sphériques étant les courbes de niveau, relatives à la direction de la verticale.

4. **Les rectrices centrales des quadriques.** — Parmi les cas les plus simples, on est conduit à considérer celui des rectrices centrales des quadriques. Ce sont les trajectoires orthogonales des sphériques, et l'on sait que les cônes sphériques sont ici du second ordre. L'équation des cônes recteurs est facile à obtenir. Soit :

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$$

l'équation d'une quadrique à centre. Soit $z = f(xy)$ l'équation cherchée du cône recteur. On aura :

$$Axz'_x + Byz'_y - Cz = 0$$

$$xz'_x + yz'_y - z = 0$$

la première de ces équations exprime que le cône est normal à la quadrique au point xyz, la deuxième exprime que $z = f(xy)$ représente bien un cône. On en déduit :

$$z'_x = \frac{C - B}{A - B} \cdot \frac{z}{x}, \qquad z'_y = \frac{A - C}{A - B} \cdot \frac{z}{y}$$

d'où

$$\frac{z'_x}{z} = \frac{C - B}{A - B} \cdot \frac{1}{x}$$

et, en intégrant :

$$Lz = \frac{C - B}{A - B} Lx + \varphi(y)$$

on aurait de même :

$$Lz = \frac{A - C}{A - B} Ly + \psi(x)$$

on en déduit :

$$x^{C-B} \cdot y^{A-C} \cdot z^{B-A} = k$$

ce qui représente bien un cône puisque :

$$(C - B) + (A - C) + (B - A) \equiv 0 .$$

Réciproquement si l'on donne une équation de la forme :

$$x^\alpha y^\beta z^\gamma = k$$

représentant un cône avec les conditions :

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

on posera :

$$\alpha = C - B , \qquad \beta = A - C , \qquad \gamma = B - A$$

d'où

$$B = C - \alpha , \qquad A = C + \beta$$

et l'équation de la quadrique est :

$$(C - \alpha)x^2 + (C + \beta)y^2 + Cz^2 = 1$$

ou encore :

$$C(x^2 + y^2 + z^2) - (\alpha x^2 - \beta y^2) = 1 ,$$

ce qui représente un faisceau de quadriques défini par l'intersection d'un cylindre avec une sphère. Dans ce faisceau il y a des cylindres :

1° $A = 0 , \quad \beta = -C , \quad \alpha = -\beta - B ;$

2° $B = 0 , \quad \alpha = C , \quad \beta = A - \alpha ;$

3° $C = 0 .$

On voit ainsi que les hyperboles équilatères de tout ordre, et en particulier les courbes dénommées adiabatiques en physique, de même que les paraboles de tout ordre sont les projections sur un plan parallèle à un plan principal, des rectrices centrales de quadriques.

5. **La correspondance logarithmique entre quadriques et cônes recteurs.** — Soient

$$(1)\qquad \begin{cases} Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1 \\ A'x^2 + B'y^2 + C'z^2 = 1 \end{cases}$$

les équations de deux quadriques à centres ayant les mêmes plans principaux. Leurs cônes recteurs ont pour équation :

$$(2)\qquad x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma} = k , \qquad x^{\alpha'} y^{\beta'} z^{\gamma'} = k' ,$$

avec

$$\alpha = C - B , \qquad \alpha' = C' - B' ,$$
$$\beta = A - C , \qquad \beta' = A' - C' ,$$
$$\gamma = B - A , \qquad \gamma' = B' - A' .$$

Ajoutons membre à membre les équations (1), il vient :

$$(3)\qquad (A + A')x^2 + (B + B')y^2 + (C + C')z^2 = 2 ,$$

ce qui représente une quadrique ayant les mêmes plans principaux que les deux premières, et passant par leur intersection.

D'autre part, multiplions membre à membre les équations (2), il vient :

$$(4)\qquad x^{\alpha+\alpha'} . y^{\beta+\beta'} . z^{\gamma+\gamma'} = kk' .$$

C'est l'équation d'un cône recteur de la quadrique (3). En effet, en posant

$$A + A' = \mathcal{A} ,$$
$$B + B' = \mathcal{B} ,$$
$$C + C' = \mathcal{C} ,$$

on aura

$$\alpha + \alpha' = \mathcal{C} - \mathcal{B} ,$$
$$\beta + \beta' = \mathcal{A} - \mathcal{C} ,$$
$$\gamma + \gamma' = \mathcal{B} - \mathcal{A} .$$

On généraliserait facilement, et l'on verrait que si l'on donne n quadriques ayant mêmes plans principaux :

$$\begin{cases} A_1x^2 + B_1y^2 + C_1z^2 = 1 , \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_nx^2 + B_ny^2 + C_nz^2 = 1 , \end{cases}$$

dont les cônes recteurs sont respectivement :

$$x^{\alpha_1} y^{\beta_1} z^{\gamma_1} = k_1$$

$$\dots\dots$$

$$x^{\alpha_n} y^{\beta_n} z^{\gamma_n} = k_n$$

la quadrique

$$x^2 \Sigma A + y^2 \Sigma B + z^2 \Sigma C = n$$

a pour cônes recteurs

$$x^{\Sigma\alpha} y^{\Sigma\beta} z^{\Sigma\gamma} = k'$$

c'est-à-dire.

$$\Pi(x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma}) = k' .$$

En résumé, on peut dire par abréviation que le produit des cônes recteurs est cône recteur de la somme des quadriques. On peut encore exprimer ceci en un langage symbolique en disant que la quadrique est le logarithme du recteur.

6. **Les rectrices et la représentation des phénomènes.** — Nous avons rencontré les rectrices dans un certain nombre de faits très divers. On a vu que les phénomènes représentés par des hyperboles équilatères ou des paraboles, se rattachent à la considération des rectrices. Tels sont par exemple : l'évolution isothermique ou adiabatique d'une masse gazeuse, la loi moyenne de variation de l'absorption cathodique et du rayonnement secondaire, etc....

D'autre part on constate aisément que le tracé même d'une rectrice obéit à la loi du moindre effort momentané, c'est-à-dire du maximum d'effet — soit du chemin parcouru vers le pôle — pour le minimum de travail — soit de résistance passive à vaincre.

Nous venons de mettre en évidence une autre propriété des rectrices, qu'il convient de rapprocher des considérations par lesquelles on est amené à exprimer que les causes peuvent être considérées comme les logarithmes des effets.

Admettons que, soit comme symbole, soit par la nature même, le tracé d'une rectrice représente un phénomène ou un fait.

Il est bien clair que la cause correspondra aux deux liaisons qui commandent le mobile : la surface et le point fixe. Quant à l'effet, il est évidemment représenté par la courbe tracée, ou si l'on veut, par le cône recteur. Et alors la relation géométrique que nous avons trouvée dans le cas d'une quadrique devient en quelque sorte la forme représentative concrète de l'aphorisme général rappelé ci-dessus.

Ce qui précède explique pourquoi la considération des rectrices est apte à intervenir dans la représentation des phénomènes, et

il ne sera pas toujours inutile d'y avoir recours. Il se dégage d'ailleurs de ce qui précède, ce fait que les phénomènes simples et fondamentaux correspondent en général au cas des rectrices de quadriques.

On ne doit pas être surpris du rôle ainsi joué par les quadriques à centre, et notamment par l'ellipsoïde. On trouve bien cette surface dans l'étude des phénomènes élastiques autour d'un point : on considère les ellipsoïdes des dilatations et d'élasticité. Cette dernière surface, par une transformation connue donne la surface de l'onde qu'on retrouve dans la théorie des biaxes.

7. **La dualité géométrique et les rectrices.** — La dualité, qui, par la considération des polaires réciproques fait correspondre un point à un plan et inversement, n'est pas seulement une conception abstraite ; elle n'est pas inapte à intervenir dans les sciences de la matière. Ainsi, à l'œil, organe assimilable à un point, et destiné à scruter la matière et notamment les surfaces qui définissent celle-ci, correspond un organe plan d'un usage différent, mais utile au même but, et destiné à compléter le précédent. Cet organe plan dont le rôle est dit tactile, est constitué par la main, et il est l'apanage des êtres supérieurs comme l'homme et les anthropoïdes. Eux seuls possèdent des organes du tact d'une étendue suffisante pour être considérés comme des plans, ou des assemblages de plans permettant un degré considérable dans la perfection du sens du toucher.

Transformons par polaires réciproques le représentatif rectoriel d'un phénomène à quadrique centrée au pôle. A la quadrique correspond une autre quadrique qui est apte à représenter une cause. Quant à l'effet, qui était représenté par un cône recteur, il sera représenté par la développable circonscrite à la quadrique et dont le cône asymptote est le cône complémentaire du précédent, c'est-à-dire en somme par le cône complémentaire lui-même. Il est d'ailleurs facile de montrer que ce cône complémentaire est aussi un cône recteur de la première quadrique.

En effet, soit $x_0 y_0 z_0$ un point du cône recteur

$$x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma} = k .$$

La normale par le sommet du cône au plan tangent suivant la génératrice du point $x_0 y_0 z_0$ a pour équations :

$$\frac{x_0 x}{\alpha} = \frac{y_0 y}{\beta} = \frac{z_0 z}{\gamma} = \mu$$

on en déduit :

$$\left(\frac{\alpha}{x}\right)^{\alpha} \cdot \left(\frac{\beta}{y}\right)^{\beta} \cdot \left(\frac{\gamma}{z}\right)^{\gamma} = \frac{k}{\mu^{\alpha+\beta+\gamma}}$$

comme $\alpha + \beta + \gamma = 0$, on a :

$$x^\alpha y^\beta z^\gamma = \frac{1}{k} \alpha^\alpha \beta^\beta \gamma^\gamma ,$$

ce qui représente bien un cône recteur de la première quadrique. La puissance de ce cône est :

$$k' = \frac{1}{k} \alpha^\alpha \beta^\beta \gamma^\gamma .$$

Soit x, y, z le point de la quadrique correspondant à $x_0 y_0 z_0$, on aura :

$$k = x_0^\alpha y_0^\beta z_0^\gamma$$

$$k' = x_1^\alpha y_1^\beta z_1^\gamma$$

d'où :

$$kk' = (x_0 x_1)^\alpha \cdot (y_0 y_1)^\beta \cdot (z_0 z_1)^\gamma = \alpha^\alpha \cdot \beta^\beta \cdot \gamma_\gamma .$$

Nous avons à peine besoin de faire remarquer que $x_0\ y_0\ z_0$, $x_1\ y_1\ z_1$, sont les sommets de la section centrale qu'ils déterminent dans la quadrique.

En résumé, on voit que l'effet, représenté par un cône recteur correspond dans la transformation par dualité à un autre cône recteur de la même quadrique.

Sans chercher à généraliser, nous ferons observer que la surface de l'onde a pour cônes recteurs des cônes du second ordre qui, par dualité, donnent d'autres cônes du second ordre. Aussi bien la surface de l'onde, par polaires réciproques, donne-t-elle une autre surface de l'onde.

8. **La matière élastique et le complexe du second ordre.** — On définit en résistance des matériaux une surface dite ellipsoïde inverse d'élasticité en chaque point d'un solide. Passant à la limite pour l'étude autour d'un même point, on peut considérer seulement le cône asymptote — imaginaire en l'espèce — de cette surface. Un solide apparaît donc comme une portion d'espace caractérisée en chaque point par un cône du second ordre. C'est précisément là la définition d'un complexe.

Considérons, dans un complexe, la séparation entre les points où le cône est réel et ceux où il est imaginaire. A cette conception correspond la limite — une surface en général — entre la matière réelle et la matière non réalisable. Comme cas particulier, envisageons le cas de la surface de l'onde. Le complexe des droites capables d'un dièdre rectangle circonscrit à un ellipsoïde donné possède en chaque point un cône du second ordre. La surface qui

sépare dans ce cas les deux régions définies ci-dessus est précisément une surface de l'onde.

En un point d'un ellipsoïde E passent deux autres quadriques qui lui sont homofocales : un hyperboloïde à deux nappes et une surface gauche du second ordre : H_2 et H_1. On sait que les axes du cône du complexe au point considéré sont les normales aux trois quadriques E, H_1, H_2. L'arête du cône dégénéré en deux plans en chaque point de la surface de l'onde est normale à celle-ci. Les deux autres axes du cône sont dans le plan tangent à celle-ci ; ils sont précisément tangents, l'un à la rectrice, l'autre à la sphérique en ce point.

On sait d'autre part que la surface de l'onde peut être définie comme le lieu de la quartique intersection des deux quadriques homofocales dont les paramètres sont égaux, mais de signe contraire, l'une des quadriques étant toujours un ellipsoïde E. Si à E on associe la surface gauche H_1 on obtient la nappe intérieure de la surface de l'onde. Avec l'hyperboloïde à deux nappes H_2 on obtient la nappe extérieure.

Les cônes ayant pour sommet le centre et pour directrices ces quartiques sont du second ordre. Ce sont précisément les cônes recteurs pour une nappe et sphériques pour l'autre.

Dans le cas d'un milieu isotrope, le cône est en tous les points constitué par une sphère-point. Dans le cas d'un uniaxe, l'ellipsoïde inverse des élasticités est de révolution. Le cône imaginaire est donc de révolution. Dans le cas d'un biaxe, le cône est à trois axes inégaux ; il a d'ailleurs même orientation et mêmes dimensions en tous les points. Les corps hétérogènes ont en chaque point un cône dont l'orientation et les dimensions varient avec les coordonnées du point.

9. **Les lignes de rupture.** — Admettons que les coefficients de l'équation du cône varient non seulement avec les coordonnées du sommet, mais dépendent en outre d'une quatrième variable, le temps par exemple. Le cône d'abord imaginaire pourra devenir réel, à ce moment la matière ne sera plus stable : elle tendra à se diviser suivant les génératrices d'un cône. Si l'on considère dans le solide, une surface, celle qui le limite, par exemple, elle va se fendiller suivant des directions régulières. Dans le cas d'une variation lente ce seront les directions des génératrices de contact du cône avec la surface elle-même en chaque point. Il y aura donc en chaque point une direction de rupture. Si au contraire la variation est très rapide, instantanée par exemple, pour arriver à un cône réel, en chaque point il y aura deux directions de rupture qui seront les intersections du cône avec le plan tangent à la surface.

Supposons maintenant qu'il s'agisse d'un milieu isotrope, et que la modification du cône du complexe résulte de l'action

exercée par un ébranlement émané d'un point fixe du solide. En chaque point, par symétrie, le cône primitivement isotrope va devenir un cône imaginaire, puis réel, mais toujours de révolution autour du recteur allant de l'origine au sommet. Quand, en un des points de la surface du solide le cône sera devenu tangent à celle-ci, la génératrice de contact sera la tangente à la rectrice en ce point. On en conclut que la rupture progressive de la surface aura lieu suivant les rectrices.

Si, au contraire, la rupture est instantanée, comme dans le cas d'une explosion, il y a deux directions de rupture en chaque point, avec la rectrice et la sphérique pour bissectrices.

Considérons un solide en forme de cône de révolution ; admettons que l'ébranlement provienne de son sommet et qu'il se transmette instantanément avec la même intensité à toute distance : les lignes de rupture seront les trajectoires homogonales des génératrices, ce sont des hélices coniques, courbes que l'on trouve dans l'étude du mouvement d'un corpuscule négatif dans un champ d'un seul pôle sud, et qui sont au surplus des géodésiques du cône.

Si, comme surface, on prend un plan passant par le centre d'ébranlement, on voit que les lignes de rupture feront des angles égaux avec les rayons recteurs, ce seront donc des spirales logarithmiques. Ce résultat est bien connu, et on le vérifie expérimentalement dans les sections transversales des bouches à feu.

La détermination des lignes de rupture instantanée donne lieu à une foule de problèmes de géométrie. Le cas d'une sphère est particulièrement intéressant en considérant une section telle que les cônes soient circulaires, égaux et parallèles entre eux (cas d'une extension). On voit que les lignes de rupture font en chaque point un angle constant avec une direction fixe. Ce sont les trajectoires que suivrait un navire dont l'axe ferait un angle constant avec la direction du pôle. On montre facilement que la projection de ces courbes sur le plan perpendiculaire à la direction des axes est une épicycloïde. On peut ainsi trouver sur une carte en projection équatoriale l'angle polaire à observer pour atteindre un point connu en partant d'un point donné.

L'épicycloïde a pour cercle générateur un cercle de rayon égal à $R(1 - \cos\theta)$, R étant le rayon de la sphère et θ le demi-angle au sommet du cône ; ce cercle roule sur un cercle dont le rayon est $R\cos\theta$. Toutes les courbes sont extérieures à ce dernier cercle.

Un autre cas intéressant est celui où les cônes ont des axes normaux à un diamètre fixe qu'ils rencontrent. On voit que dans ce cas, au contraire, toutes les courbes sont à l'intérieur du cercle de rayon $R\sin\theta$. En projection sur un plan parallèle aux axes, ces courbes sont des spirales dont on trouverait facilement l'équation différentielle. Elles sont, dans une certaine mesure, réalisées pratiquement à la surface des billes de billard qui sont tournées

sur l'axe même d'une défense en ivoire. On les aperçoit assez nettement. Leur présence est due à ce que l'ivoire est constitué par des couches cylindriques alternées, couches qui, à un moment donné tout au moins, ont eu des résistances différentes, et qui se sont moulées successivement les unes contre les autres. Le milieu n'est donc pas isotrope, et à un moment donné la résistance tangentielle étant de sens contraire à la résistance radiale le cône est devenu réel, des fissures se sont établies et colmatées.

10. **La rectrice chimique**. — On sait que le produit du poids atomique d'un corps par sa chaleur spécifique à l'état solide ou liquide est une quantité sensiblement constante et égale à 6,38, fait qui constitue la loi de Dulong et Petit. Cette loi est traduite par une hyperbole équilatère, qui est comme nous l'avons vu, la projection d'une rectrice de cylindre du second ordre.

Si les poids atomiques sont comptés suivant Ox, et les chaleurs spécifiques suivant Oy, l'équation du cylindre est :

$$y^2 + \frac{z^2}{2} = 1$$

et le plan $z = \sqrt{2}$ est coupé par les cônes recteurs suivant des hyperboles équilatères.

Considérons la rectrice correspondant à $xy = 6,38 = k$.

Soit α, β, $\gamma = \sqrt{2}$, un point de l'hyperbole. Joignons-le à l'origine. Le rayon vecteur de la rectrice est :

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

mais :

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\sqrt{2}}$$

d'où :

$$\rho^2 = \frac{z^2}{2}(\alpha^2 + \beta^2 + 2)$$

or on a :

$$y = \frac{\beta z}{\sqrt{2}}$$

et :

$$z^2 = \frac{2}{\beta^2 + 1}$$

par suite :

$$\rho^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 2}{\beta^2 + 1}$$

et comme $\alpha\beta = k$, on a en définitive :

$$\rho^2 = 1 + \alpha^2 \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha^2 + k^2} \tag{1}$$

avec $k = 6{,}38$, ou $k^2 = 40$.

L'équation représente une courbe en ϱ, α du 4me ordre, symétrique par rapport à chacun des axes de coordonnées. Nous la considérerons seulement dans l'angle $x\ o\ y$. Elle a pour asymptote la bissectrice des axes, $x = y$. En effet, on vérifie facilement que $\varrho - \alpha$ tend vers zéro quand α augmente indéfiniment.

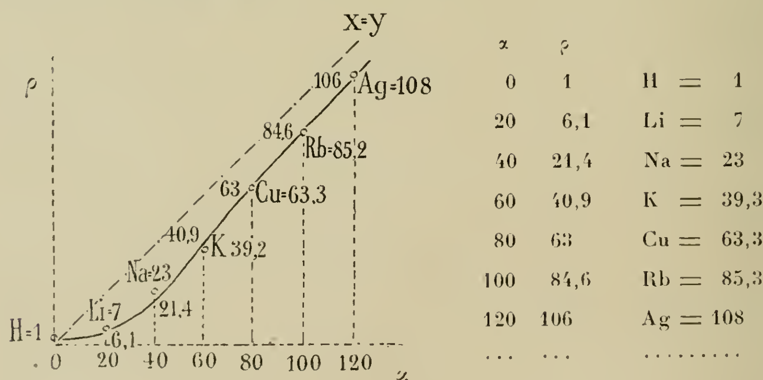
Examinons maintenant le tableau de Mendeleïeff. La série des poids atomiques des corps d'une même famille a des différences premières qui, au début de 15 montent à 25 environ pour redescendre et paraître se fixer autour de 20 ou 22.

Prenons par exemple la famille du Sodium :

H = 1 , Li = 7 , Na = 23 , K = 39,2 , Cu = 63,3 ,

Rb = 85,5 , Ag = 108 etc.

Portons en abscisse des longueurs en progression arithmétique et en ordonnées les poids atomiques. Nous obtenons ainsi des points qui dessinent une courbe présentant une analogie frappante avec la courbe en ϱ, α. Dans l'équation (1) donnons à α des valeurs en progression arithmétique avec la raison 20. On obtient les valeurs suivantes de ϱ, (fig. 1) :



α	ρ			
0	1	H	=	1
20	6,1	Li	=	7
40	21,4	Na	=	23
60	40,9	K	=	39,3
80	63	Cu	=	63,3
100	84,6	Rb	=	85,3
120	106	Ag	=	108
...	...	....		

Fig. 1.

Si nous considérons que α est proportionnel au rang, et si nous laissons de côté la considération de la chaleur spécifique nous voyons que le poids atomique est le rayon vecteur d'un point de la rectrice K = 6.38 et que l'abscisse de la projection centrale de ce point sur le plan $z = \sqrt{2}$ est le rang du corps. (fig. 2.)

Les corps des autres familles se placent par interpolation de huitième en huitième. On donnera à α les valeurs suivantes :

Glucinium $\alpha + \frac{1}{8} 20$

Bore . . $\alpha + \frac{2}{8} 20$

Carbone . $\alpha + \frac{3}{8} 20$

Azote . . $\alpha + \frac{4}{8} 20$

Oxygène . $\alpha + \frac{5}{8} 20$

Fluor. . $\alpha + \frac{6}{8} 20$

Néon . . $\alpha + \frac{7}{8} 20$

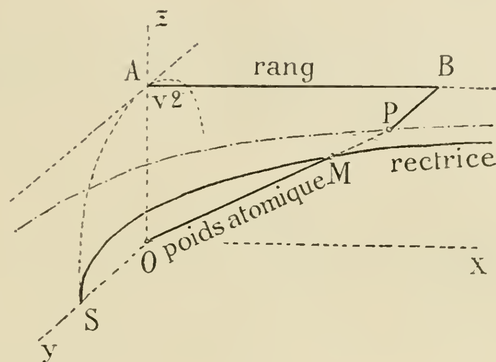


Fig 2.

en faisant $\alpha = o$ on obtient des corps entre l'hydrogène et le lithium. Ces corps ne sont pas connus, sauf un seul, l'hélium, homologue inférieur du néon. Son poids atomique est donné par la formule

$$\rho^2 = 1 + \alpha^2 \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha^2 + k^2}$$

où il faut faire $\alpha = \frac{7}{8} 20$.

on obtient $\rho = 4,5$. L'expérience donne pour le poids atomique de l'hélium la valeur 4. L'insertion de ce corps sur la courbe se fait donc dans des conditions d'approximation comparables à celles des autres corps.

11 **La loi cissoïdale atomique.** — La formule

$$\rho^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 2}{\beta^2 + 1}$$

peut s'écrire :

$$\rho^2 = \frac{\alpha^2}{\beta^2 + 1} + 1 + \frac{1}{\beta^2 + 1}$$

à partir de $\rho = 10$, les deux derniers termes représentent moins de 2 % de ρ^2. En les négligeant on aura :

$$\rho = \frac{\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2 + k^2}}$$

Cette expression représente précisément le rayon vecteur d'une cissoïde droite, émanant du point de rebroussement, et déterminant sur l'asymptote, à partir de l'axe de symétrie, une longueur égale à α.

La distance du point de rebroussement à l'asymptote est 63.8, correspondant au poids atomique du cuivre (63.8).

Si l'on désigne par N le rang du corps (le lithium étant pris avec le n° 1) on voit que le poids atomique est donné approximativement par la formule suivante :

$$A = 20 \,.\, N^2 (N^2 + 10)^{-\frac{1}{2}} .$$

La figure 3 traduit cette formule.

On améliore d'ailleurs celle-ci en ajoutant — ou restituant — le terme 1 :

$$(2) \qquad A = 1 + 20 \frac{N^2}{\sqrt{N^2 + 10}} .$$

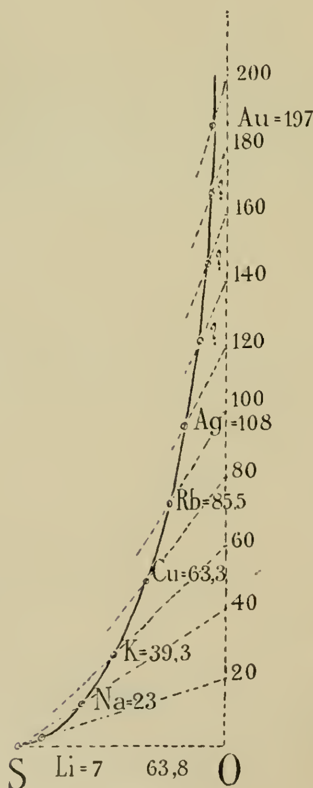


Fig. 3.

La courbe correspondante devient alors une cissoïde légèrement déformée par transformation conchoïdale. La vérification de cette formule est assez satisfaisante, — sauf pour le potassium — ainsi qu'il résulte du tableau suivant :

Eléments.	Rang.	A calculé.	A
H	0	1	1
Li	1	7	7
Na	2	22,4	23
K	3	42,2	39,3
Cu	4	64.8	63,3
Rb	5	85,4	85,2
Ag	6	107,6	108
...	..	.....	....
Au	10	192	197
...	..	.....	....

Nous avons à peine besoin d'ajouter que la loi cissoïdale traduite par la formule (2) doit être considérée comme essentiellement empirique.

F. BUTAVAND (Alger).

LES FIGURES COLLINÉAIRES

(Un chapitre de géométrie élémentaire.)

En nous plaçant au point de vue de la géométrie élémentaire, nous appellerons *figures collinéaires* deux figures planes situées dans le même plan ou dans des plans différents, et telles qu'à chaque droite de l'une corresponde une droite de l'autre, et à chaque point de l'une, un point de l'autre.

Les figures collinéaires élémentaires donnent lieu aux *théorèmes dualistiques* suivants :

I. *Quand les points de coupe des côtés homologues de deux triangles collinéaires, non situés dans le même plan, sont sur une même droite, les lignes de jonction des sommets homologues passent par un même point.*

Les points de coupe α, β, γ des côtés $\overline{BC}$ et $\overline{bc}$, $\overline{CA}$ et $\overline{ca}$, puis $\overline{AB}$ et $\overline{ab}$ étant sur la même droite, celle-ci sera évidemment l'intersection des deux plans ABC et *abc*.

D'autre part $\overline{AB}$ et $\overline{ab}$, $\overline{BC}$ et $\overline{bc}$, puis $\overline{CA}$ et $\overline{ca}$ forment alors trois plans qui se coupent en un point S. Les intersections $\overline{Aa}$, $\overline{Bb}$ et $\overline{Cc}$ passeront forcément par ce point S et le théorème est démontré.

II. *Quand les lignes de jonction des sommets homologues de deux triangles collinéaires, non situés dans le même plan, passent par un même point, les points de coupe des côtés homologues sont situés sur une même droite.*

Les deux triangles collinéaires ABC et *abc* auront leurs sommets situés deux à deux sur les arêtes d'une pyramide triangulaire et apparaîtront comme sections planes de celles-ci.

Les lignes $\overline{AB}$ et $\overline{ab}$ sont dans le même plan, donc elles se couperont ; il en sera de même avec $\overline{BC}$ et $\overline{bc}$, puis avec $\overline{CA}$ et $\overline{ca}$.

Les points de coupe γ, α et β de ces diverses droites seront situés sur l'intersection des plans ABC et *abc*. Ils seront donc sur la même droite, et le théorème est démontré.

La droite $\alpha\beta\gamma$ s'appelle l'*axe de collinéation* et le point S, le *centre de collinéation* des figures.

(Voir la fig. 1 en considérant la pyramide S[ABC].)

III. *Quand les points de coupe des droites homologues de deux po-*

IV. *Quand les lignes de jonction des points homologues de deux po-*

lygones plans collinéaires, non situés dans le même plan, sont sur une même droite, les lignes de jonction des sommets homologues passent par un même point.

Les points de coupe des côtés homologues étant sur la même droite, celle-ci sera évidemment l'intersection des plans des deux polygones. D'après le théorème I, les triangles ABC et *abc* donnent un point S comme point de coupe des droites $\overline{Aa}$, $\overline{Bb}$ et $\overline{Cc}$. Les triangles BCD et $\overline{bcd}$ donneront également le même point de coupe S′ pour les trois droites $\overline{Bb}$, $\overline{Cc}$ et $\overline{Dd}$. Les points S et S′ seront confondus comme se trouvant à l'intersection des droites $\overline{Bb}$ et $\overline{Cc}$. La ligne de jonction $\overline{Dd}$ d'une quatrième paire de sommets homologues passe par le même point que celles des trois premières. Il en sera de même pour toute autre ligne de jonction de deux points homologues et le théorème est démontré.

lygones plans collinéaires, non situés dans le même plan, passent par le même point, les points de coupe des côtés homologues sont situés sur une même droite.

Les deux polygones collinéaires ayant leurs sommets situés deux à deux sur les arêtes d'une pyramide S(ABCD...), ils apparaîtront comme sections planes de celle-ci.

Il suffira de répéter le raisonnement du théorème II, pour chaque paire de côtés homologues et nous trouverons que leurs points de coupe seront sur l'intersection des plans des polygones donnés; ils seront donc situés sur une même droite.

αβγδ s'appelle toujours l'*axe de collinéation* et S le *centre de collinéation.* (Voir la fig. 1 en considérant la pyramide S[ABCD].)

Fig. 1.

V. *Quand les points de coupe des côtés homologues de deux triangles collinéaires, situés dans le même plan, sont sur une même droite, les lignes de jonction des sommets homologues passent par un même point.*

Nous considérerons les triangles collinéaires ABC et *abc*, puis la droite $\alpha\beta\gamma$. Soient ensuite :

$Bb\gamma$ coupé par $\overline{Aa}$ en S sur $\overline{Bb}$

$Bb\alpha$ » » $\overline{Cc}$ » S′ » $\overline{Bb}$

et nous appliquerons le *théorème* bien connu *de Ménélaüs*. On a :

$$\frac{AB}{A\gamma}\cdot\frac{a\gamma}{ab}\cdot\frac{Sb}{SB}=\frac{CB}{C\alpha}\cdot\frac{c\alpha}{cb}\cdot\frac{S'b}{S'B}.$$

Nous prenons ensuite les triangles :

$\gamma\alpha b$ coupé par $\overline{ac}$ en β sur $\overline{\alpha\gamma}$

$\gamma\alpha B$ » » $\overline{AC}$ » β » $\overline{\alpha\gamma}$.

Le point β est commun aux deux transversales. On trouve :

$$\frac{\beta\alpha}{\beta\gamma}\cdot\frac{a\gamma}{ab}\cdot\frac{cb}{c\alpha}=\frac{\beta\alpha}{\beta\gamma}\cdot\frac{A\gamma}{AB}\cdot\frac{CB}{C\alpha}.$$

D'où : $\frac{a\gamma}{ab}\cdot\frac{AB}{A\gamma}=\frac{CB}{C\alpha}\cdot\frac{c\alpha}{cb}$

et enfin $\frac{Sb}{SB}=\frac{S'b}{S'B}$.

Donc S est confondu avec S′ et les trois rayons *Aa*, *Bb* et *Cc* sont concourants en S.

VI. *Quand les lignes de jonction des sommets homologues de deux triangles collinéaires situés dans le même plan passent par un même point, les points de coupe des côtés homologues sont situés sur une même droite.*

Nous considérons les triangles collinéaires ABC et *abc*, puis le centre S. Soient ensuite :

$Bb\gamma$ coupé par $\overline{Aa}$ en S sur $\overline{Bb}$

$Bb\alpha$ » » $\overline{Cc}$ » S » $\overline{Bb}$

Le point S est commun aux deux transversales.

Nous appliquerons ensuite le *théorème de Ménélaüs*. Nous obtenons :

$$\frac{Sb}{SB}\cdot\frac{AB}{A\gamma}\cdot\frac{a\gamma}{ab}=\frac{Sb}{SB}\cdot\frac{CB}{C\alpha}\cdot\frac{c\alpha}{cb}.$$

D'où : $\frac{AB}{A\gamma}\cdot\frac{a\gamma}{ab}=\frac{CB}{C\alpha}\cdot\frac{c\alpha}{cb}$.

Nous prenons ensuite les triangles :

$\gamma\alpha b$ coupé par $\overline{ac}$ en β sur $\overline{\alpha\gamma}$

$\gamma\alpha B$ » » $\overline{AC}$ » β' » $\overline{\alpha\gamma}$.

Nous aurons également :

$$\frac{\beta\alpha}{\beta\gamma}\cdot\frac{a\gamma}{ab}\cdot\frac{cb}{c\alpha}=\frac{\beta'\alpha}{\beta'\gamma}\cdot\frac{A\gamma}{AB}\cdot\frac{CB}{C\alpha}$$

en tenant compte du résultat précédent, il reste.

$$\frac{\beta\alpha}{\beta\gamma}=\frac{\beta'\alpha}{\beta'\gamma}.$$

Donc β et β' sont confondus sur $\alpha\gamma$, autrement dit, les trois points de coupe sont sur une même droite.

(Voir la fig. 2 en considérant plus spécialement les triangles ABC et *abc*.)

Les triangles ABC et *abc* sont aussi appelés *triangles homologiques* de *Desargues*.

On trouvera une démonstration de ces mêmes théorèmes par

l'emploi du rapport anharmonique dans ROUCHÉ et COMBEROUSSE, *Traité de Géométrie*, 2ᵉ édition (tome I, p. 335).

Une démonstration analogue à celle que nous donnons se trouve dans un travail très intéressant sur lequel nous reviendrons encore : A. BENTELI, *Ueber die ebenen Schnitte der Strahlenflächen*,

Comme précédemment, nous appellerons S le *centre de collinéation* et $\alpha\beta\gamma$ l'*axe de collinéation*.

VII. *Quand les points de coupe des droites homologues de deux polygones collinéaires, situés dans le même plan, sont sur une même droite, les lignes de jonction des sommets homologues passent par le même point.*

Trois paires de sommets homologues quelconques, ABC et *abc* déterminent un centre de collinéation commun aux rayons $\overline{Aa}$, $\overline{Bb}$ et $\overline{Cc}$.

Toute quatrième paire comme D*d* peut être liée à deux des précédentes A*a* et B*b*. Elle détermine également avec celles-ci un centre de collinéation situé sur $\overline{Aa}$ et $\overline{Bb}$, donc confondu avec le précédent.

La ligne de jonction des éléments d'une quatrième paire de points homologues passe ainsi par le même point que celles des trois premières paires. Le raisonnement subsistant pour toute autre paire de points homologues, le théorème est démontré.

VIII. *Quand les lignes de jonction des points homologues de deux polygones collinéaires, situés dans le même plan, passent par le même point, les points de coupe des côtés homologues sont situés sur une même droite.*

Les deux triangles collinéaires ABC et *abc* déterminent évidemment un axe de collinéation $\alpha\beta\gamma$.

Avec une quatrième paire de points homologues, comme D et *d*, nous pouvons considérer $\overline{DB}$ qui coupe $\overline{AC}$ en M et $\overline{db}$ qui coupe $\overline{ac}$ en *m*. Les points M et *m* deviennent des points homologues, le rayon $\overline{Mm}$ passe par le centre de collinéation et les triangles DCM et *dcm* sont collinéaires. Ils entraînent un axe de collinéation $\alpha\beta\delta$ ayant deux points communs avec le précédent. Donc ces axes sont confondus. Le raisonnement subsiste pour toutes les droites homologues passant par D et *d*. Donc le théorème est démontré.

(Voir la fig. 2 en considérant les polygones ABCD et *abcd*.)

Les théorèmes qui précèdent se ramènent ainsi aux deux théorèmes généraux suivants :

IX. *Quand les points de coupe des droites homologues de deux polygones plans collinéaires, situés dans le même plan ou dans des plans différents, sont sur une même droite, les lignes de jonction des points homologues passent par le même centre.*

X. *Quand les lignes de jonction des points homologues de deux polygones plans collinéaires situés dans le même plan ou dans des plans différents, passent par un même centre, les points de coupe des côtés homologues sont sur une même droite.*

Ainsi donc, d'une manière générale, l'existence de l'*axe de collinéation* entraîne celle du *centre de collinéation* et vice versa.

Remarques. — I. Dans les théorèmes V et VI, nous avons préféré la démonstration par le théorème de Ménélaüs à celle par les rapports anharmoniques, parce que nous nous plaçons au point de vue de la géométrie élémentaire et de l'enseignement moyen. Le théorème de Ménélaüs peut être développé sans éten-

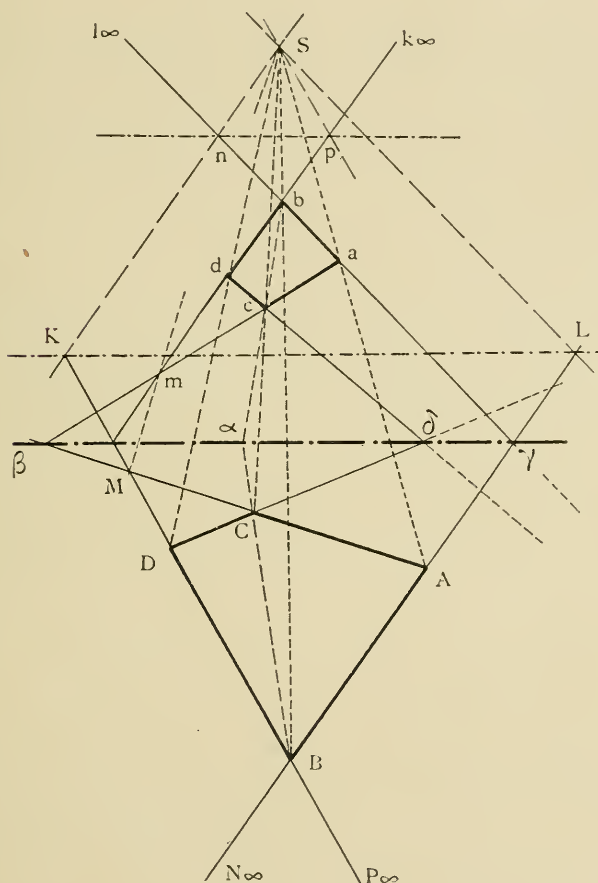


Fig. 2.

dre trop loin le champ d'activité prévu, tandis que l'emploi du rapport anharmonique conduit déjà dans la géométrie supérieure.

II. Les figures collinéaires que nous venons d'étudier constituent un cas spécial de celles que nous avons définies au début, étant donné la propriété particulière qui les caractérise. Elles forment

une *collinéation centrale* ou une *homologie*, au lieu d'une collinéation simple.

En Suisse, nous admettons couramment la dénomination de collinéation centrale d'après MŒBIUS et FIEDLER, mais il serait tout aussi exact d'appeler ces figures, des figures homologiques d'après PONCELET et CHASLES. A ce sujet, on peut consulter : T. REYE, *Geometrie der Lage* (tome III, p. 2).

Axes secondaires de la collinéation.. — Soit P_∞ sur BD et N_∞ sur AB, les points homologues p et n de la deuxième figure seront sur $Sp \parallel BD$, puis sur $Sn \parallel AB$. Ils seront en outre sur les lignes homologues bd et ab.

Nous trouvons ainsi une droite $\overline{pn}$ de la deuxième figure qui est l'homologue de la droite $P_\infty N_\infty$ ou de la droite de l'infini de la première figure. $P_\infty N_\infty$ coupant l'axe de collinéation à l'infini, il en sera de même de $\overline{pn}$. La droite $\overline{pn}$ s'appelle un axe secondaire de la collinéation.

D'autre part, considérons l_∞ sur ab et k_∞ sur bd. Les points homologues de l'autre figure sont L et K sur $SL \parallel \overline{ab}$ et $SK \parallel \overline{bd}$.

Ces points sont en outre sur les lignes homologues AB et BD. Nous obtenons la droite LK de la figure ABC, qui est l'homologue de la droite de l'infini $l_\infty k_\infty$ dans la figure abc. LK est parallèle à l'axe de collinéation, puisque son homologue $l_\infty k_\infty$ rencontre cet axe à l'infini. LK s'appelle également un axe secondaire de collinéation.

Les axes secondaires de deux figures formant une collinéation centrale, sont les droites de chaque figure correspondant à la droite de l'infini de l'autre figure. Ces axes sont parallèles à l'axe principal de collinéation. (Voir fig. 2.)

Cas spéciaux de la collinéation centrale.

1. *Les figures affines.* Nous avons ici le cas où le centre de collinéation est à l'infini, autrement dit les lignes de jonction des points homologues de deux figures affines sont parallèles.

Exemples : Les diverses sections planes d'un prisme ou d'un cylindre ; les deux projections orthogonales d'une figure plane ; le rabattement d'un polygone plan et la projection de même nom.

Si les lignes de jonction des points homologues sont également perpendiculaires à l'axe de collinéation, qui prend ici le nom d'*axe d'affinité*, la propriété des figures ainsi apparentées prend le nom d'*affinité orthogonale*.

Rapport d'affinité : Dans les figures formant une affinité orthogonale, le rapport des distances de deux points homologues à l'axe d'affinité est constant.

2. *Les figures homothétiques*. Nous appellerons ainsi les figures d'une collinéation centrale dans laquelle les lignes homologues sont parallèles. Autrement, dans les figures homothétiques, l'axe de collinéation est rejeté à l'infini.

Exemples : Les sections planes parallèles d'une pyramide ou d'un cône et leurs projections sur un même plan.

Rapport d'homothétie : Quand deux figures sont homothétiques, les distances de deux points homologues au centre de collinéation ou d'homothétie forment un rapport constant.

3. *Les figures égales et semblablement disposées*. Ce sera le cas des figures collinéaires centrales, dans lesquelles le centre de collinéation et l'axe de collinéation seront à l'infini.

Exemples : Les sections planes parallèles d'un prisme ou d'un cylindre et leurs projections sur un même plan.

Pour ces cas spéciaux, on consultera avec intérêt : Rouché et Comberousse, *Traité de Géométrie* (t. I, p. 252); Grossmann, *Darstellende Geometrie* (p. 15, 42, 43, 51); Benteli, *Ueber die ebenen Schnitte der Strahlenflächen*. Dans ce dernier travail, les sections planes des corps simples sont spécialement développées en tenant compte de la collinéation.

Applications des figures collinéaires à la Géométrie descriptive.

Problème 1. — Etant donné une figure plane et trois points d'une autre figure collinéaire avec la première, déterminer complètement la seconde figure.

Problème 2. — Etant donné la projection horizontale d'un polygone plan et trois sommets de la projection verticale du même polygone, déterminer complètement cette deuxième projection par la collinéation.

Problème 3. — Etant donné les deux projections d'une figure plane, déterminer le rabattement de cette figure. (On utilisera la hauteur de l'un des points pour rabattre celui-ci ; les autres seront rabattus par la collinéation.)

Problème 4. — Déterminer la section d'un prisme par un plan et rabattre cette section dans le plan de la base.

Problème 5. — Déterminer la section d'une pyramide par un plan et rabattre cette section dans le plan de la base.

Problème 6. — Même question avec un cylindre.

Problème 7. — Même question avec un cône.

Remarque. — Dans les quatre derniers problèmes, nous supposerons la base du corps située dans un des plans fondamentaux. D'autre part, on peut déterminer le premier point de la section

comme intersection d'une droite avec un plan et rechercher ensuite tous les autres points au moyen de la collinéation.

On peut également déterminer tous les points, même le pre-

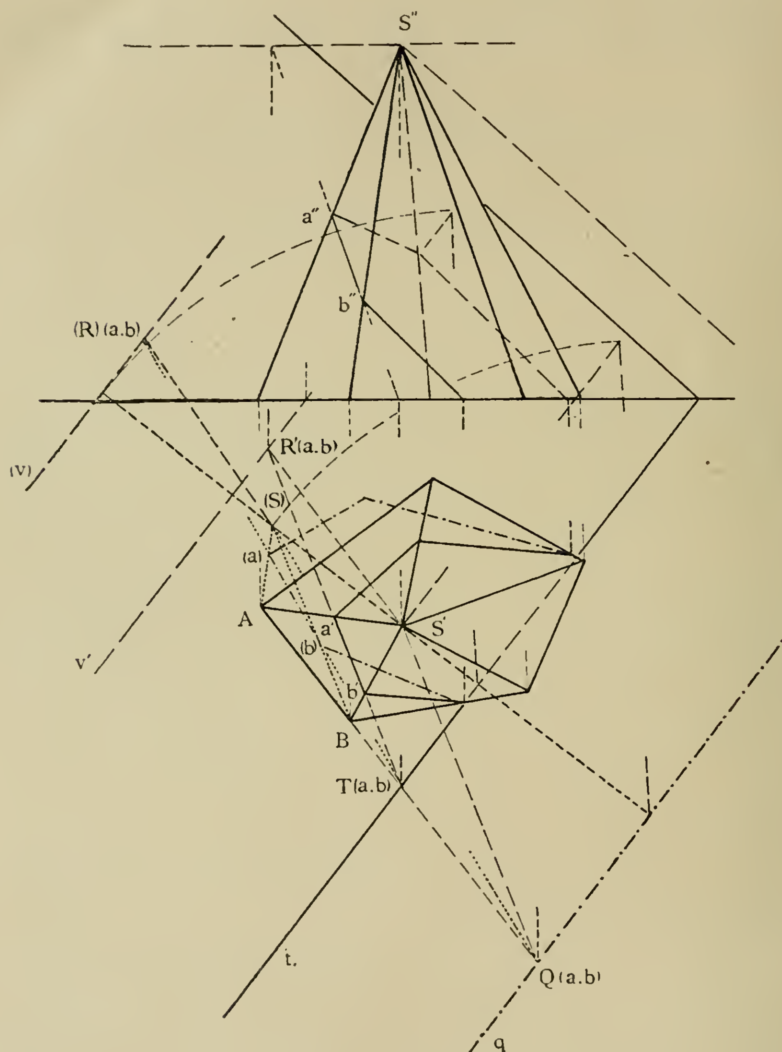


Fig. 3.

mier, par la collinéation. Nous développerons la solution du problème 5 en utilisant cette dernière méthode. Comme nous l'avons indiqué au début, nous sommes dans un chapitre de géométrie

élémentaire, et cette méthode doit être établie par des moyens et des considérations appartenant tous au domaine de la géométrie élémentaire.

Nous n'utiliserons donc que les propriétés de la collinéation centrale, telles que nous les avons présentées plus haut.

On pourra comparer notre solution avec celles données par MM. A. Benteli (mémoire déjà cité) et W. Fiedler, *Die darstellende Geometrie* (t. I, p. 345). La comparaison montrera que nous avons évité tous les développements ne relevant que de la géométrie supérieure et sortant, par conséquent, du programme des élèves qui nous intéressent.

Solution du problème 5. Nous ferons d'abord ressortir *les figures collinéaires* de ce problème (voir fig. 3) :

1. La base de la pyramide, dans le plan H et la section sont deux figures collinéaires situées dans des plans différents. L'axe de collinéation est la trace t_1 du plan sécant ; le centre de collinéation est le sommet de la pyramide.

2. La base de la pyramide et la projection horizontale de la section considérée sont deux figures collinéaires situées dans le même plan. L'axe de collinéation est encore la trace t_1 ; le centre de collinéation est la projection horizontale S' du sommet.

3. La projection horizontale de la section et son rabattement sur le plan H sont deux figures collinéaires situées dans le même plan. L'axe de collinéation est toujours la trace t_1 ; le centre de collinéation est à l'infini sur la direction perpendiculaire à t_1. Ces deux dernières figures forment ainsi une affinité orthogonale.

4. Puisque les lignes homologues de la base de la pyramide et celles du rabattement de la section plane considérée se coupent également sur la trace t_1, ces deux figures sont collinéaires. Elles sont dans le même plan. L'axe de collinéation est aussi la trace t_1.

Nous reviendrons plus loin sur le centre de collinéation.

Nous avons encore d'autres collinéations : entre les deux projections de la section plane, entre la section elle-même et sa projection horizontale, et entre la section elle-même et son rabattement sur le plan H, mais nous ne nous occuperons pas davantage de celles-ci.

Nous pouvons rechercher maintenant *les axes secondaires de ces divers groupes collinéaires*. Prenons d'abord la base et la section : nous trouverons la ligne conjuguée de la droite de l'infini de la section, dans le plan H, en menant par le sommet des parallèles aux côtés de la section ; celles-ci forment un plan parallèle au plan sécant passant par le sommet ; leurs intersections avec les côtés correspondants de la base sont sur l'intersection de ce plan avec le plan H. Nous trouvons ainsi le premier axe secondaire q. Pour le deuxième, qui est la droite du plan de la section conjuguée de la droite de l'infini du plan H, nous mènerons

par S des parallèles aux côtés de la base ; elles formeront un plan horizontal par le sommet et elles rencontreront les côtés correspondants de la section sur l'intersection du plan sécant avec ce plan horizontal auxiliaire, soit sur une horizontale du plan sécant dont la projection verticale passe par S″. Nous obtenons ainsi une droite de l'espace v qui est le deuxième axe secondaire.

En projetant horizontalement la section et le sommet de la pyramide sur le plan H, les parallèles aux projections horizontales des côtés de la section menées par S′ représentent les parallèles précédentes, et elles rencontrent encore les côtés correspondants de la base sur la trace q du plan parallèle au plan sécant et passant par le sommet. q reste donc le premier axe secondaire de collinéation par rapport à la base de la pyramide et à la projection horizontale de sa section. Les parallèles par S′ aux côtés de la base représentent également les parallèles menées par le sommet dans le plan horizontal auxiliaire ; donc leurs intersections avec les projections des côtés de la section se trouveront sur la projection v' de v. v'qui est la projection de l'horizontale précédente, devient alors le deuxième axe secondaire de la collinéation considérée.

Nous avons encore à considérer les axes secondaires de la collinéation formée par la base et le rabattement de la section.

Pendant la rotation du plan sécant autour de t_1, les côtés de la section sont entraînés dans le mouvement, mais leurs points de l'infini demeurent à l'infini. D'autre part, les points du plan de la base ou du plan H demeurent fixes et restent conjugués aux mêmes points du plan mobile. Dans ces conditions, le premier axe secondaire de la collinéation reste l'axe q et le deuxième axe secondaire reste v pendant tout le mouvement, pour devenir (v) lors du rabattement. Le deuxième axe secondaire est donc le rabattement de l'axe v.

Recherchons maintenant le sommet de cette collinéation. Les parallèles aux côtés de la section menées par les points conjugués pris sur l'axe q sont demeurées parallèles pour toutes les positions du plan mobile. Elles ont donc constamment formé un second plan parallèle au plan sécant et mené par q. Leur point de coupe est donc resté dans ce plan pour se rabattre sur le plan H en même temps que le plan sécant lui-même. *Le centre de la collinéation déterminée par la base de la pyramide et le rabattement de la section dans le plan de la base est donc le rabattement du sommet autour du premier axe secondaire* q *de la collinéation.*

Recherche de la projection a′b′. Soit AB le côté de la base. Sa trace horizontale vient en $T(a, b)$ sur t_1. Son point de coupe $Q(a, b)$ avec q sera le conjugué du point de l'infini de $\overline{ab}$, le côté correspondant de la section. $S'Q_{(ab)}$ est alors une parallèle à $\overline{a'b'}$ et on pourra donc mener $\overline{a'b'}$ par $T_{(a, b)}$ parallèlement à $S'Q_{(a, b)}$.

Les projections des arêtes limitent ensuite le segment considéré. Le prolongement de $a'b'$ coupe v' en $R'_{(ab)}$.

Le procédé est applicable à tous les autres côtés de la section, mais il se simplifie immédiatement pour les points suivants par l'emploi de l'axe de collinéation t_1.

Recherche du rabattement $\overline{(a)(b)}$. Il est d'abord compris entre les droites $\overline{(S)A}$ et $\overline{(S)B}$. Cette direction $(a)(b)$ passera par $T_{(ab)}$ parallèlement à $\overline{Q_{(ab)}(S)}$. On peut aussi chercher $(R)_{(ab)}$ en menant $\overline{(S)R_{(ab)}}$ par (S) parallèlement à $\overline{AB}$. Les deux points $T_{(ab)}$ et $(R)_{(ab)}$ déterminent alors la direction $(a)(b)$.

Les autres côtés du rabattement s'établissent ensuite au moyen de l'axe de collinéation t_1.

On obtient la *projection verticale* en relevant les points comme $T_{(a, b)}$ sur la ligne de terre et comme $R'_{(ab)}$ sur la parallèle à la ligne de terre par S''.

Observation finale. — Nous avons été amené à la publication de ce chapitre de géométrie élémentaire par l'élaboration du Rapport sur l'*enseignement des mathématiques dans les écoles techniques moyennes suisses*[1]. En étudiant l'enseignement de la géométrie et de la géométrie descriptive, nous avons pu constater combien il serait avantageux de généraliser l'emploi de la collinéation centrale dans un grand nombre de constructions. Mais cela exige que la collinéation centrale puisse être présentée d'une manière élémentaire, à la portée des jeunes gens n'étant pas initiés à la géométrie supérieure. A ce titre, le présent exposé peut avoir quelque intérêt pour les professeurs de l'enseignement moyen.

L. Crelier (Bienne).

---

[1] Un fascicule de 110 pages ; Georg & Cie, Genève.

CHRONIQUE

Commission internationale de l'enseignement mathématique.

I. — Réunion de Cambridge (août 1912).

Nous avons déjà annoncé, en janvier, le programme général de la réunion que la Commission tiendra à Cambridge, à l'occasion du 5me Congrès international des mathématiciens (22-28 août). Nous complétons ces renseignements en précisant les points sur lesquels porteront les discussions des questions A et B.

Dans la première *séance générale* du Congrès, M. le prof F. Klein, président de la Commission, fera un exposé d'ensemble des travaux. L'assemblée sera appelée à se prononcer sur la prolongation du mandat de la Commission jusqu'au Congrès suivant.

La Commission tiendra ensuite *trois séances* en commun avec la section d'enseignement du Congrès. Elles seront organisées sur le plan général de celles de Milan.

1re séance : *Présentation des travaux des sous-commissions nationales*. Pour chaque pays, le délégué déposera un court rapport écrit, destiné à faire ressortir les points caractéristiques des travaux de sa sous-commission. L'exposé oral sera un résumé de ce rapport.

2me séance : *L'intuition et l'expérience dans l'enseignement mathématique des Ecoles moyennes.* — Discussion du rapport de la sous-commission A.

3me séance : *Les mathématiques en physique.* Connaissances mathématiques utiles aux physiciens et réclamées par ceux-ci. — Discussion du rapport de la sous-commission B.

Le Comité central a constitué *deux sous-commissions* A et B, avec la mission d'élaborer un rapport préparatoire sur chacune des questions. Il a chargé M. le Dr W. Lietzmann (Barmen) et M. le Prof.-Dr C. Runge (Gœttingue) de préparer deux questionnaires destinés à réunir les renseignements indispensables aux rapporteurs. On remarquera le lien très étroit qui existe entre les questions A et B.

Contrairement à ce qui a été fait à Milan, le Comité central désignera les rapporteurs avant le Congrès et leur transmettra en

temps utile les documents que fourniront les deux questionnaires. Il va sans dire que toute liberté sera laissée aux rapporteurs pour les utiliser selon leur convenance.

Questionnaire A. (*Extrait de la circulaire* de M. le Dr W. Lietzmann). — Objet : *L'intuition et l'expérience dans l'enseignement mathématique des écoles moyennes.*

Délimitation du sujet. L'intuition et l'expérience jouent un rôle prépondérant dans l'enseignement géométrique des écoles élémentaires et des cours complémentaires (Fortbildungsschule), ainsi que dans l'enseignement propédeutique des écoles moyennes. Dans la suite, il ne sera pas question de tout cela. Nous allons de même laisser de côté les cas multiples où l'intuition et l'expérience sont destinées à compléter ou à remplacer les développements logiques et déductifs dans l'enseignement systématique de la géométrie dans le domaine des éléments d'Euclide. Nous aurons peut-être l'occasion, dans une séance ultérieure de la Commission, d'examiner ces questions extrêmement importantes, en tenant compte du point de vue psychologique. Afin de bien délimiter le sujet, il conviendra donc à Cambridge de s'en tenir au rôle de l'intuition et de l'expérience dans les classes supérieures des écoles moyennes.

Pour organiser les travaux préparatoires, il est désirable d'avoir un tableau de l'état actuel de ce qui se fait dans les différents pays. Nous nous permettons à cet effet de vous soumettre les questions suivantes :

1. *Mesure et estimation des grandeurs.* Dans quels établissements, gymnase, école réale supérieure, etc., dans quelle étendue et dans quelles classes (âge des élèves).

a) Procède-t-on à des mesures *géodésiques* pratiques pour les utiliser ensuite numériquement ?

Usage du théodolite, de la chaîne d'arpenteur, etc.

b) Fait-on des observations et des mesures *astronomiques* avec des problèmes qui s'y rattachent ?

Usages d'appareils photographiques, instruments universels.

2. *Dessin et représentation graphique.* Dans quels établissements, dans quelle étendue et dans quelles classes présente-t-on :

a) La géométrie descriptive (Projection oblique ? — Plan et élévation ? — Projection centrale ? — Théorie des ombres ?)

Y a-t-il fusion entre cet enseignement et l'enseignement de la stéréométrie ? L'enseignement est-il donné par le maître de mathématiques ou par le maître de dessin ?

b) Les méthodes graphiques (Représentation de fonctions sur du papier millimétrique ? — Représentation des vecteurs ? — Champ scalaire ? — Calcul graphique et spécialement statique graphique ? — Evaluation de surfaces à l'aide du papier millimétrique ou du planimètre ?)

3. *Calculs et évaluations numériques.*

a) Calcul abrégé à l'aide de fractions décimales ?

b) Emploi de la règle à calcul ?

c) Tables numériques (nombre de décimales pour le calcul logarithmique et pour les fonctions trigonométriques ? — Emploie-t-on aussi des tables de racines carrées ou de racines cubiques et des tables de mortalité ? — Est-ce que l'on montre à l'aide d'exemples comment on peut calculer les valeurs des logarithmes et des fonctions trigonométriques ?)

d) Résolution numérique et graphique des équations par approximation (Règle de Newton ? — Regula Falsi ? — Méthodes nomographiques ?).

Les deux publications ci-après permettent d'orienter le lecteur sur quelques-unes de ces questions et sur les réponses concernant l'Allemagne :

P. Zühlke : *Der Unterricht im Linearzeichnen und in der darstellenden Geometrie* (III. Bd., Heft 3 der Abhandl.).

B. Hoffmann : *Astronomie, Vermessungswesen, mathematische Geographie an den höheren Schulen* (III. Bd., Heft 4 der Abhandl.), actuellement sous presse.

Adresser les réponses, avant Pâques, à M. le Dr W. Lietzmann, Sehlhofstrasse 39, Barmen (Prusse).

Questionnaire B. (*Extrait de la Circulaire* de M. le Prof. C. Runge.) — Objet : *Les mathématiques dans les études universitaires des physiciens.*

1. Quelles sont les branches mathématiques qui appartiennent à un enseignement régulier destiné au physicien ? Dans la préparation mathématique des physiciens fait-on une différence entre les étudiants qui suivent une direction plutôt expérimentale et ceux qui suivent une voie plus théorique.

Les professeurs de mathématiques tiennent-ils particulièrement compte des besoins des physiciens ?

Y a-t-il des cours de mathématiques spécialement destinés aux physiciens ?

Dans quelle mesure et à quel point de vue les mathématiciens participent-ils aux cours *a)* de mécanique ; *b)* à d'autres cours et particulièrement à ceux qui se rattachent au domaine moderne de la physique mathématique ?

2. Jusqu'à quel point les méthodes graphiques modernes d'intégration et de nomographie sont-elles répandues dans les universités ?

Les étudiants en physique sont-ils appelés à apprendre la géométrie descriptive, le calcul numérique, la résolution numérique des équations différentielles et la méthode des moindres carrés ?

Apprennent-ils le maniement d'instruments mathématiques tels que la règle à calcul, la machine à calculer et les planimètres ?

Y a-t-il des cours ou des exercices spéciaux à cet effet ou cet enseignement se fait-il dans les travaux pratiques de physique ?

3. Quelle est l'organisation des exercices mathématiques destinés aux physiciens. Ces exercices ont-ils lieu suivant le mode habituel des travaux de laboratoire. Le professeur ou ses assistants entrent-ils en relation personnelle avec les différents étudiants ?

4. Quelle est votre opinion personnelle sur l'opportunité de l'organisation actuelle de cet enseignement ?

Avez-vous des propositions à faire au sujet d'une extension ou d'une réduction de l'enseignement mathématique ou au sujet d'une distinction des étudiants en physique en divers groupes ou encore pour ce qui concerne l'organisation de l'enseignement ?

Adresser les réponses, avant Pâques, à M. le Prof. C. Runge, Wilhelm Weberstrasse 21, Gœttingue.

II. — Sous-commissions nationales.

Belgique. — La Sous-commission belge publie le premier volume de ses rapports, sous le titre : « Rapports sur l'enseignement des mathématiques, du dessin et du travail manuel dans les écoles primaires, les écoles normales primaires, les écoles moyennes, les athénées et les collèges belges (348 p.) » Ce volume comprend 4 rapports :

1. — *Rapport sur l'enseignement des mathématiques dans les écoles primaires et dans les écoles normales primaires*, par M. Dock, inspecteur des écoles normales primaires (31 p.).

2. — *Rapport sur l'enseignement du dessin et du travail manuel dans les écoles primaires, les écoles moyennes, les athénées et les collèges*, par L. Montfort, inspecteur de l'enseignement du dessin (155 p.).

3. — *Rapport sur l'enseignement des mathématiques dans les écoles moyennes, les athénées et les collèges*, par H. Ploumen, inspecteur de l'enseignement moyen (88 p.).

4. — *Les tendances actuelles de l'enseignement mathématique en Belgique et leur influence sur les méthodes et les programmes*, par H. Ploumen (67 p.).

Etats-Unis. — Deux nouveaux fascicules viennent s'ajouter aux cinq rapports dont nous avons donné la liste dans le précédent numéro. Ce sont des études très documentées sur les mathématiques dans l'enseignement élémentaire et dans l'enseignement secondaire.

Comités I et II. — *Mathematics in the Elementary Schools of the United States* (185 p.).

Comités III et IV. — *Mathematics in the Public and Private Secondary Schools of the United States* (187 p.).

Ces rapports sont publiés sous les auspices et par les soins du United States Bureau of Education à Washington.

Hongrie. — La Sous-commission hongroise vient de publier les cinq premiers fascicules de ses rapports. Ce sont ceux de MM. K. Goldziher, sur l'enseignement mathématique dans les écoles normales de l'enseignement primaire et de l'enseignement primaire supérieur, de M. J. Kürschak, sur la préparation des professeurs des écoles moyennes, de M. P. von Szabo, sur l'enseignement des mathématiques au gymnase d'application pour la formation des professeurs des écoles moyennes, de M. G. Rados, sur l'organisation actuelle de l'enseignement mathématique à l'Ecole technique supérieure de Budapest et de M. D. Arany sur l'enseignement professionnel.

Der mathematische Unterricht an den Lehrerbildungsanstalten, von K. Goldziher (13 p.).

Die Ausbildung der Mittelschulprofessoren, von J. Kürschak (20 p.).

Der Unterricht der Mathematik am Uebungsgymnasium, von P. von Szabo (17 p.).

Der heutige Stand des mathematischen Unterrichts am königlich ungarischen Josefs-Polytechnikum (Technische Hochschule in Budapest), von G. Rados (14 p.).

Der mathematische Unterricht an den höheren Gewerbeschulen und gewerblichen Fachschulen. Unter Mitwirkung des Gewerbeschuldirektors Aladar Banhegyi, bearbeitet von D. Arany (15 p.).

Ces rapports sont mis en vente séparément, au prix de Fr. 0,50 le fascicule, à la Librairie Georg & Cie, à Genève. Le volume complet, comprenant l'ensemble des rapports, se vendra 3 fr.

Iles Britanniques. — La collection des rapports anglais *The Teaching of Mathematics in the United Kingdom*, édités par la Maison Wyman & Sons, à Londres, vient de s'enrichir de six nouveaux rapports :

No 12. — *Mathematics with relation to Engineering Work in Schools*. By Mr. T. S. Usherwood (26 p.). Price 2 d.

No 13. — *The Teaching of Arithmetic in Secondary Schools*. By Mr. G. W. Palmer (33 p.). Price 2 1/2 d.

No 14. — *Examinations for Mathematical Scholarships*. By Dr. F. S. Macaulay and M. W. J. Greenstreet (53 p.). Price 3 d.

No 15. — *The Educational Value of Geometry*. By Mr. G. St. L. Carson (17 p.). Price 1 1/2 d.

No 16. — *A School Course in Advanced Geometry*. By Mr. C. V. Durell (14 p.). Price 1 1/2 d.

No 17. — *Mathematics in Osborne and Dartmouth*. By Mr. J. W. Mercer and Mr. C. E. Ashford (41 p.). Price 2 1/2 d.

Italie. — Nous venons de recevoir quatre nouveaux fascicules de la Sous-commission italienne, ce qui porte à neuf le nombre des rapports publiés. Deux des rapports sont dus à M. le Prof. G. Lazzeri ; ils sont consacrés, l'un aux Ecoles industrielles, professionnelles et commerciales, l'autre à l'Académie royale de Li-

vourne et à l'Académie royale militaire de Turin. Dans les deux autres rapports, M. A. Conti expose l'enseignement mathématique à l'Ecole primaire et à l'Ecole normale.

L'Insegnamento della Matematica nelle Scuole industriali, professionali e commerciali, Relazione di G. Lazzeri, Livourne (19 p.).

L'insegnamento della Matematica nella R. Accademia Navale di Livorno e nella R. Accademia Militare di Torino, Relazione di G. Lazzeri (14 p.).

L'insegnamento della Matematica nelle Scuole infantili ed elementari, Relazione di A. Conti, Rome (39 p.).

L'Insegnamento della Matematica nelle Scuole normali, Relazione di A. Conti (71 p.).

Japon. — Les rapports de la Sous-commission japonaise sont sous presse et pourront être distribués en juin. Ils ont été traduits en langue anglaise et comprendront deux volumes. Le premier volume, intitulé *Summary Report on the Teaching of Mathematics in Japon,* by R. Fujisawa, donnera un exposé d'ensemble (250 à 300 pages). Le second volume, d'environ 5 à 600 pages, comprendra les rapports spéciaux, au nombre de quinze, concernant les divers types d'établissements, depuis l'enseignement primaire jusqu'aux Ecoles supérieures, universitaires et techniques.

5e Congrès international des mathématiciens.

Nous rappelons que le 5e Congrès international des mathématiciens aura lieu à Cambridge du 22 au 28 août 1912. Une circulaire générale est en préparation. Nous espérons la recevoir en temps utile afin de pouvoir la reproduire dans la *Revue* du 15 mai prochain. — Pour tout ce qui concerne le Congrès, s'adresser à M. le Prof. E.W. Hobson, Christ's College, Cambridge (Angleterre).

Le premier Congrès des professeurs de mathématiques en Russie.

Les professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire russe se sont réunis en un Congrès, qui a eu lieu à St-Pétersbourg, du 6 au 16 janvier 1912. Plus de 1200 participants avaient répondu à l'appel du Comité d'organisation présidé par le général Makcheïeff. Dans sa première séance générale le Congrès a désigné comme président M. le Prof. A. Vassilief, qui prononça un remarquable discours *Sur l'enseignement mathématique et philosophique à l'Ecole moyenne.* Nous reviendrons, dans notre prochain numéro, sur les thèses développées par le savant conférencier et nous donnerons un aperçu des principales conférences et communications présentées et discutées dans cet important congrès qui fait bien augurer du développement de l'enseignement mathématique russe.

Hommage à M. C.-A. Laisant. — Le Congrès a tenu à rendre

hommage aux grands services que M. Laisant a rendu à la science et à l'enseignement mathématique en lui adressant le télégramme suivant : « Le premier Congrès des professeurs de mathématiques de toutes les Russie salue le savant qui, par son activité infatigable, a donné un vif essor à l'enseignement mathématique et le partisan chaleureux de l'union cordiale des mathématiciens de tous les pays préconisée dans son journal. — Le président du Congrès : Prof. A. Vassilief. — Le président du Comité d'organisation : le général Makcheïeff. »

Académie des Sciences de Paris. — Prix proposés.

Prix Bordin pour 1913 (3000 fr.). — Perfectionner en quelque point important la théorie arithmétique des formes non quadratiques.

Grand Prix des Sciences mathématiques pour 1914 (3000 fr.). — Perfectionner la théorie des fonctions d'une variable qui sont susceptibles de représentations par des séries trigonométriques de plusieurs arguments fonctions linéaires de cette variable. L'Académie verrait avec plaisir traiter quelque application importante à la Physique mathématique et à la Mécanique céleste.

Prix Fourneyron pour 1914 (1000 fr.). — Etude théorique et expérimentale de la question des turbines à combustion ou explosion.

Pour plus de détails, voir les *Comptes rendus*, séance du 18 décembre 1911.

Académie royale de Belgique. — Concours de 1913.

L'Académie met au concours les sujets suivants :

On demande une contribution importante à la Géométrie infinitésimale des surfaces courbes. — Prix : 800 francs.

Résumer les travaux sur les systèmes de cubiques gauches et faire de nouvelles recherches sur ces systèmes. — Prix : 800 francs.

Les mémoires pourront être rédigés en français ou en flamand et devront être adressés, francs de port, à M. le Secrétaire perpétuel au Palais des Académies, à Bruxelles, avant le 1er août 1913.

Les auteurs ne mettront point leur nom à leur ouvrage ; ils y inscriront seulement une devise, qu'ils reproduiront sur un pli cacheté renfermant leur nom et leur adresse.

France. — Thèses de Doctorat.

Pendant l'année scolaire 1910-1911, les mémoires ci-après ont été acceptés pour le Doctorat ès sciences mathématiques :

Paris ; Faculté des Sciences ; *doctorat d'Etat.* — Caubet (Paul) :

Étude des principales inégalités du mouvement de la lune qui dépendent de l'inclinaison (décembre 1910).

CHAZY (Jean) : Sur les équations différentielles du troisième ordre et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes (décembre 1910).

SIRE (Jules) : Sur les fonctions entières de deux variables d'ordre apparent total fini (décembre 1910).

CHATELET (A.) : Sur certains ensembles de tableaux et leur application à la théorie des nombres (avril 1911).

GAU (Émile) : Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre par la méthode de M. Darboux (mai 1911).

ANNYCKE (abbé Th.) : Contribution à l'étude thermomécanique des tiges et des plaques (juin 1911).

GARNIER (René) : Sur les équations différentielles du troisième ordre dont l'intégrale génerale est uniforme et sur une classe d'équations nouvelles d'ordre supérieur dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes (juin 1911).

JANISZESWKI (Sigismond) : Sur les continus irréductibles entre deux points (juin 1911).

VILLAT (Henri) : Sur la résistance des fluides (juin 1911).

Doctorat d'Université. — GRAMONT (Armand de) : Essai d'aérodynamique du plan (juin 1911).

LÉMAIRE (Pierre) : Théorie des compas gyroscopiques (juillet).

Faculté de Nancy ; *doctorat d'État.* — ARNOULT (Jules) : Sur le mouvement d'un fil dans l'espace (juin 1911).

Faculté de Lille ; *doctorat d'État.* — BARRÉ (Eugène) : 1re thèse : Sur une classe de solutions des équations indéfinies de l'équilibre d'élasticité. — 2me thèse : Application de la géométrie cinématique à la théorie des surfaces engendrées par une courbe variable (juillet 1911).

J. Amsler-Laffon.

Nous avons appris avec regret la mort de M. J. Amsler-Laffon, le doyen des mathématiciens suisses, décédé le 3 janvier 1912, à Schaffhouse, à l'âge de 89 ans. Ses travaux appartiennent aux mathématiques appliquées. On lui doit de nombreux instruments et appareils de précision, notamment le *planimètre polaire*, auquel son nom restera toujours attaché, et des appareils destinés aux recherches sur la résistance des matériaux. Amsler était membre correspondant de la section de mécanique de l'Académie des Sciences de Paris, depuis 1892, et docteur honoraire de l'Université de Königsberg (1894).

Né à Stalden, près de Brugg (Argovie), le 16 novembre 1823, J. Amsler fit ses études à l'Université de Jéna (1843-44), puis à celle de Königsberg (1844-1847) ; il travailla ensuite pendant quelque temps à l'observatoire de Genève (1848), sous la direction

de Plantamour. En 1849 il fut admis comme privat-docent à l'Université de Zurich, puis en 1851 il fut nommé professeur de mathématiques et de physique au Gymnase de Schaffhouse. Au bout de trois ans il renonça à son enseignement pour se consacrer entièrement à l'atelier de mécanique de précision, qu'il avait déjà créé à côté de son enseignement, et qui ne tarda pas à conquérir une réputation mondiale.

Par son grand savoir et ses belles qualités d'inventeur et de constructeur, Amsler a eu le grand mérite de maintenir et de développer le contact entre les mathématiques pures et les sciences techniques. F.

Nouvelles diverses. — Nominations et distinctions.

Allemagne. — M. W. Kutta, professeur à l'Ecole technique supérieure d'Aix-la-Chapelle, est nommé professeur à l'Ecole technique supérieure de Stuttgard.

Autriche. — M. V. Pollack est nommé professeur de Géodésie à l'Ecole technique supérieure de Vienne.

M. Sleszinski est admis en qualité de privat-docent à l'Université de Cracovie.

Belgique. — M. A. Demoulin (Gand) est nommé correspondant de la Société royale des Sciences de Liège.

M. Bertrand est nommé répétiteur à l'Ecole des Mines de Liège.

France. — M. P.-H. Puiseux est nommé membre de la section d'Astronomie de l'Académie des Sciences de Paris.

Ecole polytechnique de Paris. — M. Hadamard, professeur au Collège de France, est nommé professeur titulaire pour la chaire d'analyse, en remplacement de M. Jordan, admis à la retraite.

M. d'Ocagne, professeur à l'Ecole des ponts et chaussées, est nommé professeur titulaire pour la chaire de Géométrie, en remplacement de M. Haag, décédé.

M. Geoffroy, professeur à l'Ecole centrale des Arts et Manufactures, est nommé chef des travaux graphiques.

MM. Vessiot, Fabry et Carrus sont nommés examinateurs d'admission et MM. Le Roux, Fouché, Cotton, examinateurs suppléants.

Iles Britanniques. — M. E. T. Whittaker, F. R. S., astronome royal d'Irlande, est nommé professeur de mathématiques à l'Université d'Edimbourg, en remplacement de M. G. Chrystal, décédé.

M. A. M. Grundy, « scholar » de Hertford College, est nommé « Senior mathematical Scholar » de l'Université d'Oxford pour 1912.

M. E. H. Neville, B. A., « Fellow » de Trinity College, Cambridge, est nommé « Allen Scholar ». Cette fondation a pour but l'encouragement des recherches mathématiques.

Suède. — M. Marcel Riesz est admis en qualité de privat-docent à l'Université de Stockholm.

Suisse. — M. Einstein, professeur à l'Université de Prague, a accepté un appel à la chaire de Physique mathématique qui vient d'être créée à l'Ecole polytechnique fédérale de Zurich, dont il est ancien élève et ingénieur diplômé.

Nécrologie.

E. Lemoine. — Les mathématiciens apprendront avec regret la mort de M. Emile Lemoine, décédé à Paris le 21 février 1912, dans sa 72e année. Bien connu par ses travaux en Géométrie et tout particulièrement comme créateur de la *Géométrographie*, E. Lemoine est l'un des fondateurs de l'*Intermédiaire des mathématiciens*.

NOTES ET DOCUMENTS

Commission internationale de l'Enseignement mathématique.

Compte rendu des travaux des sous-commissions nationales[1].

(6e article.)

ALLEMAGNE

La réforme de l'enseignement mathématique en Allemagne.

Die Entwicklung der mathematischen Unterrichts-Reform in Deutschland[2], von Dr. Rud. Schimmack, Oberlehrer am Gymnasium zu Göttingen. — Ce rapport forme le premier fascicule du tome 3 des *Abhandlungen* intitulé : Questions spéciales de l'enseignement mathématique dans les écoles supérieures. Il débute par une préface générale au Tome 3, rédigée par M. F. Klein.

Le rapport de M. Schimmack donne un aperçu historique très complet du mouvement de réforme de l'enseignement mathématique en Allemagne. L'auteur montre d'abord comment ce mouvement a pris naissance. Puis il examine en détail les progrès réalisés depuis 1907. Ce sont d'abord les travaux et les discussions qui ont eu lieu au sein de la Commission d'enseignement désignée par la Société des naturalistes et des médecins allemands, et qui, comme on sait, a joué un rôle important dans le mouvement de réforme. En dehors de cette Commission il donne également les résolutions votées par différentes associations, réunions de directeurs et enfin des indications concernant la Commission internationale de l'enseignement mathématique elle-même.

[1] Voir l'*Ens. math.*, 13e année, 1911, nos 1 à 4 ; 14e année, 1912, no 1.

[2] *Abhandlungen über den mathem. Unterricht in Deutschland*. Band III. Heft 1. — 1 fasc. de 146 p. ; 3 M. 60 ; B. G. Teubner, Leipzig.

Il signale ensuite les nouveaux plans d'études et les progrès réalisés effectivement dans l'enseignement élémentaire et moyen des jeunes filles et des garçons. Puis vient un aperçu des idées développées dans les publications, articles et ouvrages, et se rapportant au mouvement de réforme.

Par sa documentation très complète, l'ouvrage de M. Schimmack constitue un guide très précieux pour tous ceux qui désirent s'initier et suivre les discussions actuelles sur la réforme de l'enseignement mathématique.

Le fascicule se termine par une Note que nous signalons tout particulièrement à ceux qui s'intéressent aux écoles dites réales (ou gymnases scientifiques). Cette Note donne un projet fort bien conçu d'un plan d'études pour ces écoles. On sait que la Commission d'enseignement de la Société des naturalistes et médecins allemands, avait publié dans ses propositions de Meran un projet de plan d'études[1] pour les gymnases (enseignement classique). Il restait à élaborer un projet de plan d'études pour l'*Oberrealschule*. C'est ce qu'a fait M. Schimmack pour répondre à un vœu qui a été exprimé à plusieurs reprises de divers côtés. Nous renvoyons les lecteurs au projet élaboré par M. Schimmack en tenant compte dans une juste mesure des tendances actuelles.

FRANCE

Les mathématiques dans l'enseignement supérieur.

Enseignement supérieur, publié sous la direction de M. Alb. de Saint-Germain[2]. — Nous ne saurions mieux rendre compte du contenu de ce volume qu'en reproduisant l'intéressante introduction que M. Alb. de Saint-Germain, président de la Sous-Commission française, a placée en tête du volume sous le titre *Aperçu général sur l'Enseignement supérieur des Mathématiques*.

« On peut dire que les parties des mathématiques qui ressortissent à notre enseignement supérieur commencent au Calcul infinitésimal et à la Mécanique rationnelle pour s'étendre, dans des sens divers, jusqu'aux théories les plus générales et les plus élevées de la science. Ce vaste domaine ne fait pas immédiatement suite à celui des mathématiques élémentaires tel qu'il est envisagé dans l'ensemble de nos Lycées et assez exactement défini par le programme du Baccalauréat, 2e partie, mathématiques : entre eux s'étend une zone intermédiaire qui comprend notamment les parties fondamentales de l'Algèbre supérieure et de l'Analyse, la Géométrie analytique, la Dynamique du point, des compléments de Géométrie élémentaire et de Géométrie descriptive. Ces matières constituent, dans les Lycées, le cours de mathématiques spéciales, dans les Facultés, celui de mathématiques générales : des rapports sont présentés sur ces enseignements parallèles, l'un par M. Blutel *(enseignement secondaire)*, l'autre par M. Vessiot *(enseignement supérieur)*.

Les mathématiques supérieures sont enseignées dans divers établissements, en tête desquels il faut citer les Facultés des Sciences de nos Universités. Ces Facultés sont au nombre de seize : Besançon, Bordeaux, Caen, Clermont, Dijon, Grenoble, Lille, Lyon, Marseille, Montpellier, Nancy,

[1] Traduit dans l'*Enseignement mathématique* du 15 janvier 1906.

[2] Volume III des *Rapports* de la Sous-Commission française, in-8°, de 122 p.; 4 fr.; Librairie Hachette, Paris.

Paris, Poitiers, Rennes, Toulouse ; la Faculté d'Alger, récemment créée, n'est pas encore complète.

Le personnel enseignant se compose de professeurs et de chargés de cours, pour les chaires magistrales, et de maîtres de conférences ; les uns et les autres sont parfois chargés d'enseignements complémentaires. Nous n'avons pas de *privat docenten ;* mais des maîtres, en général étrangers à la Faculté, peuvent être autorisés à y faire des cours libres [1]. La Faculté est administrée par un Doyen, nommé par le Ministre sur la présentation de ses collègues.

En général, les cours sont publics, les conférences réservées aux étudiants inscrits, lesquels doivent posséder le Baccalauréat ou un titre équivalent. Ces étudiants sont libres, mais le règlement leur prescrit l'assiduité aux cours et aux exercices : d'ailleurs le plus grand nombre d'entre eux se proposent de subir des examens dont le programme diffère peu de celui des cours et où les juges sont généralement des professeurs de la Faculté.

Le premier grade après le Baccalauréat est la *Licence :* jusqu'en 1896, il y a eu trois ordres de licence, sciences mathématiques, physiques, naturelles ; le Ministre en arrêtait les programmes, ce qui tendait à uniformiser les enseignements fondamentaux dans les diverses Facultés. Le programme de la licence mathématique portait sur le Calcul infinitésimal, la Mécanique rationnelle, l'Astronomie, avec une épreuve pratique, calcul ou épure.

Le décret du 22 janvier 1896 vint donner plus de liberté aux étudiants et aux maîtres, par suite, plus de vie aux Facultés ; il institue les *Certificats d'études supérieures,* dont chacun se rapporte à une seule branche de la science, Mécanique rationnelle, Chimie appliquée, etc., et constitue assez exactement la sanction d'un cours déterminé ; il y a pour chaque certificat un examen séparé, avec épreuves écrite, pratique et orale. Le grade de licencié est conféré à tout étudiant pourvu de trois certificats choisis à son gré, ce qui lui permet d'étudier les parties de la science vers lesquelles il se sent le plus attiré ; toutefois, s'il veut que son grade de licencié lui serve pour entrer dans l'enseignement ou pour se présenter, soit à l'examen du doctorat, soit au concours d'agrégation, il ne peut choisir arbitrairement la nature de ses trois certificats : pour les mathématiciens, l'un de ces certificats est obligatoirement celui de Calcul différentiel et intégral, un autre celui de Mécanique rationnelle (voir le rapport de M. Vessiot).

Chaque Faculté peut, sauf approbation du Ministre, choisir les matières des certificats qu'elle délivrera et arrêter le programme de chacun d'eux ; en fait, il y a une assez grande uniformité pour les matières fondamentales. Le nombre des certificats créés par les diverses Facultés varie entre 11 et 25, augmentant presque chaque année, peut-être un peu trop vite. Pour fixer les idées, nous donnerons comme annexe, à la suite des deux premiers rapports (A et B, MM. Vessiot et Borel), les programmes des certificats délivrés par la Faculté de Paris. Certaines branches des mathématiques telles que la Théorie des nombres, la Géométrie supérieure comme l'entendait Chasles, les fonctions elliptiques et abéliennes, le Calcul des probabilités ne donnent pas lieu à des certificats ni, par suite, à un enseignement régulier [2] ; les cours professés dans nos universités sont moins nombreux que

[1] A la Faculté de Paris, MM. d'Ocagne, Ebert et Bachelier ont fait, en 1910, des cours libres sur le calcul graphique, le calcul des orbites cométaires et le calcul des probabilités.

[2] La Faculté de Paris vient de créer un cours sur la Théorie des nombres ; le Calcul des probabilités y est enseigné de temps en temps.

dans quelques universités étrangères ; peut-être, en revanche, sont-ils plus approfondis.

Le grade qui vient après la licence est le *Doctorat :* pour l'ordre des sciences mathématiques, le candidat doit composer et soutenir deux thèses sur des sujets choisis par lui. Ces thèses doivent constituer un travail sérieux et, en principe, contenir des résultats nouveaux, de manière à prouver que l'auteur est capable de creuser une théorie et de faire avancer la science. Souvent, le candidat ne présente qu'une thèse, mais alors il est interrogé sur une théorie importante, désignée à l'avance par la Faculté et sur laquelle il doit faire preuve de connaissances approfondies.

L'agrégation n'est pas un examen de Faculté, mais un concours ouvert par l'Etat pour le recrutement des professeurs des Lycées ; outre la licence, les candidats doivent posséder le *Diplôme* d'études supérieures (voir le 3e rapport, C) puis subir des épreuves écrites, orales et pratiques qu'étudie dans un très intéressant rapport (E) le regretté Jules Tannery.

A la Faculté des Sciences de Paris a été très intimement rattachée, depuis quelques années, l'Ecole normale supérieure, à laquelle est consacrée une grande partie du rapport de M. Tannery.

Une annexe de la même Faculté est l'Ecole pratique des Hautes-Etudes, section des Sciences mathématiques ; sous la présidence de M. G. Darboux, trois conférences y sont actuellement ouvertes : elles ont respectivement pour objets les applications géométriques de l'Analyse, la Mécanique et l'Astronomie, enfin la Mécanique physique et expérimentale.

Un rapport (D) de M. Vogt est consacré à l'enseignement technique de certaines Facultés.

A côté des Facultés des Sciences, je mentionnerai deux Ecoles préparatoires à l'enseignement supérieur des Sciences, installées à Rouen et à Chambéry : les Cours de Mathématiques y ont pour objet les éléments de l'Analyse, ceux de la Mécanique, la Géométrie appliquée et la Géométrie descriptive.

L'enseignement libre possède trois Facultés des Sciences à Angers, Lille, Lyon, et une Ecole supérieure des Sciences à Paris : ces établissements dépendent d'instituts catholiques ; leur enseignement est très analogue à celui des Facultés de l'Etat, mais la loi ne leur a pas accordé la collation des grades.

Le Collège de France, à Paris, est un grand établissement de nature particulière ; une notice succinte (F) sera consacrée à son enseignement mathématique.

A côté des établissements qui dépendent du Ministère de l'Instruction publique, il en existe d'autres, ressortissant à divers Ministères, où l'on enseigne aussi les mathématiques supérieures. Le plus important est l'Ecole polytechnique de Paris, destinée à la préparation des Ingénieurs de l'Etat, des Officiers d'Artillerie et du Génie. L'enseignement mathématique y porte sur le Calcul différentiel et intégral, la Mécanique rationnelle, la Géométrie descriptive, la Stéréotomie et quelques chapitres de l'Astronomie. Or, les études sont loin de se borner aux mathématiques et ne durent que deux années ; les élèves doivent fournir un travail intense, qui serait peut-être écrasant s'ils n'entraient fort bien préparés et à la suite d'une sélection rigoureuse. On s'est demandé s'il ne serait pas avantageux, comme cela a lieu dans d'autres pays, de laisser l'instruction théorique aux Universités, réservant l'instruction technique pour les écoles spéciales : je n'aborderai

pas cette grave et délicate question. D'ailleurs un rapport (G) de M. G. Humbert sera consacré à l'Ecole polytechnique.

A cette école se rattachent l'Ecole supérieure des Mines et celle des Ponts et Chaussées, installées à Paris : un certain nombre d'élèves sortant de l'Ecole polytechnique, en général les premiers, y reçoivent pendant trois années un enseignement qui les prépare à leurs fonctions d'ingénieur ; les mathématiques y figurent à un point de vue très technique. Mais ces écoles reçoivent aussi un assez grand nombre d'élèves libres admis à la suite d'un concours et pouvant sortir avec le diplôme d'ingénieur : on a organisé pour ces élèves externes une année préparatoire où l'enseignement mathématique comprend les parties essentielles de celui de l'Ecole polytechnique. Un rapport (H) de M. d'Ocagne est consacré à l'Ecole des Ponts et Chaussées, un rapport (I) de M. Garnier, à l'Ecole des Mines.

L'Ecole des Mines de Saint-Etienne prépare également des ingénieurs civils des Mines : l'enseignement y dure trois ans et un rapport (J) du directeur, M. Friedel, est consacré à la partie mathématique.

L'Ecole du Génie maritime, à Paris, a pour but de former les ingénieurs de la Marine et des ingénieurs libres, aptes à diriger des ateliers de construction, des travaux hydrauliques, etc. : une notice (K) de M. Janet lui est consacrée.

A l'Ecole nationale des Beaux-Arts sont institués, principalement pour la section d'architecture, des Cours de Mathématiques et de Mécanique, de Géométrie descriptive, de Stéréotomie, de Perspective (également pour la section de peinture), qu'on peut regarder comme se rapportant aux parties les moins difficiles des mathématiques supérieures. J'en dirai autant des Cours de Mathématiques pures et appliquées, de Mécanique appliquée qui sont professés à l'Institut national agronomique de Paris.

Je ne ferai que mentionner l'Ecole centrale des Arts et Manufactures, le Conservatoire national des Arts et Métiers qui appartiennent sans doute à l'enseignement supérieur, mais aussi à l'enseignement technique et, à ce titre, auront leur place dans notre quatrième volume. »

Voici la liste détaillée des rapports du Volume III :

A) Rapport sur l'Enseignement du Calcul différentiel et intégral, de la Mécanique rationnelle, de l'Astronomie et des Mathématiques générales dans les Facultés des Sciences en France, par M. E. Vessiot (19 p.).

B) Rapport sur les Enseignements mathématiques d'ordre élevé dans les Facultés des Sciences des Universités françaises, par M. Emile Borel (5 p.).

Annexe. — Faculté des Sciences de Paris : programmes des Certificats d'études supérieures pour l'année 1911 (11 p.).

C) Rapport sur les diplômes d'études supérieures de Sciences mathématiques, par M. A. de Saint-Germain (10 p.).

D) Rapport sur l'Enseignement mathématique dans les Instituts techniques des Facultés des Sciences, par M. H. Vogt (11 p.).

E) Rapport sur l'Enseignement des Mathématiques à l'Ecole normale supérieure et sur l'Agrégation des Sciences mathématiques, par M. Jules Tannery (15 p.).

F) Note sur l'Enseignement mathématique au Collège de France, par M. A. de Saint-Germain (3 p.).

G) Rapport sur l'Enseignement mathématique à l'Ecole polytechnique, par M. G. Humbert (11 p.).

H) Rapport sur l'Enseignement mathématique à l'Ecole nationale des Ponts et Chaussées, par M. Maurice d'Ocagne (8 p.).

I) Rapport sur l'Enseignement des Mathématiques à l'Ecole nationale supérieure des Mines, par M. René Garnier (4 p.).

J) Rapport sur l'Enseignement mathématique à l'Ecole nationale des Mines de Saint-Etienne, par M. Friedel (9 p.).

K) Note sur l'Ecole d'application du Génie maritime, par M. A. Janet (1 p.).

ILES BRITANNQIUES [1]

N° 3. — L'enseignement des mathématiques dans les écoles publiques élémentaires de Londres.

The Teaching of Mathematics in London Public elementary schools[2], by Mr. P. B. Ballard, District Inspector of schools under the London County Council. — Depuis une dizaine d'années aucun programme fixe concernant l'enseignement de l'arithmétique dans les écoles élémentaires n'a été présenté par le Board of Education. Malgré cela, cet enseignement diffère peu d'une école à l'autre et est plus ou moins basé sur le modèle suivant (Scheme B) publié annuellement par le Board de 1894 à 1905 (le programme ne concerne pas les écoles enfantines).

I. Les quatre opérations. Diviseurs et multiplicateurs ne dépassant pas 6. Ne pas dépasser le chiffre 99, soit dans les questions, soit dans les réponses.

II. Opérations combinées (argent). Diviseurs et multiplicateurs ne dépassant pas 12. Les sommes d'argent employées soit dans les questions soit dans les réponses ne devant pas dépasser 10 l.

III. Opérations simples et combinées (argent). Diviseurs et multiplicateurs ne dépassant pas 99. Ne pas employer de chiffres supérieurs à 99,999 dans les questions ou les réponses. Les sommes d'argent dans les questions et les réponses ne devant pas dépasser 99 l.

IV. Opérations combinées appliquées aux poids et mesures suivants (longueur, poids, capacité, temps). En longueurs, yards, feet et inches; en poids, tons, cwts., qrs., lbs., ozs.; en capacité, gallons, quarts, pints; en temps, jours, heures, minutes, secondes — sont les seules mesures à exiger pour IV et V. Les diviseurs et les multiplicateurs ne doivent pas dépasser 99.

V. Fractions ordinaires (fractions simples seulement). Pratique. Factures. Poids et mesures habituels.

VI. Fractions décimales (en excluant les fractions périodiques). Proportion simple ou règle de trois simple par la méthode de réduction à l'unité. Calcul d'intérêt simple sur un capital donné. Poids et mesures habituels. Mesure de rectangles et de solides rectangulaires; on n'exigera pas l'extraction des racines carrées et cubiques. (Garçons seulement).

VII. Fractions ordinaires et décimales. Moyennes et pourcentages. Caisse d'épargne. Fonds publics.

Du reste, même maintenant, la plupart des manuels dont on se sert dans les écoles élémentaires sont basés sur le tableau qui précède. Cependant la publication des « Suggestions to Teachers » en 1905, encouragea les maîtres à plus d'initiative, et, depuis cette époque, des divergences furent plus fréquentes.

---

[1] Ces rapports ont été résumés par M. J.-P. Dumur, Genève.

[2] Price Twopence. Wyman & Sons. Londres.

L'enseignement de l'arithmétique dans les écoles enfantines (Infants' Schools).

L'école enfantine proprement dite comprend 3 degrés pour enfants de six, cinq et au-dessous de 5 ans respectivement. Autrefois, on avait le tort, dans l'enseignement de l'arithmétique, de commencer les opérations beaucoup trop tôt. Actuellement le but du travail s'est transformé graduellement ; les maîtres cherchent tout d'abord à faire bien saisir à leurs élèves les relations fondamentales des premiers nombres entiers et les exercent à de nombreuses applications pratiques sur des objets simples et familiers (Méthode Grübe) : On fixe d'abord la notion de l'unité, puis on s'occupe des nombres 2, 3, 4. . . , à l'aide de manipulation d'objets et de nombreuses questions orales, on cherche à mémoriser les résultats afin d'éviter de compter par unité.

On peut présenter les objections suivantes à ce système :

1. On ne peut pas considérer l'unité en elle-même. Sa notion ne devient intelligible que par contraste avec plus d'un.

2. Les leçons risquent de devenir monotones. Il est bien difficile de maintenir en éveil l'intérêt d'enfants de six ans sur le nombre 7 pendant toute une leçon, surtout si cette leçon a déjà été donnée plusieurs fois.

3. On ne devrait pas restreindre le calcul sous prétexte qu'il doit marcher de pair avec l'analyse, et l'on devrait connaître quelque chose sur le nombre 20 avant d'avoir épuisé ce qui concerne le nombre 8.

4. Le rapport des nombres, en d'autres termes la notion de mesure n'est pas suffisamment représenté.

5. Les diverses opérations ne se présentent pas généralement comme un besoin aux yeux de l'enfant — ce qui est une objection très sérieuse.

6. Le but qu'on se propose est rarement atteint. Il est bien rare qu'un enfant de cinq ans puisse se servir convenablement de nombres plus grands que 5 ou un enfant de six ans de nombres plus grands que 10. Il est bien rare qu'on obtienne cette mémorisation des résultats et l'enfant continue généralement à compter par unités.

7. Enfin, je doute fort qu'il soit avantageux d'enseigner les nombres à des enfants au-dessous de 7 ans. J'ai en effet de bonnes raisons pour croire que cet enseignement constitue une perte de temps pour les maîtres, et est contraire au développement intellectuel de l'enfant.

Du reste ces objections se font sentir dans nos écoles, et le système Grübe proprement dit a été conséquemment modifié (emploi de prismes rectangulaires de différentes hauteurs pour apprendre à mesurer ; usage de jouets tels que soldats, animaux de bois, arbres, corde à sauter, volant, le jeu du marchand avec des jetons en guise d'argent, dessins, construction de modèles).

Il semble résulter de certaines expériences qu'il est inutile de commencer trop tôt l'enseignement de l'arithmétique. L'esprit de l'enfant n'est pas suffisamment préparé pour en saisir la portée, et le temps qu'on y consacre pourrait être plus utilement employé.

Les mathématiques dans les classes plus avancées (Senior Departments).

Si l'on compare les questions d'examen d'il y a quelques années avec celles d'aujourd'hui, on s'apercevra des tendances suivantes :

1. L'arithmétique est remplacée peu à peu par les mathématiques. La géométrie, les mesures et l'algèbre s'introduisent petit à petit.
2. Les types conventionnels fixes d'opérations sont de plus en plus abandonnés.
3. Les exemples choisis sont relatifs à la vie journalière des enfants.
4. Les applications pratiques sont toujours plus abondantes.

Considérons d'abord cette tendance d'élargissement du domaine de l'arithmétique et du fusionnement des diverses branches des mathématiques. Il y quelque cinq ou six ans, l'algèbre fut introduite comme sujet distinct, dans les programmes d'un grand nombre d'écoles, mais elle ne consistait alors qu'en une manipulation mécanique de symboles n'ayant aucune relation avec l'arithmétique. Actuellement, l'algèbre, en tant que branche, disparaît de plus en plus, sauf dans les écoles centrales (Central Schools), et des tentatives sont faites d'en introduire un peu en arithmétique. Ces tentatives sont dignes de louanges, mais n'ont pas eu beaucoup de succès. La question de savoir si l'algèbre devrait être enseignée dans une école élémentaire est peut-être discutable. Personnellement je suis pour l'affirmative, on devrait s'en servir lorsque son avantage sur l'arithmétique est manifeste. Le maître devrait se rendre compte que l'élève lui-même en ressent le besoin.

La géométrie lorsqu'elle figure au programme comme branche séparée consiste en problèmes à résoudre à l'aide de la règle et du compas. Le maître traite un problème à la planche et les élèves le copient sur leur cahier de dessin Cette méthode est presque universellement répandue, et c'est certainement une mauvaise méthode. On devrait lui substituer la méthode heuristique, car s'il est une branche pour laquelle elle se recommande tout spécialement, c'est bien la géométrie. La géométrie théorique n'est enseignée que dans les écoles centrales.

La transformation la plus considérable de ces dernières années a été l'introduction dans les écoles de ce qu'on appelle l'arithmétique pratique caractérisée par l'emploi d'objets matériels, et la vérification des conclusions par des expériences concrètes. Malheureusement, on a le tort de reléguer cette arithmétique pratique à la fin de l'année scolaire alors qu'elle devrait y figurer au début. En second lieu, le travail pratique est souvent exécuté par le maître et non par les élèves. Enfin, ces opérations pratiques exécutées pour ainsi dire sans but bien précis risquent de devenir monotones. Tout ennui disparaîtrait si on les utilisait pour obtenir quelques résultats intéressant l'élève, comme la solution d'un problème ou la construction d'un objet. Un domaine spécial de l'arithmétique qui gagnerait à ce qu'on y développât davantage le côté pratique, c'est la théorie des fractions, surtout des fractions décimales.

En ce qui concerne le côté théorique de l'enseignement de l'arithmétique, j'ai constaté que l'étude des proportions se fait d'une manière insuffisante. Il serait bon d'établir une certaine liaison entre les notions de rapport et de proportion et les figures géométriques semblables. Il serait avantageux également de ne pas renvoyer l'étude des moyennes à la dernière année du programme scolaire ; leur connaissance permettrait en effet aux élèves d'effectuer leurs mesures avec plus d'exactitude, car une moyenne donne généralement un résultat plus approché qu'une mesure unique.

L'enseignement de l'arithmétique se propose d'atteindre deux résultats distincts. L'un consiste dans la rapidité et l'exactitude des calculs, l'autre

dans l'intelligence de la résolution des problèmes. Ces deux buts ne sont certainement pas incompatibles, mais il est difficile de bien répartir le temps qui doit leur être consacré. On peut constater durant ces deux dernières années, une tendance à développer le travail intelligent au dépens, en cas de besoin, de l'exactitude mécanique.

Signalons encore le fait regrettable que la dernière année de l'enseignement est presque exclusivement consacrée aux questions de pourcentages, moyennes, escomptes, etc. Heureusement que cet état de chose tend à disparaître et qu'on remplace de plus en plus ce programme défectueux par une récapitulation générale.

Reste enfin la question de l'enseignement mathématique dans les écoles de jeunes filles. Doit-il être le même que dans les écoles de garçons ? Je ne le pense pas. Diverses expériences ont été faites et prouvent que les filles n'ont généralement pas les mêmes aptitudes pour le raisonnement mathématique que les garçons. En outre, les conditions même d'existence et les exigences scientifiques ne sont évidemment pas les mêmes chez les filles que chez les garçons. Du reste, ces faits sont généralement reconnus et les programmes sont élaborés en conséquence. Citons en particulier l'intéressante leçon d'arithmétique domestique introduite dans la classe supérieure d'une école de jeunes filles.

Les plans d'études mathématiques.

Dans les écoles élémentaires ordinaires, on ne discerne pas de tendances spéciales, technique, commerciale, industrielle, etc., dans les programmes. Tous les élèves quelle que soit leur vocation future reçoivent le même enseignement. Dans les Ecoles Centrales, cependant, on distingue deux sortes d'enseignement, l'un industriel, l'autre commercial (sans parler de l'enseignement domestique lorsqu'il s'agit d'une école de filles). Ces Ecoles Elémentaires Centrales, une fois complètes, seront au nombre de 55 ; les élèves y entrent à 11 ans et y restent 4 ans. Sur ces 55 écoles, 12 seront commerciales, 16 industrielles et 27 commerciales et industrielles. Le programme de mathématiques commun pour les deux genres d'écoles comprend l'arithmétique, l'algèbre, le dessin à l'échelle, les mesures et la géométrie expérimentale. Pour les écoles commerciales, on trouvera en outre les diverses opérations de banques et transactions commerciales et pour les écoles industrielles la trigonométrie, l'algèbre graphique, la cinématique et l'usage d'instruments tels que la règle à calcul, le vernier, le micromètre et le théodolite. La spécialisation dans les branches domestiques pour les Ecoles Centrales de jeunes filles est poussée un peu plus loin que dans les écoles ordinaires. L'enseignement mathématique des classes industrielles est plus varié et plus concret que celui des classes commerciales.

Quant aux méthodes d'enseignement, il est certain qu'elles s'améliorent. La réforme la plus caractéristique a été le développement du côté pratique de l'instruction dont il a déjà été question plus haut. Dans certaines classes, on permet aux élèves de composer eux-mêmes des problèmes ; c'est un procédé avantageux qui devrait être répandu dans toutes les écoles. En outre, différents systèmes sont expérimentés et pourront conduire à de bons résultats. En somme, on cherche de plus en plus à intéresser l'enfant et à lui faire prendre une part plus active à son propre développement.

N° 4. — L'enseignement des mathématiques élémentaires dans les écoles publiques élémentaires d'Angleterre.

The Teaching of Elementary mathematics in English Public Elementary Schools[1], by Mr. H. J. Spencer, Head Master of the Bloomfield Road Council School, Woolwich. — En Angleterre, les écoles élémentaires proprement dites sont suivies par des enfants de 4 à 14 ou 15 ans. Les quatre premières années de cette période se passent à l'école préparatoire ou école enfantine (infant school) et le reste du temps dans les degrés supérieurs (senior department). Il faut citer en outre les Ecoles Centrales (Central Schools), qui deviennent de plus en plus nombreuses et occupent une place importante dans l'enseignement élémentaire.

Des transformations considérables se sont opérées dans nos écoles durant ces dix dernières années, particulièrement dans l'enseignement mathématique. L'ancienne méthode, qui consistait à traiter les diverses opérations de l'arithmétique par des procédés purement mécaniques, imparfaitement compris, est remplacée par un enseignement plus objectif, où le côté pratique joue un rôle prépondérant. Mais cette réforme est loin d'être complète, car les maîtres anciens, qui ont 20, 30 ou 40 années d'expérience, ont de la difficulté à se conformer aux nouvelles exigences.

Le programme connu sous le nom de Scheme B, et publié en 1894 par le Board of Education, marque déjà un progrès sensible sur les précédents : il en a été parlé à propos du rapport 3. A partir de cette date, chaque école eut à établir son propre plan d'études. Malgré l'amélioration que l'on a pu constater durant ces dix dernières années, l'enseignement mathématique laisse encore bien à désirer dans la plupart de nos écoles.

Aux yeux de l'auteur, les mathématiques dans les écoles élémentaires devraient, dans les conditions actuelles, comprendre les sujets suivants :

L'arithmétique telle qu'on l'envisage habituellement, l'arithmétique pratique, la géométrie simple, étudiée expérimentalement, avec travaux de construction et peut-être, dans les classes supérieures, un peu de travail déductif. Les mesures simples.

L'algèbre, en tant qu'arithmétique généralisée et dans sa forme la plus simple, conduisant à l'usage de l'équation simple pour la résolution de problèmes d'arithmétique.

De plus, en ce qui concerne la valeur et le but de l'enseignement mathématique dans les écoles élémentaires, il faut spécifier :

1. Que le jeune enfant doit y acquérir et utiliser intelligemment les notions et procédés fondamentaux relatifs aux nombres. C'est là la tâche essentielle des écoles enfantines.

2. Que l'enfant doit y acquérir la rapidité et l'exactitude suffisante dans les calculs pour répondre aux besoins ordinaires de la vie courante.

3. Qu'il doit être capable d'appliquer les principes de son travail mathématique à ces besoins.

4. Qu'il doit arriver à une connaissance suffisante des opérations sur les nombres et de leur aspect quantitatif, pour être capable d'apprendre et de

[1] Price Twopence Halfpenny.

comprendre les procédés commerciaux ou industriels auxquels il pourra avoir affaire. (Ceci ne veut nullement dire que les méthodes commerciales ou industrielles doivent être enseignées à l'école.)

5. Que l'enseignement des mathématiques élémentaires, par sa nature même, doit fournir un entraînement intellectuel tout spécial (investigation, analyse, synthèse, comparaison, raisonnement, déduction, induction).

Les quatre derniers points nous font envisager les mathématiques à deux points de vue :

a) L'aspect utilitaire concernant la pratique de tous les jours.

b) Les mathématiques comme entraînement intellectuel et méthode de pensée.

Les avis sont partagés relativement à ces deux aspects. Insistons cependant sur le fait que l'entraînement intellectuel peut s'acquérir en grande partie par un travail d'un genre essentiellement utilitaire.

Vient ensuite un programme complet de l'enseignement de l'arithmétique dans les écoles enfantines et les degrés supérieurs.

Examinons maintenant quelques difficultés du ressort de l'administration scolaire.

1. Les classes trop nombreuses. Certaines classes ont jusqu'à 50 ou 60 élèves. Or les mathématiques, plus que toute autre branche, réclament une grande attention individuelle et un échange de vues constant entre maître et élève, idéal déjà difficile à atteindre avec des classes de 30 à 40 élèves.

2. Les exigences toujours croissantes des programmes L'arithmétique et sujets relatifs (géométrie et un peu d'algèbre) comprenant 2 ½ h. à 5 h. par semaine. Il faut y joindre toutes les autres branches (anglais, histoire, géographie, dessin, sciences, ouvrage à l'aiguille pour filles, travaux manuels ou sujets domestiques, musique et exercices physiques.

3. Dans les grandes villes, le directeur de l'école cesse souvent d'être réellement un maître. Il est trop occupé par son travail administratif. Souvent même le personnel enseignant doit le seconder dans cette besogne, et cela porte préjudice à cette continuité progressive si nécessaire au travail mathématique.

Passons aux défectuosités touchant à l'enseignement même.

1. L'enseignement de l'arithmétique et de la géométrie n'est pas suffisamment concret. Il faut reconnaître cependant que, dans bien des écoles, des tentatives sont faites pour développer ce côté-là de l'enseignement (usage de cartes, briques, papier quadrillé, pièces, balances, etc.) ; malheureusement, ce mouvement est loin d'être général. Mais même lorsque l'importance du travail pratique est reconnue, on ne lui attribue souvent pas la vraie place et la limite qui lui conviennent. Il ne faut pas qu'il se réduise à la répétition d'exercices purement mécaniques.

2. Le travail oral est insuffisamment pratiqué, si on le compare au travail écrit, spécialement dans les degrés inférieurs de la Senior School.

3. Dans beaucoup d'écoles, on n'accorde pas une attention suffisante aux quelques principes et procédés fondamentaux : on leur substitue des règles mécaniques qui contribuent bien peu au développement intellectuel des élèves.

4. On se plaint généralement de ce que l'arithmétique n'est pas reliée aux autres sujets du programme scolaire. L'algèbre, la géométrie, les travaux manuels, les sciences et la géographie sont les branches pour lesquelles cette corrélation a le plus d'importance.

5. Les programmes sont souvent surchargés de questions inutiles et d'opérations qui ne se rencontrent jamais dans la pratique.

6. L'introduction des fractions ordinaires et décimales se fait trop tardivement, et les fractions décimales ne sont pas étudiées suffisamment ; on les convertit trop souvent en fractions ordinaires.

7. On devrait encourager les élèves à évaluer grossièrement leurs résultats à priori et à les vérifier après coup grosso modo ; à traiter leurs problèmes par une seconde méthode servant de preuve à la première.

8. Durant ces dernières années, on a quelque peu abusé des représentations graphiques dans certaines écoles.

Ce qui a été dit précédemment s'applique également, en principe, aux Ecoles Centrales (Higher Elementary or Central Schools). Les mathématiques y sont plus approfondies que dans les écoles élémentaires ordinaires et les élèves y reçoivent une préparation industrielle ou commerciale plus effective. Ces écoles, du reste, diffèrent considérablement suivant les localités. A Londres, on peut les classer en trois catégories : Les unes présentent un caractère commercial, les autres ont une tendance industrielle, et les dernières présentent une combinaison de ces deux points de vue.

On trouvera dans le rapport même un programme d'une Ecole centrale de Londres, située dans un district industriel. Le temps consacré aux mathématiques et branches corrélatives se répartit à peu près comme suit : Dessin géométrique, 1 h. ; autre dessin, 2 h. : arithmétique, algèbre, géométrie théorique et géométrie pratique, 5 ½ h. ; sciences, 2 ½ h. ; main-d'œuvre (handicraft), 2 ½ h.

L'école comprend quatre années d'études, les élèves y entrent à 11 ans, leur nombre varie de 30 à 40 par classe. Des laboratoires de physique et de chimie, ainsi qu'un atelier pour le travail du bois et des métaux y seront probablement aménagés.

Environ 60 à 70 pour cent des élèves deviennent d'habiles industriels (spécialement mécaniciens), quelques-uns embrassent une carrière commerciale, et le reste est destiné à diverses vocations de second ordre.

Dans ce résumé sommaire, nous ne pouvons entrer dans les détails concernant les différentes branches mathématiques enseignées dans les Central Schools, on les trouvera dans le rapport même. Contentons-nous de faire quelques remarques sur la méthode d'enseignement de l'arithmétique et sur les moyens d'en tirer le plus grand parti possible.

Les résultats doivent être acquis autant que possible pratiquement, par l'expérience individuelle des élèves. Qu'on résolve d'abord les problèmes d'une façon concrète, dans la mesure du possible, à l'aide d'un matériel approprié, afin que l'enfant soit à même de comprendre clairement les questions qui lui sont soumises. Traiter ces questions par diverses méthodes se confirmant les unes les autres. Pratiquer surtout l'enseignement oral. Avancer l'étude des fractions décimales. S'appuyer sur les quelques procédés et principes fondamentaux plutôt que sur un certain nombre de règles fixes. Généraliser graduellement l'arithmétique ordinaire ; introduire de bonne heure le symbole x et l'équation algébrique. Utiliser de petits nombres. Rechercher les corrélations réelles de l'arithmétique et des autres branches. N'introduire les symboles que lorsque le besoin s'en fait sentir ; faire comprendre aux élèves toute leur utilité, et, dès qu'ils commencent à abandonner d'eux-mêmes les procédés concrets, les encourager à se servir des méthodes abstraites dans les divers domaines d'expérience.

No 5. — Le programme de l'Algèbre à l'Ecole Secondaire.

The Algebra Syllabus in the Secondary School, by Mr. C. Godfrey, Head-master of the Royal Naval College, Osborne.

I. *Introduction.* — On peut diviser les élèves qui étudient les mathématiques dans les Ecoles Secondaires en *trois catégories* :

1. Ceux qui désirent se vouer aux mathématiques et étudieront plus tard les mathématiques supérieures à l'Université.

2. Ceux qui se destinent à la carrière d'ingénieur ou pour lesquels les mathématiques constituent une des branches importantes de leur éducation.

3. Ceux qui étudient les mathématiques comme une branche de leur éducation générale.

Nous désignerons les élèves faisant partie des deux premières catégories par le terme de spécialistes, les autres par celui de non-spécialistes.

Les spécialistes forment une importante minorité chez les garçons et sont en nombre insignifiant chez les filles.

L'enseignement de l'algèbre, tel qu'il se pratique actuellement, sacrifie les intérêts des non-spécialistes à ceux des spécialistes. C'est là un des points dont s'occupe tout particulièrement le présent rapport, et pour lequel il faudra trouver un remède, tout en se gardant de tomber dans l'autre extrême et de sacrifier les intérêts des spécialistes à ceux des non-spécialistes.

Lorsque les intérêts de deux groupes d'étudiants divergent, le premier remède est, semble-t-il, de les séparer en deux classes distinctes. Mais il est difficile de distinguer de bonne heure un spécialiste d'un non-spécialiste, et la bifurcation ne peut guère se faire avant l'âge de 16 ans. Ensuite cela complique l'organisation de l'école et nuit à sa solidarité.

Un meilleur procédé consisterait à élaborer un programme convenable que tous les étudiants pourraient suivre jusqu'à un certain degré. Les non-spécialistes ne pousseraient pas plus loin leur éducation mathématique scolaire, et il resterait encore une ou deux années aux spécialistes pour compléter la leur. Ce procédé est du reste généralement adopté dans les écoles anglaises, mais la difficulté réside dans l'élaboration d'un programme commun satisfaisant simultanément les intérêts des deux catégories d'étudiants.

Tous les élèves, en quittant l'école, vers l'âge de 19 ans, devraient avoir une connaissance suffisante de la trigonométrie et une idée des principes les plus simples de la mécanique étudiés expérimentalement. On devrait aussi, selon l'opinion de quelques-uns, les initier aux notions fondamentales du calcul infinitésimal. Mais, pour introduire ce nouveau domaine, il est nécessaire de lui faire de la place et de se débarrasser de certaine matière encombrante. Ce procédé de désencombrement s'est déjà pratiqué d'une manière sensible en géométrie ; en arithmétique, il reste encore beaucoup à faire à ce point de vue. Mais, dans ce rapport, nous devons nous occuper plus spécialement de l'algèbre et de la sélection concernant ce domaine. Il s'agira de distinguer entre l'essentiel et le superflu.

II. *L'algèbre dans le programme de l'Ecole Secondaire.* — Les premières années du XXe siècle constituent une époque d'importantes transformations en matière éducative, et spécialement dans le domaine des mathématiques. Autrefois, ce domaine était plus ou moins considéré comme une branche à part ayant ses propres méthodes et poursuivant son propre idéal, idéal

que l'on pourrait désigner en gros par les termes de « discipline de l'esprit ». Actuellement, il en est tout autrement ; les empiétements des mathématiques dans d'autres domaines se font de jour en jour plus importants : les ingénieurs, physiciens, chimistes se réclament de plus en plus de leurs résultats. Ces transformations, en ce qui concerne les études élémentaires, furent surtout sensibles en géométrie et en arithmétique. En outre, un important mouvement s'est manifesté en faveur du fusionnement des diverses branches des mathématiques.

Quant à l'algèbre, il importe de l'envisager de façon différente, suivant qu'on la considère comme branche d'étude scolaire ou comme moyen d'investigation du mathématicien. A l'école, l'algèbre doit être utilitaire, dans son sens le plus large, et l'élève doit être capable d'en ressentir le besoin et d'en comprendre l'utilité. L'usage des lettres en guise de nombres est un procédé qui se présente naturellement à l'esprit humain. L'expérience montre que le symbolisme, introduit avec discrétion au moment psychologique voulu, semble naturel aux élèves et est accepté sans aucune contestation. Toutes les opérations élémentaires de l'algèbre sont des exemples de généralisation symbolique, et elles peuvent très bien servir comme moyen d'introduction dans ce domaine. Le programme mathématique peut être considéré comme un organisme s'accroissant peu à peu, chaque nouveau sujet s'appuyant sur les précédents. Peu à peu de nouveaux objets se présenteront comme domaine d'investigation de l'algèbre, entre autres la géométrie et la physique, et enfin le calcul infinitésimal. Pour que l'enseignement soit un acheminement progressif vers le calcul infinitésimal, il faut développer par tous les moyens ce que les Allemands appellent la « Funktiondenken » et que nous désignerons par l'« idée de fonctionnalité ». Le monde extérieur présente une foule d'exemples propres à illustrer cette notion. En fait, nous vivons dans une atmosphère de fonctionnalité. La physique, entre autres, est particulièrement riche en exemples de cette nature ; la géométrie (y compris la trigonométrie) également. Du reste, l'opinion que la notion de fonctionnalité doit former l'idée directrice de l'enseignement mathématique est, à l'heure qu'il est, très généralement répandue.

III. *Détails concernant le programme des non-spécialistes.* — Si, dans l'enseignement secondaire, on consacre à l'algèbre une partie excessive du temps destiné aux mathématiques, cela tient à ce que les maîtres se préoccupent avant tout de faire acquérir à leurs élèves une grande habileté dans la manipulation mécanique d'expressions algébriques. Ce qui ne veut pas dire qu'ils exercent leurs élèves à cette manipulation mécanique sans leur faire comprendre ce qu'ils font, mais ils désirent que leurs élèves comprennent, afin de manipuler correctement : or, c'est précisément l'inverse qui devrait avoir lieu. Le but à poursuivre ne consiste pas dans une habile manipulation, mais bien dans la compréhension du sujet et dans son utilisation appropriée. Ce n'est pas à dire que tout exercice mécanique doive disparaître du programme ; mais qu'il se fasse de préférence sur une matière utile.

L'auteur passe ensuite en revue, dans une discussion serrée, les divers domaines de l'algèbre telle qu'elle est enseignée à l'Ecole Secondaire. Il fait diverses propositions concernant la suppression de nombreux sujets ne présentant pas d'utilité pour les non-spécialistes. Il n'est pas possible d'entrer ici dans les détails sur les raisons qui motivent cette suppression. Bornons-nous à citer ces sujets : Démonstrations formelles des lois fondamentales : facteurs dépassant le second degré ; fractions (excepté celles ayant pour dé-

nominateur un monôme ou une expression linéaire) : le plus grand commun diviseur ; longues multiplications et divisions ; équations linéaires simultanées à trois inconnues ; équations littérales (sauf celles relatives à des formules) ; racines carrées de polynômes ; progressions ; démonstrations formelles des lois concernant les puissances ; exercices compliqués sur les puissances à exposants fractionnaires et négatifs et sur les quantités irrationnelles ; équations simultanées dans lesquelles les deux équations sont du second degré ou de degré supérieur ; le théorème du reste (si un polynôme $f(x)$ est divisé par $x - c$, le reste est $f(c)$) ; nombres imaginaires et complexes ; théorèmes sur les rapports et proportions ; théorie du trinôme du second degré ; permutations et combinaisons ; échelles de notation ; binôme, série exponentielle et logarithmique ; artifices de calcul et manipulations « élégantes ».

Par contre, on consacrera plus de temps à l'étude de la variation de deux quantités liées par une relation simple. Une seule variable indépendante est bien suffisante pour une première étude de la variation.

Grâce aux suppressions proposées (et à d'autres qui pourront se faire également dans le programme d'arithmétique), on disposera d'un temps suffisant pour introduire les trois sujets suivants : trigonométrie numérique ; mécanique ; calcul infinitésimal.

La trigonométrie sera étudiée dans ses relations avec la géométrie, l'arpentage, la mécanique, etc. Elle comprendra une étude numérique et graphique de la tangente, du sinus et du cosinus ; la résolution des triangles rectangles, d'abord sans l'aide des logarithmes ; la résolution des triangles quelconques, d'abord par décomposition en triangles rectangles, puis à l'aide des deux formules

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad \text{et} \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\cos A\ ;$$

de nombreuses applications concrètes ; pas d'autres formules que les deux précédentes et

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A}, \qquad \cos^2 A + \sin^2 A = 1.$$

En mécanique, on s'occupera des sujets suivants : recherche expérimentale des conditions d'équilibre de trois forces ; composition et décomposition de forces ; moments ; centre de gravité ; frottement ; mesure du travail, de la vitesse et du rendement des machines simples ; la notion de la conservation de l'énergie.

Pour le calcul infinitésimal, il faut recommander le livre de M. J. W. Mercer, of the Royal Naval College, Dartmouth : « Calculus for Beginners ». On déterminera d'abord le gradient (la pente) en un point d'une courbe, graphiquement et analytiquement. Une fois en possession de cette notion fondamentale du calcul infinitésimal, on traitera successivement les sujets suivants : diagrammes des espaces et des vitesses ; différentiations simples ; maxima et minima dans les cas ne présentant pas de difficultés insurmontables ; intégrale indéfinie ; intégrale définie ; relation entre les deux ; nombreuses applications (aires, volumes, centres de gravité, travail).

Si l'on compare le programme qui précède avec le plan d'études correspondant des lycées français, on se rendra facilement compte qu'il n'a rien d'exorbitant, d'autant plus qu'en Angleterre le temps consacré aux mathématiques est environ le double de celui dont on dispose dans ces lycées.

ITALIE

Les études de doctorat en mathématiques et la section de mathématiques des écoles de préparation à l'enseignement moyen.

Sugli studi per la laurea in Matematica e sulla sezione di matematica delle scuole di magistero. Relazione di S. Pincherle, professore nella R. Università di Bologna.

Les Facultés de Sciences possèdent une section de mathématiques dont le but est double :

1° Donner aux futurs ingénieurs la préparation qui leur permettra de suivre les « Ecoles d'application ».

2° Préparer les aspirants au doctorat en mathématiques.

Le premier point devant faire l'objet d'un rapport spécial, c'est au second que M. Pincherle consacre son exposé.

Le doctorat en mathématiques s'obtient légalement après quatre années d'études, les deux premières conduisent à la *licence* qui donne accès aux Ecoles d'Application ou encore au second cycle de deux ans de mathématiques pures.

En 1906, les deux licences jusqu'alors identiques ont été diférenciées du fait que les candidats aux écoles d'application ont à subir un examen de *Minéralogie* et un autre de *dessin artistique et d'architecture élémentaire,* tandis que les branches suivantes sont obligatoires pour les deux licences :

Physique, Chimie organique et inorganique, Analyse algébrique, Analyse infinitésimale, Géométrie analytique, Géométrie projective et descriptive avec dessin.

En outre des exercices obligatoires pour les élèves des deux sections ont lieu sous la direction d'assistants : *Analyse algébrique et infinitésimale. Géométrie analytique et descriptive.*

Le double but de ces études préparatoires entraîne quelques inconvénients, il faudrait pouvoir donner une direction différente à plusieurs des cours obligatoires selon qu'ils sont destinés à de futurs ingénieurs, à de futurs savants ou à de futurs maîtres de l'enseignement moyen. Dans quelques universités on a cherché un remède d'ailleurs insuffisant en créant quelques cours supplémentaires destinés exclusivement aux étudiants en mathématiques pures.

Ailleurs l'inconvénient risque de s'accentuer si, comme elles en ont l'intention, quelques Facultés, imitant les cours de préparation aux écoles polytechniques, introduisent la *Mécanique rationnelle* dans le programme des deux premières années, il pourrait en résulter que d'autres cours essentiels perdent la profondeur et l'extension nécessaires aux mathématiques pures.

Après deux ans d'étude les nouveaux « licenciés » se séparent, 7 à 10 % d'entre eux poursuivent les études mathématiques pures ; on compte parmi ces derniers près de la moitié de demoiselles.

Ils ont à suivre les conférences de l'école de préparation à l'enseignement moyen *(Scuola di Magistero)* et cinq ou six des cours suivants : *Analyse supérieure, Géométrie supérieure, Mécanique rationnelle, Mécanique supérieure, Géodésie théorique, Astronomie, Physique mathématique.*

Seule la *Mécanique rationnelle* se retrouve partout, confiée à un titulaire, une ou plusieurs des autres branches manquent à telle ou telle Faculté.

Tout étudiant ayant suivi le cours de Mécanique rationnelle et au moins quatre des autres cours, après avoir subi les examens oraux qui s'y rapportent, peut se présenter à l'examen de doctorat auquel procède avec une certaine solennité une commission de onze personnes (sept professeurs de la Faculté et quatre privat-docents).

L'examen comprend la discussion d'une dissertation écrite, présentée par le candidat (thèse de doctorat), et l'exposition orale de deux ou trois sujets de moindre importance (petites thèses orales). Si le candidat obtient des onze examinateurs une moyenne d'au moins 6 sur 10, il se voit proclamé « Docteur en Mathématiques » par le doyen de la Faculté.

Des candidats qui satisfont strictement au minimum légal, qui sont favorisés d'un peu de mémoire et de l'indulgence du jury peuvent obtenir ce titre sans posséder une culture mathématique bien exceptionnelle.

Mais souvent aux quatre années réglementaires d'études les candidats en ajoutent une cinquième, facultative (telle est de longue date la coutume à Bologne), destinée à la préparation de la thèse et à l'audition de cours spéciaux comme ceux de l'*Ecole normale supérieure* de Pise, de l' « *Instituto consorziale* » de Pavie, des séminaires mathématiques récemment créés aux Facultés de Sciences de Rome et de Naples.

L'occasion ne manque pas dans les principales universités, d'acquérir une profonde et large culture mathématique; on peut néanmoins exprimer quelques désirs, par exemple de voir différencier plus nettement la direction scientifique du but professionnel, de voir diminuer le nombre des établissements scientifiques afin de permettre la création de quelques grands foyers intellectuels.

Aux Facultés des Sciences sont adjointes, en vue de la préparation des maîtres des écoles moyennes, des « Scuole di Magistero » où un à deux professeurs donnent des cours sur les méthodes d'enseignement et sur les limites du programme des écoles secondaires.

Le diplôme de « maître » décerné par ces écoles est recherché lors de la nomination de professeurs secondaires.

L'influence de ces écoles est malheureusement insuffisante, le peu d'importance que les règlements leur attribuent est caractérisé par le maximum de une heure de cours par semaine et par les honoraires dérisoires qu'on y consacre. Dans quelques Facultés elles n'existent que de nom et si dans quelques autres leur efficacité est effective, on le doit à l'initiative personnelle et désintéressée de quelques professeurs.

La disposition qui met les écoles secondaires à la disposition des « Scuole di Magistero » comme champ d'exercice est restée lettre morte.

Dans quelques universités des prix récompensent les meilleures thèses, par exemple la Fondation Corsi à Rome, les prix Vittorio Emmanuele et Merlani à Bologne.

Le rapport de M. le Prof. Pincherle contient une statistique des nombres d'élèves inscrits au commencement de la 3me année d'études et de promotions au grade de docteur dans les universités de Bologne, Gênes, Naples, Padoue, Pavie, Pise, Rome et Turin d'année en année de 1890 à 1909.

Le rapport du nombre de gradés au nombre d'inscrits est faible, la moyenne pour ces 18 ans varie de 8 % à Gênes, à 19 % à Rome. Padoue se distingue avec 29 %.

Il y a lieu de remarquer que le nombre de promotions n'a presque pas subi d'augmentation durant les 15 dernières années : de 1892-1894 on en compte 64 et de 1907 à 1909 seulement 66.

Durant la même période le nombre des écoles moyennes est allé en augmentant, beaucoup de sections parallèles ont été créées, si bien que la demande de maîtres est devenue supérieure à l'offre, la crise paraît probable dans un avenir assez rapproché ; — elle sera cependant retardée par la tendance nouvelle des femmes à se porter nombreuses vers la carrière de l'enseignement des mathématiques.

Cet élément nouveau, préoccupé davantage de la conquête du diplôme ouvrant un avenir déterminé que de recherches scientifiques, contribue, au dire du rapporteur, à abaisser le niveau scientifique de l'enseignement universitaire des mathématiques.

L'observation de la situation actuelle suscite quelques critiques.

A l'origine le but essentiel des facultés de sciences était la préparation aux recherches scientifiques, les préoccupations professionnelles qui en constituent une dérivation en sont venues à le submerger.

Les « Scuole di Magistero » ne peuvent tenir compte des travaux critiques de ces 20 dernières années, et ne peuvent mettre les futurs maîtres au courant des discussions, auxquelles ont été soumis les postulats, quant à leur nécessité, indépendance, etc.

Les examens de doctorat ne donnent pas actuellement une garantie suffisante de la généralité des connaissances du candidat.

Une expérience d'une trentaine d'années a persuadé le rapporteur de l'utilité des réformes suivantes :

1° Durant les 2 premières années d'études il y a lieu de séparer les aspirants au doctorat des élèves ingénieurs.

2° D'ajouter aux épreuves orales des examens écrits d'algèbre, géométrie analytique, géométrie projective, calcul différentiel et mécanique rationnelle.

3° Nul ne sera admis en 3me année sans avoir subi avec succès toutes les épreuves orales et écrites des 2 premières années.

4° Les 2 dernières années comprendront :

a) Des cours fondamentaux, obligatoires, de mécanique rationnelle, de théorie des fonctions ; — des compléments de géométrie et de physique mathématique.

b) Des cours complémentaires destinés à préparer aux recherches, tels que des chapitres spéciaux d'analyse, etc.

c) Un séminaire scientifique pour commenter, sous la direction d'un professeur des travaux classiques, d'importants mémoires récents, et préparer les élèves à la rédaction de monographies scientifiques.

5° Ceux qui se préparent à l'enseignement y consacreront complètement la 4me année.

D'une part dans des cours spéciaux de mathématiques élémentaires :

a) Comme revision des matières étudiées dans les écoles élémentaires.

b) Au point de vue pédagogique et méthodologique.

c) En examinant les liens entre les parties élémentaires et les parties les plus élevées de la science.

D'autre part en donnant des leçons en qualité « d'apprenti » dans les écoles secondaires, conformément au vœu exprimé par la Société « Mathesis ».

6° On recommandera aux élèves de 4me année de suivre des cours propres

à étendre leur culture générale (biologie, philosophie, etc.) et on exigera d'eux une connaissance suffisante de langues étrangères.

7° La sanction aux études parcourues se donnera de 2 manières :

a) Par un doctorat *scientifique* exigeant la présentation d'une thèse nouvelle dans les résultats ou dans la méthode, une discussion scientifique et la présentation d'une petite thèse orale.

Les candidats auraient à suivre le séminaire scientifique et les cours cités sous chiffre 4, *a* et *b*.

b) Par un doctorat *didactique* exigeant : un colloque scientifico-didactique, — la rédaction de deux travaux écrits, l'un de méthodologie, l'autre de géométrie, de mécanique ou de physique mathématique ; — la discussion de petites thèses orales.

Les candidats auraient à suivre les cours du n° 4 *a)* et du n° 5.

Tandis que le doctorat scientifique serait demandé aux privat-docents, le doctorat didactique donnerait accès à l'enseignement moyen.

Sur l'organisation des deux premières années d'études universitaires des mathématiques.

Intorno all'ordinamento degli studi matematici nel primo biennio universitario in Italia. — Relazione di C. Somigliana, professore nella R. Università di Torino. — Les deux ordonnances officielles les plus importantes de toutes les lois et règlements qui organisent les études universitaires durant les deux premières années sont :

1° le règlement (Mamiani) de 1860.

2° » (Bonghi) de 1885.

Le premier divisait les facultés de sciences en quatre classes : Mathématiques, Physique, Chimie, Sciences naturelles. Tandis que les trois dernières classes comprenaient quatre années d'études, celle de Mathématiques n'en comptaient que trois permettant d'entreprendre des études d'ingénieur et portant sur les branches : *Introduction au calcul, Calcul différentiel et intégral, Mécanique rationnelle, Géodésie, Physique expérimentale, Chimie, Géometrie descriptive, Dessin.*

Le règlement Bonghi divise les études aux facultés de sciences en deux cycles de 2 ans chacun. Le premier cycle est le même pour les étudiants de mathématiques et pour les physiciens, il aboutit à la *licence physico-mathématique* qui donne accès soit aux écoles d'application, soit au deuxième cycle scientifique.

Les branches d'études du premier cycle diffèrent quelque peu de celles qu'introduisait le règlement antérieur, l'*introduction au calcul* a disparu pour faire place à l'*analyse algébrique*, à la *géométrie analytique et projective ;* la *mécanique rationnelle* se trouve renvoyée au deuxième cycle.

Cette organisation à tendance essentiellement théorique se retrouve dans la plupart des facultés, particulièrement à l'Université de Pise qui se préoccupe de préférence de recherches purement scientifiques.

A côté de cette conception que nous désignerons sous le nom de *classique*, les préoccupations des *sciences appliquées* se sont fait une place particulière, nous les trouvons à Milan avec le *R. Istituto Tecnico Superiore* prévu par la loi Casati de 1859, fondé effectivement en 1863 et inspiré essentiellement par Francisco Brioschi.

A Milan, le calcul infinitésimal est enseigné dès la première année, réuni à l'algèbre et à la géométrie analytique en un cours unique de 2 ans. La géométrie projective et la statique graphique sont confiées au même professeur, la mécanique rationnelle est ramenée en deuxième année.

Les préoccupations pratiques ont encore la prépondérance à Turin au « Politecnico » fondé en 1906 et à la Faculté des Sciences de Padoue, dont le premier cycle de 2 ans a été rattaché à l'Ecole d'ingénieurs en 1908.

En examinant spécialement chaque branche, nous ferons mieux comprendre le développement de chacune des deux tendances.

Analyse algébrique. — La présence d'un cours d'algèbre a occasionné la publication de différents traités qui permettent de constater les méthodes suivies dans cet enseignement.

L'œuvre très hautement scientifique de Alfredo Capelli, les *Istituzioni di Analisi algebrica* dépasse les programmes généralement parcourus ; mais le *Corso di Analisi algebrica con introduzione al calcolo infinitesimale* de Ernesto Cesaro donne une idée plus exacte des limites habituelles.

L'algèbre est actuellement une des matières les plus discutées de l'enseignement, et considérée comme un pur luxe théorique par ceux que préoccupe la nécessité de simplifier la préparation mathématique des ingénieurs. Cette branche a disparu des programmes à Milan, Turin, Padoue, mais on en retrouve des chapitres : Déterminants, équations linéaires, résolution des équations, etc., servant d'introduction au cours d'analyse infinitésimale.

Analyse infinitésimale. — L'enseignement du calcul infinitésimal a dû son caractère original au professeur Dini dont l'enseignement à Pise a eu une grande répercussion dans tout le royaume. Dini fut un des premiers à reconnaître la nécessité d'une revision générale des principes et des méthodes du calcul infinitésimal, et il l'accomplit en apportant dans ses cours une rigueur parfaite.

Cette reconstitution des éléments fondamentaux de l'analyse infinitésimale a évidemment une importance historique de premier ordre, mais on peut se demander si, maintenant qu'on se rend un compte exact des résultats de la critique moderne, il est nécessaire de conserver comme matière de cours toutes les discussions et tous les développements du mouvement critique.

Il paraît impossible de donner à l'analyse infinitésimale un caractère de simplicité indispensable à une théorie destinée en majeure partie à de futurs ingénieurs en conservant comme élément fondamental la notion générale de fonction de Dirichlet.

La tendance actuelle considère comme plus opportun de s'en tenir aux fonctions qui suffisent aux applications en géométrie, en mécanique, sans exiger toutes les distinctions et argumentations de la critique.

Géométrie analytique. — Naples, Pise, Palerme, Padoue consacrent maintenant une chaire spéciale à cet enseignement autrefois réuni à l'algèbre.

Plus récemment, suivant une idée appliquée pour la première fois à Rome par Cremona, on a fusionné l'enseignement de la géométrie analytique et celui de la projective, ce qui donne au professeur une plus grande liberté d'allure, tout en évitant des répétitions, telle est par exemple la situation au « Politecnico » de Turin.

Les *Lezioni di geometria analitica* de G. Castelnuovo font une large place à cette synthèse des deux branches.

Géométrie projective. — Cette branche fut introduite dans les programmes

en 1875 sous l'influence de Luigi Cremona et dans l'esprit de Poncelet, Chasles et Steiner.

Cet enseignement, destiné à l'origine à servir de préparation à la géométrie descriptive et à la statique graphique, prit, grâce à l'ardeur des géomètres italiens pour cette discipline nouvelle, une extension hors de proportion avec le but proposé.

Tout le monde est d'accord pour enseigner la géométrie projective avec tous les développements récents aux futurs mathématiciens, mais la tendance actuelle est de réduire considérablement le programme des futurs ingénieurs.

A Bologne, Enriques a fusionné le cours de géométrie projective avec celui de géométrie descriptive.

A Padoue, le professeur Severi fait suivre le cours de descriptive d'un cours de projective, réduit pour les ingénieurs.

Terminons en remarquant une analogie entre le sort de la géométrie projective et celui de l'analyse algébrique : Introduites comme branches de préparation scientifique, toutes deux ont acquis un développement considérable, jugé bientôt excessif, et elles se voient ramenées à leur rôle initial.

BIBLIOGRAPHIE

W.-G. Borchardt et A.-D. Perrott. — **Geometry for Schools.** — Vol. I covering stages I and II of the Board of Education circular, n° 711, 1909. — Vol. II, stage III, section I. — 2 vol. in-16, VI-52-III p. et VIII-110-IV p.; 1 s. et 1 s. 6 d.; G. Bell and Sons, Londres.

La Circulaire de 1909 du *Board of Education*[1], relative à l'enseignement de la géométrie et de l'algèbre graphique dans les écoles secondaires, en Angleterre, donnait des indications sur les tendances qui doivent inspirer la réforme de l'enseignement de la géométrie.

Tout en faisant une place aux conceptions modernes, l'enseignement tel que le présentent les nouveaux manuels anglais, ne rompt pas d'une manière aussi absolue avec la tradition d'Euclide que la majorité des manuels correspondants d'autres pays.

L'ouvrage de MM. Borchardt et Perrott est dans ce cas ; il répond cependant aux exigences nouvelles, telles qu'elles sont énoncées dans la Circulaire du Board.

Le premier volume est une initiation très objective aux notions fondamentales de la géométrie : volume, surface, dimension, ligne, direction, lignes parallèles, angles, mesure des longueurs et des angles ; triangles, égalité des triangles, dessins à l'échelle.

Les démonstrations en sont rigoureusement exclues, toutes les notions sont énoncées sous forme de faits (facts) à vérifier par le dessin et accompagnés d'exercices et d'applications destinés à les rendre évidents.

---

[1] Voir la traduction de cette Circulaire dans l'*Ens. math.*, mai 1910.

Dans le second volume les auteurs reprennent les mêmes sujets, mais pour les traiter par une méthode nettement déductive. Les relations géométriques sont exprimées sous forme de théorèmes ordonnés selon une suite logique qui remplace l'ordre artificiel d'Euclide. Ces théorèmes sont accompagnés d'applications diverses, résolues ou à résoudre, problèmes théoriques (riders) et constructions graphiques.

Le volume est terminé par une série de problèmes gradués et par des applications numériques sur les hauteurs et les distances. Ces dernières sont également données à la fin du premier volume. Les réponses aux problèmes, proposés dans le cours de l'ouvrage, sont annexées à la fin de chaque volume..

Le champ parcouru est à peu près celui du livre I d'Euclide. En ce qui concerne l'ordre des matières, la division adoptée est celle du Board of Education. Le premier volume correspond aux degrés I et II. Le degré III est abordé dans le second volume avec les propriétés des triangles et parallélogrammes ; il sera complété par quatre autres volumes encore en préparation. R. Masson (Genève).

H. Broggi. — **Versicherungsmathematik.** Deutsche Ausgabe. — 1 vol. in-8°, VIII-360 p. ; 7 M., broché (8 M. cart.) ; B. G. Teubner, 1912.

L'édition originale de ce traité des *Assurances sur la vie* a été publiée en italien (Collection Hœpli) ; elle a été suivie, peu de temps après, d'une édition française, puis maintenant d'une traduction allemande. Les comptes rendus que nous avons donnés des deux premières éditions nous permettent d'être brefs. Nous nous bornerons donc à rappeler que le principal objet du livre est l'exposé des bases théoriques et techniques des Assurances sur la vie ; on y trouvera notamment les principes du calcul des probabilités et de la théorie des erreurs, des notions sur la statistique et l'établissement des tables de mortalité, et l'examen des problèmes fondamentaux des Assurances sur la vie et de la théorie du risque.

Les questions sont posées avec beaucoup de clarté et de concision. A la fois distingué professeur et praticien très habile, l'auteur est parvenu à faire un traité qui sera lu avec profit aussi bien par les professeurs que par les actuaires. Pour les étudiants il constitue une excellente introduction à la théorie des assurances.

P. Duhem. — **Traité d'Energétique ou de Thermodynamique générale.** Tome II. Dynamique générale. Conductibilité de la chaleur. Stabilité de l'équilibre. — 1 vol. gr. in-8° de 504 p. ; 18 fr. ; Gauthier-Villars, Paris.

Ce tome est à la dynamique ce que le premier était à la statique (voir l'analyse publiée ici-même, T. XIII, 1911, p. 345). On se rend de plus en plus compte de l'impossibilité de rester sur le terrain de l'ancienne mécanique quand on étudie les mouvements de systèmes continus tels que fils, membranes, fluides. Qu'on le veuille ou non, la viscosité, les dégagements de chaleur interviennent et les considérations thermodynamiques se superposent aux considérations dynamiques proprement dites. Et peut-être encore ce mot de superposition est-il assez mal choisi. Il ne s'agit pas de compléter la dynamique mais plutôt de lui laisser la même forme, le même langage et ses mêmes principes sous leur ancien nom, en montrant qu'on peut traiter la partie thermique de l'énergie comme la partie purement cinétique

ou du moins qu'on peut faire figurer ces deux parties dans des mêmes équations écrites sous des formes suffisamment générales.

Un tel idéal paraît parfois difficile à atteindre, mais parfois aussi il est dépassé. Ainsi les notions d'énergie interne, de potentiel interne, d'entropie, qui s'appliquent aisément à un fluide compressible, s'appliquent de même à un corps aimanté.

Quant aux cas où l'on ne peut mettre en équations le mouvement d'un système général au moyen des seuls principes de l'Energétique générale, on peut les traiter cependant au moyen d'hypothèses supplémentaires, telles celles de Fourier sur la conductibilité thermique. Au sujet de cette conductibilité, on sait que le champ thermique dépend linéairement de neuf coefficients de conductibilité

$$\begin{matrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{matrix}$$

que l'on suppose symétriquement égaux par rapport à la diagonale principale de ce tableau. Au point de vue pratique, étant donné les milieux habituellement considérés, Lamé ne voyait pas là des hypothèses restreignant la généralité. Cependant M. Duhem n'a pas jugé inutile d'écrire presque tout son chapitre relatif à la conductibilité en se passant de la symétrie précitée, pour montrer ensuite les seuls cas où il était nécessaire de l'invoquer.

Presque toute la seconde moitié du volume est consacrée aux conditions de stabilité de l'équilibre. Comme on le prévoit sans peine, le point capital est l'extension en énergétique générale du théorème de Lejeune-Dirichlet. Cela ne va pas sans soulever de nombreuses difficultés ; quand elles sont trop grandes, M. Duhem se rabat avec habileté sur des cas particuliers mais, bien loin de paraître inventer ceux-ci pour les besoins de sa cause, il paraît retrouver toutes les tentatives faites dans le même sens par MM. Poincaré, Painlevé, Hadamard ; il signale toutes les singularités signalées par ceux-ci en jetant entre elles les traits d'union que, malgré tout, ses méthodes donnent encore.

On voit que je suis ramené, comme en analysant le tome I, à ne pas pouvoir passer sous silence l'habileté d'analyste que déploie l'auteur. Elle s'est d'ailleurs manifestée en bien des endroits précédents, notamment lorsqu'il tire les équations du mouvement d'un système continu du calcul des variations.

L'ouvrage tout entier montre ce qu'il faut savoir écrire quand on veut se rapprocher de la réalité et non pas négliger celle-ci pour écrire des équations simples donnant sans peine d'élégants développements. Si bien qu'ensuite, si l'on veut absolument se rabattre sur les cas particuliers qu'il est possible de développer jusqu'au bout, on saura *exactement* ce que l'on néglige tandis qu'on ne s'en rend compte que d'une manière extrêmement vague si l'on écrit immédiatement des équations réduites.

A. Buhl (Toulouse).

C. Godfrey et A.-W. Siddons. — **A shorter Geometry.** — 1 vol. in-16, XXII-301 p. ; 2 s. 6 d. ; Cambridge University Press.

MM. Godfrey et Siddons ont publié en 1903 un manuel ayant pour titre « Elementary Geometry » ; le volume actuel quoiqu'intitulé Abrégé de géo-

métrie, « Shorter Geometry », en est un remaniement, conçu dans l'esprit de la Circulaire de 1909 du *Board of Education*. Les principes directeurs sont par conséquent sensiblement les mêmes que ceux qui ont guidé MM. Borchardt et Perrott ; seulement avec MM. Godfrey et Siddons le champ parcouru est plus vaste, il embrasse les trois degrés dans un seul volume.

Les degrés I et II, qui font l'objet des 74 premières pages, sont une réimpression du volume des mêmes auteurs « Geometry for Beginners », publié en 1909 à la suite de la circulaire du *Board of Education*. Ce volume était lui-même une mise au point, basée sur les idées nouvelles, du début de leur manuel de Géométrie Elémentaire.

Pour les deux premiers degrés nous nous bornerons donc à renvoyer au compte rendu de ce volume publié dans le numéro de mars de l'*Enseignement Mathématique*.

Le troisième degré fait l'objet des deux derniers tiers du livre que nous considérons ici. Suivant les indications de la circulaire du *Board*, MM. Godfrey et Siddons introduisent la méthode déductive avec ce troisième degré. Cependant ils n'abandonnent pas pour cela absolument l'induction. Les théorèmes accompagnés d'une démonstration rigoureusement déductive, sont souvent précédés d'exercices destinés à suggérer leur énoncé. Ils sont du reste suivis d'un grand nombre d'applications théoriques et pratiques. Le déplacement continu d'une figure est appliqué, à la fin du chapitre consacré au cercle, à des problèmes de recherche de quelques lieux géométriques et enveloppes de droites et de cercles.

L'emploi simultané de la déduction et de l'induction a l'avantage d'introduire les théorèmes comme une énonciation des faits observés, des mesures effectuées, c'est-à-dire de présenter à l'élève la géométrie non comme des propositions arbitrairement choisies et ordonnées, mais comme une conséquence naturelle de son observation. Si ce manuel était mis sans guide entre les mains de l'élève, on pourrait peut-être craindre que la multiplicité même des observations ne l'égare en lui faisant perdre de vue la démonstration formelle et la liaison logique des théorèmes. Sous une bonne direction, ce danger disparait et le livre ne peut être qu'un auxiliaire précieux.

Une série de questions proposées à divers examens termine le volume.

R. Masson (Genève).

G. Kowalewski. — **Die komplexen Veränderlichen und ihre Funktionen** (Fortsetzung der Grundzüge der Differential und Integralrechnung, zugleich eine Einführung in die Funktionentheorie). — 1 vol. in-8°, IV et 455 p. ; broché, M. 12 ; relié M. 13 ; B. G. Teubner, Leipzig, 1911.

Ce livre est caractérisé par les mêmes qualités de simplicité et de rigueur qui font des « Grundzüge der Differential- und Integralrechnung » du même auteur un de nos meilleurs livres pour étudiants. L'auteur part du principe qu'on ne saurait être trop exact et précis dans les définitions et les démonstrations, et il est convaincu que de telles exigences ne sont pas incompatibles avec la simplicité. Il a raison et ses livres le prouvent.

Voici le contenu sommaire du livre :

1. Les nombres complexes. 2. Fonctions complexes de variables réelles. 3. Fonctions d'une variable complexe. 4. Intégrales curvilignes. 5. Le théorème fondamental de Cauchy et ses conséquences. 6. Séries de fonctions et

produits infinis. 7. Le théorème de Mittag-Leffler et la représentation des fonctions en produits infinis d'après Weierstrass.

L'auteur s'est placé au point de vue de Cauchy-Riemann. Le titre même du livre laisse prévoir qu'il se borne à l'étude des fonctions monogènes et qu'il ne fait qu'effleurer l'étude des fonctions sur une surface de Riemann ainsi que le prolongement analytique. A noter cependant que le chapitre I contient une excellente étude des groupes de transformations linéaires, groupes finis et groupe modulaire. Cette étude est singulièrement simplifiée par l'emploi des formes hermitiennes que l'auteur introduit dès le début. Le chapitre VI contient encore en une cinquantaine de pages les fondements de la théorie des fonctions elliptiques. M. Plancherel (Fribourg).

F.-W. Lanchester. — **Aerodynamik**. Ein Gesamtwerk über das Fliegen. Aus den Englischen übersetzt von C. u. A. Runge. II. Band : *Aerodynamik*. Mit 208 Fig. — 1 vol. in-8°, 327 p., relié, 12 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

Il n'est guère besoin d'insister sur l'intérêt d'actualité que présente le traité d'*Aerodynamik* de M. Lanchester. Le Tome II apporte des résultats d'ordre théorique ou expérimental qui seront étudiés avec profit par tous ceux qui s'intéressent ou qui travaillent aux questions si complexes du vol. Une attention toute particulière a été donnée aux problèmes qui se poursuivent depuis quelques années dans les laboratoires d'aviation : problèmes concernant le vol, le vol plané, la stabilité et l'équilibre et les méthodes d'essai.

En dehors des spécialistes, cet Ouvrage trouvera sans doute aussi un cercle très étendu de lecteurs parmi les mathématiciens et les ingénieurs qui désirent avoir un aperçu un peu complet de ce qui est acquis aujourd'hui dans la théorie de l'aviation au point de vue mathématique et mécanique et de ce qui est encore à la période d'essai ou à l'état empirique.

Enrique Legrand. — **Sommations par une formule d'Euler** (de l'usage qu'on peut en faire pour résoudre de nombreux problèmes). Sumaciones por una fórmula de Eulero (su applicabilidad en la resolución de numerosos problemas). — 1 fasc. in-8°, 46 p. ; Gauthier-Villars, Paris.

Cette brochure de 46 pages contient (texte bilingue juxtaposé), de nombreuses applications de la formule sommatoire d'Euler au calcul exact ou approché de sommes de la forme $\sum_{\nu=0}^{n} f\left(a + \nu\frac{b-a}{n}\right)$. L'auteur montre ainsi que la formule d'Euler conduit très rapidement à des résultats intéressants. Les questions traitées pourront être utiles aux étudiants. Les questions de convergence ou de semi-convergence des séries qui se présentent ne sont pas traitées. M. Plancherel (Fribourg).

H. Poincaré. — **Calcul des probabilités**. Seconde édition revue et augmentée par l'auteur. — 1 vol. in-8° de IV-336 p. ; 12 fr. ; Gauthier-Villars, Paris. 1911.

Je suppose que la première édition de cet ouvrage, par le seul fait qu'elle est épuisée, est suffisamment connue pour que je n'aie pas besoin de décrire la seconde en détail. Mieux vaut se consacrer surtout aux importantes ad-

jonctions dues à l'auteur. M. Poincaré a commencé par reproduire le chapitre sur *Le Hasard* publié par lui dans son ouvrage *Science et Méthode :* il obéit ainsi au sentiment qui a guidé ses prédécesseurs, notamment Laplace et Bertrand, qui, de leur côté, n'ont pas voulu parler du Calcul des probabilités sans intéresser le lecteur par un avant-propos en langage ordinaire, destiné à montrer le dit calcul dans les problèmes de la vie journalière et de la philosophie la plus pratique.

Mais j'ai hâte de passer aux nouveautés analytiques.

L'une des plus importantes est à coup sûr l'introduction des *fonctions caractéristiques.* Une telle fonction $f(\alpha)$ est la valeur probable de $e^{\alpha x}$. Donc

$$f(\alpha) = \Sigma p e^{\alpha x} = \int \varphi(x) e^{\alpha x} dx \ ;$$

le sigma correspond au cas où x varie de manière discontinue, l'intégrale intervenant dans le cas où x varie continuement. Or, en général, x variera de $-\infty$ à $+\infty$ et alors, d'après la formule de Fourier, une réciprocité apparaîtra entre la fonction f et la loi de la probabilité φ. A l'heure où le problème de l'inversion des intégrales définies prend une si grande importance, il n'était pas inutile de le reprendre ainsi, sous une de ses formes anciennes mais pouvant servir de modèle particulièrement simple et utile.

De plus on voit aisément, en considérant l'intégrale qui précède, qu'on peut varier la forme de $\varphi(x)$ de manière à exprimer non seulement la loi de Gauss, mais aussi autant d'autres lois qu'on voudra. Ces comparaisons possibles semblent fournir à M. Poincaré des justifications de la célèbre loi qui sont particulièrement importantes et immédiates.

De même, dans la théorie de l'interpolation, nous assistons à l'introduction de polynômes D_i tels que

$$\Sigma D_k D_i = 0 \ .$$

Si le sigma était remplacé par une intégrale, les D seraient des fonctions à caractère assez banal et l'égalité serait semblable aux égalités fondamentales sur lesquelles reposent de nombreux développements en série. Mais ici justement il s'agit de sommes d'un nombre fini de termes. Je ne puis expliquer en détail comment ces polynômes D conduisent à une méthode d'interpolation d'accord avec la méthode des moindres carrés mais, ici encore, l'analyse est extrêmement suggestive et élégante.

Un dernier chapitre, intitulé *Questions diverses*, est éminemment original et moderne. Dans le problème du battage des cartes, la probabilité d'un certain arrangement est exprimée à l'aide d'un nombre complexe dépendant de r unités complexes. Dans le problème de la répartition des décimales dans une table numérique, M. Poincaré considère, par exemple, la troisième décimale et imagine une fonction égale à $+1$ si cette décimale est paire, à -1 si elle est impaire. Il réussit à assimiler une telle fonction à une fonction périodique et à établir que sa valeur moyenne est nulle ou très petite. La conclusion est qu'il n'y a pas plus de chance pour que la décimale considérée soit paire qu'impaire.

Enfin si nous considérons un liquide en mouvement permanent, dans lequel on distingue au début des molécules de couleurs différentes, nous croyons cependant qu'au bout d'un certain temps toutes ces molécules se-

ront mélangées. Établir la chose en toute rigueur permettrait d'établir de même que, dans un système mécanique quelconque, satisfaisant toutefois aux équations de Hamilton, l'état final peut, après un temps suffisamment long, ne plus sembler dépendre de l'état initial, à moins que l'on n'imagine tout exprès des intégrales uniformes dont le but serait de conserver quelque chose.

De semblables hypothèses sont continuellement postulées en physique, notamment dans la théorie cinétique des gaz. Et pour prouver quels problèmes étranges et intéressants se trouvent derrière de telles considérations, il est impossible de ne pas mentionner l'application du Calcul des probabilités que vient de faire M. Poincaré dans une Note des *Comptes Rendus* (4 décembre 1911) *Sur la Théorie des Quanta*. D'après Planck, un corps rayonnant aurait une émission discontinue ; il serait assimilable à la réunion d'une foule d'oscillateurs hertziens ayant chacun une période propre. Mais quelle idée se faire d'un tel rayonnement où nous ne pourrons évidemment considérer isolément chaque oscillateur ? Le Calcul des probabilités l'indique et vient à l'appui de l'hypothèse de Planck. Une autre note de M. E. Bauer (26 décembre) revient sur la question. D'autres surgiront sans doute grâce à l'élan donné par M. Poincaré. Y a-t-il meilleure recommandation, auprès des physiciens, de la science ici exposée ?

A. Buhl (Toulouse).

H. Poincaré. — **Hypothèses cosmogoniques.** Leçons professées à la Sorbonne, rédigées par H. Vergne. — 1 vol. gr. in-8° de XXVI-294 p. ; 12 fr. ; Hermann, Paris, 1911.

Ces leçons ont un intérêt historique très net à côté de l'intérêt scientifique proprement dit. M. Poincaré y passe en revue les principales hypothèses cosmogoniques en leur adjoignant une critique analytique que l'auteur de l'hypothèse a eu parfois le tort de négliger. Si nous ne remontons pas jusqu'à Lucrèce, du moins rencontrons-nous ici les noms de Kant, Laplace, Roche, Faye, du Ligondès, See, G.-H. Darwin, Helmholtz, Lockyer, Schuster, Arrhénius, Belot.

Dans cette suite, on peut dire que, jusqu'à Darwin inclus, la cosmogonie est surtout mécanique. On part toujours d'un état matériel primitif, plus ou moins informe, mais formé de particules obéissant aux lois de la mécanique et tout particulièrement à leurs attractions mutuelles. Les auteurs qui suivent ont recours à des considérations plus complexes au point de vue physique ; ils tiennent compte de la forme thermique de l'énergie.

Le premier point fort important est que M. Poincaré défend, encore avec une fort belle assurance, l'hypothèse de Laplace dont d'éminents contradicteurs ont annoncé la mort un peu prématurément. Il montre que l'objection des satellites à mouvement rétrograde n'est pas aussi redoutable qu'on pouvait le croire au premier abord. L'anneau qui, en se brisant, a pu donner naissance à une planète a pu laisser subsister de petits fragments non compris dans la planète formée, mais que celle-ci aura ensuite captés sous forme de satellites. Et la capture peut se présenter de manière telle qu'on obtienne un satellite gravitant dans n'importe quel sens.

Quant à la théorie de Faye, M. Poincaré n'y croit guère mais, par une analyse facile il en tire des problèmes simples et ingénieux. Elle reste élégante bien qu'elle ne soit point nécessaire pour expliquer les rotations planétaires de sens contraires.

L'hypothèse de M. du Ligondès offre encore l'occasion d'applications analytiques des plus remarquables. Et il s'agit du Calcul des probabilités dont la réintroduction ici donne encore plus de force à ce que j'ai dit dans l'article précédent. Pour M. du Ligondès l'Univers s'est formé de lambeaux chaotiques se choquant comme les molécules de la théorie cinétique des gaz. C'est à ce propos que M. Poincaré rétablit la loi de Maxwell sur la répartition des vitesses des molécules gazeuses, en développant davantage les considérations sur les liquides en mouvement permanent dans un espace à un nombre quelconque de dimensions.

Avec Sir G.-H. Darwin, l'influence des marées prédomine. Beaucoup n'y ont pas pensé, les considérant comme un phénomène accessoire, mais celui-ci paraît avoir des effets non seulement sensibles, mais encore prédominants à la longue. Car Darwin vise plutôt la fin des choses que le commencement ; les actions mutuelles des astres d'un même système produisent des marées liquides ou même solides qui tendent à égaliser toutes les durées de révolution ou de rotation. Il a d'ailleurs ses idées sur la formation de la Lune née de la Terre par segmentation alors que celle-ci avait une forme ellipsoïdale.

Avec Helmholtz nous nous préoccupons de l'origine des chaleurs terrestre et solaire. M. Poincaré semble admettre que toutes les théories sont incomplètes et qu'il y a des sources d'énergie inconnues de nous, pas plus connues à coup sûr que le radium pour Helmholtz.

Avec Lockyer nous sortons du système solaire et nous assistons à l'évolution du système inorganique de l'univers entier, mais l'auteur pour lequel j'ai le plus grand plaisir à montrer de la sympathie c'est à coup sûr Arrhénius. D'ailleurs M. Poincaré lui consacre plus de pages qu'à ceux qui le précèdent immédiatement. L'Univers d'Arrhénius est toujours vivant ; l'énergie peut se dégrader dans certains systèmes, mais il conçoit une dégradation qui finit par désagréger la matière et par la remettre dans l'état où on la voit dans les nébuleuses. Certes ceci est difficile à accorder avec les principes de la thermodynamique, mais, d'autre part, est-il bien clair de faire mourir totalement l'Univers *dans le temps*, c'est-à-dire avec une notion qui n'est définissable que dans un univers existant et animé ?

La théorie d'Arrhénius mérite sans doute une place d'honneur ; en ne faisait ni naitre ni mourir l'Univers dans le temps, elle supprime de graves difficultés métaphysiques au détriment du principe de Carnot, d'un principe physique, ce qui, je le reconnais, est aussi très grave en soi. Mais toutes les cosmogonies universelles sont imparfaites ; à l'avenir de dire si les éléments de la théorie d'Arrhénius sont vraiment incompatibles ; en attendant je suis persuadé qu'elle aura pour beaucoup un caractère séduisant.

M. Poincaré termine ces admirables leçons par l'étude de la distribution des étoiles dans la Voie Lactée, par quelques mots sur les nébuleuses spirales et par un exposé des idées de M. Belot. Toutes les hypothèses, malgré leur extrême diversité, sont traitées par une analyse simple et légère qui donne une grande impression d'uniformité. La rédaction soignée de M. Vergne a certainement contribué à cet heureux résultat.

A. Buhl (Toulouse).

H. Renfer. — **Lehrbuch der politischen Arithmetik** *enthaltend Theorie und Uebungsbeispiele über die Zinseszins-, die Sparkassa-, die Renten und die Amortisationsrechnung, die verschiedenen Arten der Kapital-*

rückzahlungen und die Aufstellung von Tilgungsplänen.— 1 vol. gr. in-8°. 190 p., br. 5 fr. (relié, 5 fr. 75); Fehr, Saint-Gall.

M. Renfer, frappé du peu d'exercices qu'on trouve dans les manuels d'arithmétique politique, s'est proposé de remédier à ce défaut; son livre contient donc un grand nombre de problèmes (250). Dans chaque question, M. Renfer déduit la formule, énonce le résultat en langage ordinaire puis donne quelques exemples, dont il expose la solution numérique avec tous les détails du calcul, en supposant d'abord que l'on dispose de tables d'intérêts composés, ensuite que l'on se sert de logarithmes ; il termine par les énoncés sans solution de quelques problèmes.

Remarquons encore que l'auteur ne craint pas l'emploi de petits graphiques qui, sans être indispensables à la démonstration, contribuent cependant à soutenir la pensée.

M. Renfer s'est en outre efforcé d'introduire une notation systématique ; il se rallie autant que possible à la notation qu'au Congrès international de Londres, les actuaires ont adoptée pour l'assurance sur la vie.

Le manuel est divisé en quatre parties : la première est consacrée au calcul d'intérêts composés, de provisions et d'échéances moyennes ; sous le nom impropre de calculs de caisse d'épargne, la seconde traite des paiements périodiques ; dans la troisième, nous trouvons les rentes immédiates différées, constantes ou variables suivant quelques lois simples ; enfin, dans la quatrième partie, les annuités, les amortissements, les diverses manières de rembourser un capital, les conversions et la parité des cours.

A la fin de l'ouvrage sont réunies plusieurs tables pour le calcul des intérêts composés ; elles sont d'une grande utilité pédagogique, car les tables numériques sont d'un emploi si fréquent qu'il faut en enseigner l'usage dans les écoles de commerce. A ce point de vue, elles auraient été encore meilleures, si M. Renfer avait supprimé celles qui se déduisent d'autres par un calcul très simple ; il arrive, en effet, souvent que l'on n'a pas sous la main juste la table que l'on désire et l'on est heureux de savoir la remplacer par une autre. Nous regrettons aussi que M. Renfer n'ait pas mis à côté du titre de chaque table, la formule correspondante, car c'est la manière la plus commode pour le calculateur de définir un nombre. Mais ce ne sont que des détails.

Le manuel de M. Renfer est le résultat de plusieurs années d'enseignement à l'Académie de Commerce de Saint-Gall. Il est donc en première ligne destiné aux écoles professionnelles ; toutefois, il pourra rendre de grands services à tous ceux qui doivent enseigner l'arithmétique politique, même à un degré moins élevé. Le soin avec lequel de nombreux exercices y sont résolus, en fait un livre utile à tous ceux qui étudient cette branche sans le secours d'un professeur. S. Dumas (Berne).

D.-E. Smith and L.-Ch. Karpinski. — **The Hindu-Arabic Numerals.** — I vol. relié in-8°, IV-160 p.; Boston and London, Ginn and C°, 1911.

Les auteurs qui se sont fait connaître dans l'histoire des mathématiques par différents travaux de valeur, nous présentent dans ce petit livre une vue d'ensemble sur le développement et la propagation de notre système de chiffres. Ils s'occupent dans les huit chapitres de l'ouvrage de la question quelque peu obscure de l'apparition des chiffres, probablement en Inde ;

des plus anciennes formes des chiffres, sans et avec valeur de position; du symbole pour zéro; de la question de savoir si Boëthius connaissait l'ancienne forme des chiffres indiens, connus plus tard des Arabes occidentaux sous le nom de chiffres de Ghobâr; du développement des chiffres sous les Arabes et de leur introduction et propagation en Europe.

Les maîtres, les étudiants en mathématiques et d'une façon générale toutes les personnes qui s'intéressent à cette invention si grandiose et pourtant si simple trouveront dans ce livre tous les renseignements voulus; quant à ceux qui désirent de plus amples détails, nous les renvoyons aux nombreuses indications bibliographiques fournies par l'ouvrage même sous forme de notes. Ces notes augmentent donc d'une façon sensible l'importance du livre pour celui qui désire s'occuper plus spécialement de l'histoire des mathématiques; mais le texte lui-même, présenté d'une façon claire et élégante, intéressera vivement le non-spécialiste; d'autant plus que les auteurs fournissent à l'occasion d'intéressants renseignements sur la civilisation générale des peuples et des époques dont il est question.

Au point de vue typographique, le livre est excellent; de nombreuses formes de chiffres donnent au lecteur une idée claire du développement progressif de notre système de chiffres jusqu'à l'époque actuelle.

En ce qui concerne l'origine et la propagation des chiffres hindous en Arabie et en Europe, les opinions sont assez variées, et les auteurs ont bien fait de traiter la question objectivement, ils ne se prononcent d'une manière décisive ni pour l'une ni pour l'autre, ce qui du reste serait un peu osé, étant donné l'état actuel de la question. Cependant il est une de ces opinions que les auteurs auraient pu combattre plus vigoureusement, à savoir l'avis de Wœpcke qui prétend que les anciennes formes de chiffres arabes, les chiffres du Ghobâr (poussière) étaient déjà connues en Espagne avant l'invasion arabe. Il serait trop long de citer tous les motifs qui s'élèvent contre cette affirmation. Contentons-nous de citer ce qui suit :

En 662 on connaissait déjà en Syrie et en Mésopotamie la manière d'écrire les nombres des Hindous à l'aide des neuf chiffres et du zéro (voir F. Nau, La plus ancienne mention orientale des chiffres indiens, au *Journal asiatique*, X^e^ série, T. 16, p. 225); ne serait-il pas possible que les Omayyades de Damas, la capitale des Califes de 661 à 740, aient transporté en Espagne les chiffres de Ghobâr, alors que les chiffres arabes orientaux auraient été utilisés à Bagdad par les Abbassides par opposition aux Omayyades qu'ils détestaient?

Nous devons encore signaler quelques erreurs qu'il faudra rectifier dans une seconde édition.

P. 65-66 : El-Hassâr ne signifie pas « the arithmetician ». Voir *Biblioth. mathem.* 13 (2), p. 87.

P. 93, note 4, il faut écrire : « English edit., p. 134. » Le volume sur les chiffres hindous est mentionné dans mes « Nachträge » (p. 171).

P. 96 : En ce qui concerne l'affirmation : « As a matter of fact... » les auteurs ne donnent aucune indication.

P. 98 : Les auteurs disent ici : « We thus have the numerals in Arabia in two forms : one the form now used there, and the other the one used by Al-Khowârazmî. » D'où les auteurs connaissent-ils les formes de chiffres que Al-Khowârazmî a employées dans son arithmétique? Son œuvre n'existe plus en langue arabe, comme du reste malheureusement les autres écrits arithmétiques des Arabes du IXe siècle. Mais même si l'on suppose que ces

écrits existent encore sous forme de transcriptions plus récentes, qui nous garantirait que les transcripteurs n'ont pas remplacé les formes de chiffres primitives par celles de leur temps ?

P. 113 : Les auteurs disent que Avicenne est un des hommes qui ont illustré l'Espagne ; mais Avicenne vivait dans l'Extrême Orient comme les auteurs le disent eux-mêmes, p. 74.

Ibid. L'astronome arabe-espagnol cité à cet endroit ainsi que dans l'index ne s'appelle pas « Gerber » mais « Geber » (Djâbir).

Ibid. A la place d'« Abû Roshd » il faut mettre « Ibn Roshd ».

P. 120, note 1 : Il est très douteux que « Heleeph » provienne de el-qeif, ce n'est que l'avis de M. Rodet.

P. 138. Le nombre 888 doit être remplacé par 987.

H. Suter (Zurich).

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. Publications périodiques :

Annali di Matematica. Directeurs : L. Bianchi, U. Dini, G. Jung, C. Segre. Série III, t. XVIII. — Rebeschini di Turati e C., Milan.

Fascicule I. — Bianchi : Sopra una classe di deformazioni continue delle superficie pseudosferiche. — E. E. Levi : Sulle ipersuperficie dello spazio a 4 dimensioni che possono essere frontiera del campo di esistenza di una funzione analitica di due variabili complesse.

Fasc. 2 et 3. — Torelli : Sulla postulazione di una varietà e sui moduli di forme algebriche. — Tonelli : Sulle derie di funzioni analitiche della forma $\Sigma a_n(x)x^n$. — Dini : Studii sulle equazioni differenziali lineari in relazione ai loro integrali normali, pel caso di alcune equazione del 2° ordine. Polinomii integrali. — Bianchi : Sopra le deformazioni isogonali delle superficie a curvatura costante in geometria ellittica ed iperbolica.

Annals of Mathematics, published under the Auspices of Harvard University. Second Series, vol. XII 1910-1911. — Cambridge, Mass. E. U.

N°s 1 et 2. — F.-R. Moulton : The Straight Line Solutions of the Problem of n Bodies. — M. Bocher : On Semi-Analytic Functions of Two Variables. — J. Berry : Some Theorems Concerning Systems of Linear Partial Differential Expressions. — J.-L. Coolidge : Some Circles Associated with Concyclic Points. — R.-E. Gleason : On a Method for the Summation of Series. — S. Epsteen : Rationality Groups in Prescribed Domains. — W.-J. Risley : Envelopes of One-Parameter Families of Plane Curves.

N°s 3 et 4. — G. D. Birkhoff : On the Solutions of Ordinary Linear Homogeneous Differential Equations of the Third Order. — W. E. Byerly : Approximate Representation. — L. E. Dickson : Note on Cubic Equations and Congruences. — G. R. Dines : The Harmonics of a Stretched String Vibrating in a Resisting Medium. — C. A. Noble : Characteristics of Two Partial Differential Equation of Order One. — C. S. Slichter : The Mixing Effect of Surface Waves. — S. Epsteen : The Differential Equation of the

Third Order with a Quadratic Relation between the Integrals. — T. Hayashi : Relations among Some Cyclotomic Cubics.

Archiv der Mathematik und Physik, herausgegeben von E. Lampe, W. Meyer, E. Jahnke. — B. G. Teubner, Leipzig und Berlin.

17. *Band*, Heft 4. — H. Brunn : Zur Theorie der Eigebiete. — O. Lummer und F. Reiche : Die Abbildung nichtselbstleuchtender Objekte (Bildentstehung im Mikroskop. — R. Haussner : Ueber verallgemeinerte Tangenten- und Sekantenkoeffizienten. — W. v. Ignatowsky : Zur Integration der Gleichung $\frac{d^2x}{dt^2} + a\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + bx = 0$.

18. *Band*. Heft 1. — L. Hopf u. A. Sommerfeld : Ueber komplexe Integraldarstellungen der Zylinderfunktionen. — W. v. Ignatowsky : Das Relativitätsprinzip. — L. Maurer : Bemerkungen zur mechanischen Quadratur von Gauss. — H. Beck : Ein Gegenstück zur projektiven Geometrie. — J. Neuberg : Zur Tetraedergeometrie. — H. Mohrmann : Ueber die windschiefen Linienflächen im Raume von vier Dimensionen und ihre Haupttangentenflächen als reziproke Linienflächen.

Bulletin de la Société mathématique de France. T. XXXIV. Paris.

Fasc. 1. — E. Cotton : Remarques sur l'application du principe des forces vives aux machines mobiles. — L. Autonne : Sur les groupes commutatifs de quantités hypercomplexes. — E. Cartan : Le calcul des variations et certaines familles de courbes. — L. Zoretti : Sur l'intégration des équations du mouvement intérieur d'un solide élastique isotrope de révolution. — G. Fontené : Sur la coïncidence principale d'un certain connexe. — G. Remoundos : Contribution au problème de la représentation uniforme des surfaces. — T. Lalesco : L'étude des noyaux résolvants.

Fasc. 2. — F. Boulad : Application de la notion des valeurs critiques à la disjonction des variables dans les équations d'ordre monographique supérieur. — J. Chazy : Sur une équation différentielle du premier ordre et du premier degré. — Keraval : Sur les surfaces dont les lignes asymptotiques appartiennent par leurs tangentes à sa complexe linéaire. — E. Blutel : Sur une méthode d'approximation. — E. Delassus : Sur la distribution des vitesses dans un solide en mouvement. — M. Servant : Surfaces isothermiques et surfaces de Bonnet qui se rattachent à la déformation des quadriques. — Ch. Halphen : Sur les potentiels des accélérations des divers ordres. — A. Denjoy : Sur les systèmes complets de fractions.

Bulletin des Sciences mathématiques, rédigé par G. Darboux et E. Picard. — Tome XXXV, 1911. Gauthier-Villars, Paris.

Janvier-Juin 1911. — G. Darboux : Sur la construction des cartes géographiques. — G. Darboux : Sur un problème posé par Lagrange. — G. Darboux : Sur une méthode de Tissot relative à la construction des cartes géographiques. — Magyar Andomànyos akademia. Prix Bolyai, Rapport de M. H. Poincaré. — J. Hadamard : Sur les trajectoires de Liouville. — T. Boggio : Nouvelle démonstration du théorème de M. J. Hadamard sur les déterminants. — St. Jolles : Julius Weingarten. — B. Elie : Relations entre les paramètres cayliens de trois substitutions orthogonales dont l'une est égale au produit des deux autres.

Bulletin of the American mathematical Society. — New-York. Vol. XVII.

Fasc. 6.— *Commitee Report* : Preparation for Research and the Doctor's Degree in Mathematics (Int. Comm. on the Teaching of Math.; Amer. subcommitee).

Fasc. 7. — G.-A. Miller : Groups generated by two operators satisfying two conditions. — J.-W. Young : Fundamental regions for cyclical groups of linear fractional transformations on two complex variables. — J. Westlund : On the relative discriminant of a certain Kummer Field.— P. Field : Note on reciprocal figures in space.— E.-B. Wilson : Mathematical physics for engineers.

Fasc. 8. — P. Saurel : On the Classification of Crystals. — F. Cajori : Horner's Method of Approximation Anticipated by Ruffini.

Fasc. 9. — O.-E. Glenn : Invariant conditions that a p-ary Form may have multiple linear factors. — A. Ranum : The general term of a recurring series. — D.-R. Curtiss : Relations between the Gramian, the Wronskian, and a third determinant connected with the problem of linear dependence. — W.-A. Wilson : Note on integration of series by Lebesgue integrals.

Fasc. 10. — F.-N. Cole : The Chicago Meeting of the American Mathematical Society.— L.-E. Dickson : On the Negative Discriminants for which there is a Single Class of Positive Primitive Binary Quadratic Form. — R.-E. Root : Iterated Limits of Functions on an Abstract Range.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von K. Hensel. Band CXL. — Georg Reimer, Berlin.

Heft 1. — J. Schur : Bemerkungen zur Theorie der beschränkten Bilinearformen mit unendlich vielen Veränderlichen. — Ph. Furtwängler : Ueber die Klassenzahlen der Kreisteilungskörper. — R. Sturm : Zur Jacobischen Erzeugung der Flächen 2. Grades. — E. Fischer : Ueber algebraische Modul systeme und lineare homogene partielle Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.

Heft 2. — S. Gundelfinger : Ueber ein algebraisches Theorem. — M. Riesz : Ueber einen Satz des Herrn Fatou. — L. Lichtenstein : Ueber die konforme Abbildung ebener analytischer Gebiete mit Ecken. — J. Horn : Volterrasche Integralgleichungen und Summengleichungen. Erster Teil : Zur Theorie der Singularitäten Volterrascher Integralgleichungen.

Prace Matematyczno-Fizyczne, publié par S. Dickstein, Varsovie.

Tome XXI, 1910, — W. Sierpinski : Sur une propriété caractéristique des nombres rationnels. — L. Lichtenstein : Sur quelques applications de la théorie des équations intégrales linéaires. — W. Sierpinski : Remarque sur le théorème de Riemann relatif aux séries semiconvergentes. — A. Axer : Sur la fonction $\varphi(r)$ dans la théorie des idéaux. — E. Stamm : Zur Theorie der Beziehungen und Operationen. — Rosenblatt : Règle de Lagrange dans le problème isopérimétrique pour les intégrales simples. — G. A. Miller : The Group generated by two conjoints. — A. Axer : Beitrag zur Kenntnis der zahlentheoretischen Funktionen $\mu(n)$ und $\nu(n)$. — E. Landau : Ueber die Bedeutung einiger neuen Grenzwertsätze der Herren Hardy und Axer. — W. Sierpinski : Remarque relative à mon article : « Sur les développements systématiques des nombres en produits infinis ».

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. Direttore G.-B. Guccia.

Tome XXXI, fasc. 1. — J. Sire : Sur les fonctions entières de deux va-

riables d'ordre apparent total fini. — P. Nalli : Riduzione di un fascio di curve piane di genere uno, corrispondente a se stesso in una trasformazione birazionale involutoria del piano. — H. Poincaré : Rapport sur le prix Bolyai. — M. Picone : Sopra un problema dei valori al contorno nelle equazioni iperboliche alle derivate parziali del second' ordine e sopra una classe di equazioni integrali che a quello si riconnettono.

Fasc. 2. — M. Picone : Sopra un problema dei valori al contorno nelle equazioni iperboliche alle derivate parziali del second'ordine e sopra una classe di equazioni integrali che a quello si riconnettono. — H. Mohrmann : Ueber die automographe Collineationsgruppe des rationalen Normalkegels n Ordnung. — U. Cisotti : Sul comportamento della funzione di Neumann in punti prossimi al contorno. — H. Bohr : Beweis der Existenz Dirichletscher Reihen, die Nullstellen mit beliebig grosser Abszisse besitzen. — G. Sannia : Su due forme differenziali che individuado una congruenza o un complesso dirette. — O. Bolza : Ueber den Hilbert'schen Unabhängigkeitssatz beim Lagrange'schen Variationsproblem.

Fasc. 3. — P. Calapso : Intorno ai sistemi coniugati che col metodo di Laplace si transformano da entrambii lati in sistemi octogonali. — Ch.-J. de la Vallée-Poussin : Un nouveau cas de convergence des séries de Fourier. — R. Weitzenboeck : Ueber einige spezielle Kollineationen im R_4. — B. Levi : Un teorema del Minkowski sui sistemi di forme lineari a variabili intere. — W. Stekloff et Tamarkine : Problème des vibrations transversales d'une verge élastique homogène. — D. Montesano : Su e curve omologhe in una corrispondenza birazionale piana. — A. Comessatti : Sui piani tripli ciclici irregolari. — C. Somigliana : Sulle funzioni armoniche ellissoidali. — A. Terracini : Sulle V_k per cui la varietà degli S_h $(h+1)$ seganti ha dimensione minore dell'ordinario.

Sitzungsberichte der K. Akademie der Wissenschaften, Wien.

Jahrgang 1910. — H. Bohr : Ueber die Summabilitätsgrenzgerade der Dirichlet'schen Reihen. — A. Boltzmann : Ueber den Luftwiderstand gekrümmter Flächen. — E. Dolezal : Das Rückwärtseinschneiden auf der Sphäre, gelöst auf photogrammetrischem Wege. — Ph. Frank und H. Rothe : Ueber eine Verallgemeinerung des Relativitätsprinzips und die dazugehörige Mechanik. — F. Hasenhörl : Ueber den Widerstand, welchen die Bewegung kleiner Körperschen in einem mit Hohlraumstrahlung erfüllten Raume erleidet. — F. Jung : Die Polarableitungen verschiedener Stufe und ihr Zusammenhang. — B. Kalicun : Ueber die Eigenschaften der ebenen Kurven : *a)* 5. Ordnung mit einem vierfachen Punkte, als eines Erzeugnisses zweier einvierdeutiger Strahlenbüschel ; *b)* 5. Klasse mit einer vierfachen Tangente, als eines Erzeugnisses zweier einvierdeutiger Punktreihen ; *c)* wie auch über die Konstruktion der ersteren von diesen Kurven. — A. Klingatsch : Die günstige Lage der durch geometrische Oerter bestimmten Punkte eines Dreieckes bei der Triangulierung. — D. Kruppa : Zur achsonometrischen Methode der darstellenden Geometrie. — G. Majcen : Ein Satz über die ebene Kurve 4. Ordnung mit einer Spitze 2. Art. — Ueber die rationale Kurve 4. Ordnung mit Spitzen von der 1. und 2. Art. — F. Mertens : Zur komplexen Multiplikation. — Ueber die Koeffizienten und Irreduktibilität der Transformationsgleichungen der elliptischen Funktionen mit singulärem Modul. — Fr. Paulus : Ueber eine unmittelbare Bestimmung jeder einzelnen Reaktionskraft eines bedingten Punktsystems für sich aus

den Lagrange'schen Gleichungen 2. Art. — J. RADON : Ueber das Minimum des Integrals $\int_{s_0}^{s_1} F(x, y, \theta, \lambda)\,ds$. — H. ROTHE : Ueber die lineare Abhängigkeit der gemischten Produkte von drei Faktoren. — R. WEITZENBÖCK : Zum System von vier Ebenen im R_4.

Revue de Métaphysique et de Morale, dirigée par M. Xavier LÉON. — Colin, Paris.

19e année, nos 5 et 6. — H. DUFUMIER : La généralisation mathématique. — G. LECHALAS : Sur un aperçu d'Ostwald concernant les temps à plusieurs dimensions. — A. PADOA : La logique déductive.

Revue scientifique, 50e année, Paris.

24 février. — H. POINCARÉ : L'hypothèse des quanta.

Zeitschrift für das Realschulwesen, herausgegeben von Em. CZUBER, Ad. BECHTEL und Mor. GLÖSER. — XXXVI. Jahrg. 1911 ; Alfr. Hölder, Wien.

Nos 1 à 6. — O. MANDL : Eine konvexe vierseitige Pyramide nach einem Parallelogram zu schneiden und die Umkehrung dieser Aufgabe. — Beilage zu Heft I : Heft 6 der « Berichte über den mathematischen Unterricht in Œsterreich » (Ph. FREUD). — K. EMMERLING : Beitrag zur Dreieckslehre. — J. KUHN : Zur Mondfläche des Hippokrates. — Beilage zu Heft IV : Heft 7 der « Berichte über den mathematischen Unterricht in Œstecreich » (R. v. STERNECK). — G. v. SENSEL : Scheinbar fehlende Wurzelpaare von Gleichungssystemen mit zwei Variabeln. — L. SCHRUTKA : Eine geometrische Ableitung der Formeln für die Differentiation der goniometrischen Funktionen. — R. SUPPANTSCHITSCH : Ueber die Normierung der Normalform der Gleichung der Geraden. — E. VOGEL : Die Ellipse als Schrägriss des Kreises.

Nos 7 à 12. — R. ZDENEK : Zur Erzeugung des Plücker'schen Konoïdes. — W. PEYERLE : Ueber logarithmischen Kurven. — M. ZDELAR : Ueber die Verwendung zweier wichtiger Hilfskonstruktionen. — Beilage zu Heft IX : Heft 8 der « Berichte über den mathematischen Unterricht in Œsterreich » (S. ZAREMBA). — L. HOFMANN : Zur Auflösung der Gleichungen dritten Grades. — Beilage zu Heft XI : Heft 9 der « Berichte über den mathematischen Unterricht in Œsterreich » (A. ADLER et E. MULLER).

Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, herausgegeben von Dr. H. SCHOTTEN. — B. G. Teubner, Leipzig.

42. Jahrgang, Heft 9 u. 10. — E. PAPPERITZ : Die kinodiaphragmatische Projektion, ein neues Lehrmittel in der Geometrie. — R. SCHÜSSLER : Die konstruktive Verwertung einer elementaren einheitlichen Kegelschnittsdefinition. — A. SCHÜLKE : Zum Beweise des Pascalschen Satzes. — K. WOLLETZ : Die Berührungskürve für eine Schar konfokaler Kegelschnitte. — E. v. SZÜCS : Ebene und sphärische Trigonometrie auf ganz neuer Grundlage. — H. PFAFF : Beweis des Tangentialsatzes mittels der Pfeilpunktssehne.

Heft 11 u. 12. — Rudolf SCHIMMACK : Ueber die Verschmelzung verschiedener Zweige des mathematischen Unterrichts. — MILARCH : Eine einfache Lösung und Ableitung der Lösung der kubischen Gleichung. — Otto RICHTER : Der Ellipsenreif. — Otto RICHTER : Eine Maximalaufgabe aus der darstellenden Geometrie.

Zeitschrift für Mathematik und Physik, herausgegeben von R. Mehmke u. C. Runge. — 59. Band. — B. G. Teubner, Leipzig.

Fasc. 3. — H. Blasius : Stromfunktionen symmetrischer und unsymmetrischer Flügel in zweidimensionaler Strömung. — M. Disteli : Ueber die Verzahnung der Hyperboloidräder mit geradlinigem Eingriff. — P. Schulze : Allgemeine Theorie unsymmetrischer Ablenkungen bei Systemen mit einem Freiheitsgrad und deren Zusammenhang mit der allgemeinen Theorie unsymmetrischer Schwingungen gleicher Systeme, nebst Anwendungen auf besondere Fälle. — A. Weber : Geschwindigkeitsänderung eines bewegten Holraums infolge von Kompression. — A. Weber : Die Transformation von Energie und Bewegungsgrösse. — Horst von Sanden : Ueber eine zweckmässige Konstruktion des Stangenplanimeters.

Fasc. 4. — W. Behrens : Ein mechanisches Problem aus der Theorie der Laval-Turbine, behandelt mit Methoden der Himmelsmechanik. — P. Fillunger : Die Spannungsverteilung im geraden Kreiskegel, hervorgerufen durch eine Einzelkraft von beliebiger Richtung und Lage. — K. Goldziher : Beiträge zur Praxis der für die Berechnung des Rentenzinsfusses verwendbaren speziellen trinomischen Gleichung. — O. Mohr : Graphische Zusammensetzung und Zerlegung von räumlichen Kräftegruppen. — R. Mehmke : Beiträge zur Kinematik starrer und affin-veränderlicher Systeme, insonderheit über die Windung der Bahnen der Systempunkte.

2. Livres nouveaux :

L. Bachelier. — **Calcul des probabilités.** Tome I. — 1 vol. in-4°, VII-518 p.; 25 fr.; Gauthier-Villars, Paris.

George W. Evans. — **The Teaching of High School Mathematics.** (Riverside educational Monographs). — 1 vol. in-16, X-94 p.; 35 cents (Fr. 1,75); Houghton Mifflin Company, Boston, New-York et Chicago.

C. Godfrey and A. W. Siddons. — **A Shorter Geometry.** — 1 vol. in-8°, XXII-301 p.; 2 s. 6 d.; University Press, Cambridge.

George Bruce Halsted. — **Géométrie rationnelle.** Traité élémentaire de la Science et de l'Espace. Traduction française par Paul Barbarin, avec une préface de C.-A. Laisant. — 1 vol. in-8° (24-14) de IV-296 p., avec 184 fig.; broché 6 fr. 50 (cartonné 7 fr. 50); Gauthier-Villars, Paris.

M. Lecat. — **Abrégé de la théorie des déterminants à n dimensions,** avec de nombreux exercices. — 1 vol. in-4°, XVI-156 p.; Ad. Hoste, Gand.

H. H. Stephenson. — **Who's Who in Science** (International), 1912. — 1 vol in-8°, XVI-323 p.; 6 s.; J. & A. Churchill, Londres.

E. Stoffaes (l'Abbé). — **Cours de Mathématiques supérieures** à l'usage des candidats à la licence ès Sciences physiques. 3e édition entièrement refondue. — Deux volumes in-8° se vendant séparément : Tome I : *Compléments d'algèbre élémentaire. Dérivées. Equations. Géométrie analytique. Differentielles et intégrales.* Volume de X-398 p. avec 114 fig.; 10 fr.; Tome II : *Courbes et Surfaces. Equations différentielles.* Vol. de V-362 p. avec 175 fig.; 10 fr.; Gauthier-Villars, Paris.

Congrès mondial des Associations internationales. Premier volume, Documents préliminaires. Rapports. — 1 vol. (gr. in-8°, 830 p.), publié par l'Office central des Institutions internationales, Bruxelles.

Verzeichnis mathematischer Modelle. Sammlung H. Wiener u. P. Treutlein. — 1 br. in-8°, 64 p.; B. G. Teubner, Leipzig.



EMILE LEMOINE
1840-1912

ÉMILE LEMOINE
(1840-1912)

Certains savants doivent une bonne part de leur notoriété à l'importance des fonctions qu'ils occupèrent, à l'éclat des distinctions qui leur furent conférées.

D'autres, morts jeunes, ont été complètement méconnus ou inconnus de leur vivant, et il a fallu des années, souvent longues, pour découvrir après coup l'importance de leur œuvre et la puissance de leur génie.

Celui qui vient d'être enlevé à la science française, le 21 février 1912, n'appartenait ni à l'une ni à l'autre de ces deux catégories. Emile Lemoine était un mathématicien d'une extrême originalité, doué d'un remarquable esprit d'invention, d'une vaste intelligence ; mais modeste, sans prétentions, dépourvu de toute ambition scientifique. Il s'intéressait à toutes les manifestations de l'esprit, aimait avec passion la science mathématique, et travaillait par plaisir, ce qui ne l'empêchait pas, tant s'en faut, d'être un acharné travailleur.

C'est un devoir douloureux que je remplis aujourd'hui, en entreprenant de présenter ici un aperçu résumé de sa vie et de son œuvre. Depuis 1860, c'était l'un de mes plus intimes amis ; et sa disparition a été pour moi un vide cruel. Mais sa mémoire ne doit pas être oubliée. Elle doit l'être d'autant moins que son existence intellectuelle tout entière nous apporte un enseignement précieux ; elle nous montre, d'une part, que l'esprit n'a pas besoin d'une spécialisation outrancière, qu'il conserve au contraire sa puissance d'invention et sa fécondité, d'autant mieux qu'il sait s'intéresser aux manifestations intellectuelles extérieures ; nous y voyons en outre la preuve qu'il faut aimer son œuvre pour faire une œuvre belle et utile. C'est encore plus vrai peut-être en matière mathématique qu'en toute autre.

Je ferai, dans ce qui va suivre, de larges emprunts à une notice biographique de notre confrère M. D.-E. Smith, publiée

dans le journal *The American Mathematical Monthly*. Forcé de l'abréger sur certains points, de la compléter sur d'autres, je ne pouvais trouver un plus précieux document pour venir en aide à mes souvenirs personnels, et je tiens à en exprimer ma reconnaissance à l'éminent professeur de New York.

Emile Lemoine est né à Quimper le 22 novembre 1840. Fils d'un officier retraité, il fit ses études au Prytanée de La Flèche, et fut admis en 1860 à l'Ecole polytechnique. Dès cette époque, il conquit une certaine notoriété sympathique parmi ses camarades par sa bonne humeur, son originalité, ses goûts artistiques ; c'est là que pendant les récréations il institua des séances musicales, premier embryon des soirées de *La Trompette*, aujourd'hui connues dans tout le monde artistique ; c'est là qu'il organisa, pour l'équinoxe du printemps, la *Fête du point Gamma*, qui pendant de longues années est restée traditionnelle et a été régulièrement célébrée par les élèves de l'Ecole polytechnique.

A sa sortie de l'Ecole, il ne choisit aucune des carrières que l'Etat offre aux élèves. Il vécut à Paris comme professeur libre, donnant surtout des leçons de mathématiques ; soucieux de son indépendance, avide de connaissances nouvelles, il suivit les cours de l'Ecole des Mines, travailla au laboratoire de Würtz, fréquenta l'Ecole de Médecine et les hôpitaux, fut en relations avec un grand nombre d'hommes de science, d'artistes, de littérateurs, de philosophes, quelques-uns célèbres ; d'autres, inconnus alors, mais qui acquirent plus tard une grande notoriété. Sa prédilection était pour les mathématiques et la musique. Mais il avait fait sienne la fameuse devise

Homo sum et nihil humani a me alienum puto.

Un peu frondeur par tempérament, il manifestait des sentiments de profonde aversion contre l'empire, était déjà nettement républicain et totalement affranchi au point de vue religieux. Rien de tout cela n'était de nature à lui faciliter les conditions de la vie, au point de vue pratique ; mais ses goûts étaient modestes et son ambition nulle.

Au moment où survint la guerre de 1870, il était atteint déjà d'une maladie qui l'avait contraint à aller se reposer à Grenoble et l'empêcha de prendre aucune part aux événements. Après son retour à Paris, son état de santé ne lui permettait plus de faire du professorat. Il occupa divers emplois d'ingénieur dans l'industrie privée, fit à ce titre d'assez nombreux voyages, et fut enfin, en 1886, nommé ingénieur de la Ville de Paris comme chef du service de vérification du gaz.

Cet emploi ayant été supprimé en 1900, il prit dès lors sa retraite, partagea son activité entre les soirées de *La Trompette* et ses travaux mathématiques, et finit par se fixer définitivement dans la petite propriété qu'il avait acquise près de Montereau.

Marié depuis 1883, il y menait une existence paisible, entouré des soins, qu'on pourrait dire maternels, de la plus dévouée des épouses. Sa santé, profondément atteinte depuis une dizaine d'années, le condamnait à une grande inaction physique et à une extrême modération dans le travail. Mais cela ne lui avait rien enlevé de sa bonne humeur ni de son esprit ; et les amis qui de temps à autre pouvaient aller passer auprès de lui quelques heures, à sa grande joie, constataient combien sa réserve de gaîté lui donnait des forces pour résister aux souffrances physiques.

La décoration de la Légion d'honneur, qui lui fut conférée en 1906, ne le laissa pas indifférent. Il y voyait une sorte de consécration officielle de ses travaux ; peut-être bien, dans sa modestie, ne se rendait-il pas bien compte que ceux-ci étaient de beaucoup supérieurs à celle-là.

Depuis 1905, l'Académie des Sciences lui avait accordé une récompense plus efficace et plus sérieuse par l'attribution régulière du prix Francœur, pour l'ensemble de ses travaux.

Au courant du mois de novembre dernier, il s'était rendu à Nice, et se proposait d'y séjourner tout l'hiver. Mais au bout de quelques semaines, une aggravation de son état de santé se manifesta, et contraignit Mme Lemoine à le ramener à Paris, alors que le retour était encore possible.

Une attaque de paralysie le terrassa définitivement, malgré

tous les efforts et tous les soins ; et il succombait le 21 février, sans agonie apparente, semblant plutôt s'endormir que quitter la vie.

Ses obsèques ont été célébrées le 25 février, au cimetière du Père Lachaise. Fidèle aux convictions de toute sa vie depuis plus d'un demi-siècle, il avait manifesté formellement la volonté qu'il n'y eût à cette occasion aucune cérémonie religieuse, et que son corps fût incinéré. Cette volonté a été scrupuleusement respectée.

Le premier travail mathématique de Lemoine qui ait été publié date, je crois, de 1858 ; c'était une note de géométrie « Sur une conique et son cercle directeur », qui fut insérée dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*. Il était alors élève de mathématiques spéciales au Prytanée de La Flèche.

Depuis lors, et surtout depuis sa sortie de l'Ecole polytechnique, il ne cessa de s'intéresser avec une véritable passion aux mathématiques, publiant des articles, des notes, des mémoires sur les sujets les plus variés, utilisant ses cahiers d'élève, trouvant matière, dans de simples exercices, à des généralisations inattendues, à des aperçus originaux. Partout, dans ses productions, se révèle un esprit lucide et sagace, apportant sur les sujets les plus simples en apparence, des observations très personnelles.

Il compta parmi les premiers fondateurs de la « Société Mathématique de France », et apporta aussi tout son concours à la création de l' « Association française pour l'avancement des sciences ». Une grosse partie de ses travaux figure dans les comptes rendus de ces deux sociétés dont il fut pendant de longues années l'un des membres les plus assidus, tant que sa santé le lui permît.

Ne pouvant, à cause de l'extrême dispersion et du nombre des articles dont il fut l'auteur, essayer d'en donner une indication détaillée, je tiens seulement ici à mettre en lumière les deux chapitres de la science dont il a été le créateur. Je n'aurai pour cela qu'à reproduire, presque textuellement, ce que j'écrivais en 1903 à la Société physico-mathématique de Kazan, dans un rapport qu'elle m'avait demandé, rapport à

la suite duquel Lemoine fut l'objet d'une récompense dans le concours du prix Lobatchewsky.

La « Géométrie du triangle » lui appartient tout entière, on peut le dire sans nulle exagération. L'origine de cette branche de la Géométrie moderne est marquée par une communication qu'il fit, en 1873, à l'Association française pour l'avancement des sciences, au Congrès de Lyon. Il y signalait l'existence d'un point remarquable du triangle. L'année suivante, il revenait sur le même sujet, au Congrès de Lille, et signalait des propriétés nouvelles. Le point en question avait bien été remarqué auparavant d'une façon accidentelle ; mais jamais l'étude systématique n'en avait été faite ; et c'est à juste titre qu'on a donné aujourd'hui partout la désignation de « point de Lemoine » à ce centre des médianes antiparallèles, ou centre des symédianes, dont la découverte a été le point de départ d'innombrables travaux, dans tous les pays où sont en honneur les études mathématiques. Depuis bien longtemps la géométrie n'avait eu l'occasion d'enregistrer un tel accroissement de sa richesse.

Passant sous silence les développements et les généralisations que donna Lemoine à la Géométrie du triangle, parmi lesquels il y a lieu de noter de très intéressantes études sur le tétraèdre, j'arrive maintenant à l'invention de la « géométrographie ». Je crois bien que c'est moi qui ai reçu ses premières confidences à ce sujet. Ce fut dans une conversation particulière, vers 1887, d'après mes souvenirs. Il m'exposa ses vues fondamentales ; un peu méfiant de lui-même, il paraissait éprouver quelque hésitation à lancer publiquement à travers le monde scientifique des idées aussi nouvelles. Je l'y engageai fort et il suivit bientôt mon conseil, que je n'ai jamais regretté. Peut-être à un plus haut degré encore que la Géométrie du triangle, la Géométrographie doit être considérée comme le principal titre de gloire scientifique de Lemoine; dans le passé, on n'en saurait trouver aucune racine, aucune trace, si minime soit-elle.

Au moyen d'un ensemble de conventions très simples, la Géométrographie arrive à résoudre les deux problèmes suivants :

1° Evaluer par un coefficient numérique la simplicité d'une construction effectuée au moyen de la règle et du compas ; ce qui permet de faire un choix entre diverses constructions connues ;

2° Etablir les moyens pratiques de simplifier le plus possible une construction, pour arriver à la solution irréductible ou *Construction géométrographique*, la plus simple de toutes.

Le premier mémoire sur le sujet, *De la simplicité dans les sciences mathématiques*, fut présenté en 1888 au Congrès de l'Association française pour l'avancement des Sciences, à Oran. L'idée de l'auteur avait une ampleur philosophique dépassant de beaucoup l'étude des constructions, et il ne l'a jamais abandonnée ; mais il s'est attaché à la Géométrographie, comme application ; il a porté sur ce point tous ses efforts ; et il en a été largement récompensé de son vivant, en voyant se propager de toutes parts, et même pénétrer dans l'enseignement sur quelques points, la doctrine nouvelle et féconde qu'il avait créée.

Son *Traité de Géométrographie* (1901) forme l'un des élégants petits volumes de la collection *Scientia*, et une nouvelle édition était en préparation à la veille même de la mort de l'auteur.

Il me faut aussi mentionner en terminant la fondation de l'*Intermédiaire des mathématiciens*, à laquelle j'ai collaboré. M. Smith l'a racontée dans sa notice précitée, avec force détails et beaucoup d'humour. Je dois me borner ici à répéter que Lemoine eut tout le mérite de l'initiative, et que Gauthier-Villars père nous apporta dès la première heure l'appui le plus précieux ; son fils et successeur a continué du reste à se montrer fidèle observateur de la tradition paternelle.

J'étais d'autant mieux disposé à accueillir avec enthousiasme la proposition de Lemoine, que je rêvais à ce moment même de la création possible d'une association internationale des mathématiciens. Grâce à l'*Intermédiaire*, mon rêve a été réalisé depuis sous la forme la plus pratique, par l'institution de nos *Congrès internationaux*. Il faut que j'y insiste, car si l'idée première nous vint du dehors, si M. George Cantor

nous la communiqua, Lemoine y pensait juste à la même heure. Il s'y appliqua, sans ménager son temps ni sa peine, avec une ardeur d'apôtre, multipliant les correspondances et les démarches personnelles, entraînant les indécis, répondant aux objections. Tant de dévouement ne devait pas rester stérile; le brillant succès du Congrès de Zurich, en 1897, en fut la preuve. L'état de santé de Lemoine l'empêcha d'y assister. Mais, trois années plus tard, au Congrès de Paris où il put faire au moins acte de présence, les représentants de la science mathématique montrèrent que, dans tous les pays, on savait quel était le fondateur véritable des Congrès, et qu'à lui devaient être adressés les témoignages de gratitude.

Les Congrès internationaux sont devenus désormais une institution solide et durable. Ils ont rendu de grands services, sous forme directe et indirecte. C'est à eux, notamment, qu'est due la grande enquête sur l'enseignement qui a provoqué tant de travaux utiles, dont il sera rendu compte à Cambridge cette année même, et qui seront vraisemblablement poursuivis quelques années encore, jusqu'au Congrès de Stockholm. Les mathématiciens des jeunes générations ne doivent pas oublier que parmi leurs aînés, celui qui vient de nous être enlevé a droit à leur reconnaissance. Et la vraie manière de payer cette dette, c'est de chercher à imiter celui qui n'est plus parmi nous ; c'est de travailler par plaisir, de se passionner pour la recherche de la vérité ; c'est surtout de rester soi-même, de suivre sa route en respirant librement, à pleins poumons. Pour tout dire d'un mot, c'est de vivre.

Lemoine a vécu, et bien vécu, par le cœur et par l'esprit, épris de beauté et de vérité, aimant l'art et la science. Nous, qui l'avons connu, avons le droit de dire que son œuvre ne périra pas, et que sa mémoire méritera d'être honorée, tant qu'il y aura dans le monde des savants et des artistes[1].

C.-A. LAISANT.

---

[1] Le caractere spécial de notre Revue m'a empêché d'entrer dans aucun détail sur la création et le développement des soirées musicales de la Trompette. L'histoire en a été d'ailleurs écrite de façon magistrale par M. Augé de Lassus, l'un des admirateurs de l'œuvre et des plus sincères amis du fondateur, sous le titre : LA TROMPETTE, *un demi-siecle de musique de chambre ;* 1 vol. 237 p. avec héliotypies ; Paris, Delagrave, 1911. C.-A. L.

LES FRACTIONS CONTINUES DANS LA THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES NOMBRES[1]

1. — Désignons par $E\omega$ la partie entière du nombre positif non entier ω; la quantité $\omega - E\omega$ est < 1 et peut être mise sous la forme $\frac{1}{\omega'}$, ω' étant > 1; de même, $\omega' - E\omega' = \frac{1}{\omega''}$, ω'' étant > 1. En continuant ainsi jusqu'à un terme quelconque Ω, qui sera commensurable ou non en même temps que ω, — on aura le développement de ω en *fraction continue*,

$$\omega = E\omega + \cfrac{1}{E\omega' + \cfrac{1}{E\omega'' + \ddots + \cfrac{1}{\Omega}}}$$

qu'on représente plus simplement ainsi :

$$\omega = | E\omega, E\omega', E\omega'' \ldots \Omega | .$$

Il ne s'agira ici que des valeurs de ω fractionnaires ou irrationnelles du deuxième degré.

2. — *Algorithme d'Euclide. Continuants.* — Soient deux nombres positifs N, A, et le premier plus grand que le second. Posons :

$$N = aA + B , \quad A = bB + C , \quad B = cC + D , \ldots$$
$$F = gG + H , \quad G = hH + I , \ldots$$

$a, b, c, \ldots$ désignant la partie entière des quotients successifs de

[1] Les fractions continues fournissent bien des démonstrations d'importants théorèmes de la théorie des nombres; mais ces démonstrations, indirectes et souvent compliquées, ne peuvent être présentées que comme vérification. Par suite, il faudrait éviter de les mettre en tête d'un traité des nombres, car elles ne permettent pas d'entrer assez rapidement dans le sujet. Au contraire, leur rôle d'application des théories élémentaires parait tout indiqué.

C'est dans cette idée qu'a été écrit le présent article : ce n'est donc pas une théorie spéciale des fractions continues, avec, comme corollaires, des applications aux propriétés des nombres ; mais, au contraire, la suite d'une étude des nombres où il est fait appel à cette théorie, ce qui a permis de simplifier plusieurs démonstrations. Cette étude, — amenée d'ailleurs par l'exposé des solutions des équations $ax - by = 1$ et $x^2 - ay^2 = 1$, auxquelles se réduisent celles des congruences des deux premiers degrés, — est complétée par l'énoncé des questions élémentaires les plus importantes relatives aux fractions continues, de manière qu'on trouvera réuni ici ce qu'il est le plus indispensable de connaitre sur ce sujet.

N par A, de A par B, de B par C, ... et B, C, D, ... les restes correspondants : l'ensemble de ces opérations constitue ce qu'on appelle l'*algorithme d'Euclide*.

On a :

$$(1) \qquad \frac{N}{A} = \left| a, b \ldots h, \frac{H}{I} \right| = \left| a, b \ldots h + \frac{I}{H} \right|$$

et cette décomposition ne peut se faire que d'une seule manière.

Les nombres N, A, B, C, ... décroissent de plus en plus. En outre, ils sont entiers et premiers entre eux si N et A sont eux-mêmes des nombres entiers premiers entre eux.

Ecrivons

$$(0) = 1 , \qquad (a) = a , \qquad (a, b) = (a)b + (0) = ab + 1 ,$$
$$(a, b, c) = (a, b)c + (a) , \quad \ldots$$

et en général,

$$(\alpha) \qquad (a \ldots f, g, h) = (a \ldots f, g)h + (a \ldots f) ;$$

Ces expressions sont appelées les *médiateurs* (Kramp), les *cumulants* (Sylvester), les *objectifs* (Dormoy), ou les *continuants* (Muir) des nombres a, b ... f, g, h. On les voit définies pour la première fois dans l'*Alg.* de Saunderson.

On peut écrire :

$$(a \ldots f, g)G + (a \ldots f)H = (a \ldots f, g, h)H + (a \ldots f, g)I .$$

Les binômes analogues au premier membre ont donc une valeur constante, égale par conséquent à

$$(a, b)B + (a)C = (ab + 1)B + a(A - bB) = N .$$

Ainsi en général,

$$(2) \qquad (a \ldots g, h)H + (a \ldots g)I = N .$$

De même on a :

$$(b \ldots f, g, h)H + (b \ldots f, g)I = A \quad \text{et} \quad (c \ldots f, g, h)H + (c \ldots f, g)I = B ,$$

d'où

$$(3) \qquad \frac{N}{A} = \left| a, b \ldots f, g, h \right| = \frac{(a \ldots h)H + (a \ldots g)I}{(b \ldots h)H + (b \ldots g)I}$$

$$N = aA + B = [a(b \ldots h) + (c \ldots h)]H + [a(b \ldots g) + (c \ldots g)]I .$$

Comparant cette dernière relation avec (2), il vient

$$(\beta) \qquad a(b \ldots h) + (c \ldots h) = (a \ldots f, g, h) .$$

Or, de (α) on tire, en changeant $a, b, \ldots g, h$, en $h, g, \ldots b, a$,

$$(\gamma) \qquad (h \ldots a) = a(h \ldots b) + (h \ldots c) .$$

Mais on a :

$$(c, b) = cb + 1 = (b, c)$$

$$(d, c, b) = (d, c)b + (d) = (d\,c + 1)b + d = (b\,c + 1)d + b$$
$$= (b, c)d + (b) = (b, c, d) .$$

Donc

$$(d, c, b, a) = a(d, c, b) + (d, c) = a(b, c, d) + (c, d) = (a, b, c, d) .$$

En général, on a cette importante relation, due à Euler,

$$(4) \qquad (a \ldots h) = (h \ldots a) .$$

3. — La somme des deux expressions analogues

$$(b \ldots h)(a \ldots g) - (a \ldots h)(b \ldots g) \quad \text{et} \quad (b \ldots g)(a \ldots f) - (a \ldots g)(b \ldots f)$$

est identiquement nulle, ce qu'on voit en remplaçant les expressions ($a \ldots h$) et ($b \ldots h$) par leurs valeurs

$$(a \ldots g)h + (a \ldots f) \qquad \text{et} \qquad (b \ldots g)h + (b \ldots f) .$$

Ces deux expressions ont donc des valeurs égales et de signes contraires, que de proche en proche, on arrivera à représenter ainsi :

$$\pm (b, c)(a, b) \mp (a, b, c)b = \pm (bc + 1)(ab + 1) \mp (abc + a + c)b = \pm 1 .$$

On a donc :

$$(5) \qquad (b \ldots g, h)(a, b \ldots g) - (a, b \ldots g, h)(b \ldots g) = (-1)^t$$

t désignant le nombre des quantités $a, b \ldots g, h$ (Saunderson).

Or on a :

$$(\delta) \quad A = (b \ldots g)G + (b \ldots f)H , \qquad N = (a \ldots g)G + (a \ldots f)H ,$$

d'où

$$(b \ldots g)N - (a, b \ldots g)A = \pm H .$$

Si A et N sont deux entiers premiers entre eux, on finira par trouver $H = 1$ et $I = 0$, ce qui donnera

$$(6) \qquad (b \ldots g)N - (a \ldots g)A = \pm 1$$

$$(7) \qquad (b \ldots h)N - (a \ldots h)A = 0 .$$

Euler a encore donné la relation suivante

$$(8) \quad (a \dots b, c, d, e \dots f) = (a \dots b, c)(d, e \dots f) + (a \dots b)(e \dots f) ;$$

qui se déduit de la comparaison des coefficients de H dans la seconde relation (δ) et dans celle qu'on trouve en remplaçant C et D dans cette autre

$$N = (a \dots b, c)C + (a \dots b)D$$

par les valeurs

$$C = (d, e \dots f, g)G + (d, e \dots f)H$$

$$D = (e \dots f, g)G + (e \dots f)H .$$

4. — La formule (6) fait voir que A *et* N *étant des entiers premiers entre eux, on peut toujours écrire* $Nx - Ay = \pm 1$, *ainsi que* $Nx' - Ay' = \mp 1$, *les signes étant convenablement choisis,* en faisant dans le dernier cas, $x' = A - x$, $y' = N - y$. De là, la démonstration du *lemme fondamental* (*Ens. Math.*, 1907, p. 287) et le moyen de résoudre l'équation du premier degré à deux inconnues $Nx - Ay = M$[1].

Les formules (7) et (α) donnent

$$(9) \qquad \frac{N}{A} = \frac{(a \dots f, g, h)}{(b \dots f, g, h)} = \frac{(a \dots f, g)h + (a \dots f)}{(b \dots f, g)h + (b \dots f)}$$

h désignant le quotient correspondant à $H = 1$. Comme d'ailleurs en général d'après (5), les continuants ($a \dots g$) et ($b \dots g$) n'ont aucun facteur commun, on peut dire que de (8) on déduit les égalités

$$(10) \qquad (a \dots h) = N , \qquad (b \dots h) = A .$$

Les expressions

$$\frac{(a)}{1}, \quad \frac{(a, b)}{(b)}, \quad \frac{(a, b, c)}{(b, c)}, \quad \frac{(a, b, c, d)}{(b, c, d)}, \quad \dots$$

sont dites les *réduites* de $\frac{N}{A}$. De la sorte, si une quantité quelconque est définie par une fraction continue $|a, b, c \dots|$, on en

[1] On a des tables de solutions toutes faites, par exemple le *Canon mathematicus* de JACOBI (Berlin, 1839), qui donne les solutions *primitives* (inférieures à p) des deux congruences $g^x \equiv a$ et $g^a \equiv x$, g désignant une *racine primitive* de p pour $p < 1000$.

Soit à résoudre $\alpha x - py = \beta$, on cherchera les nombres A et B tels que $g^A \equiv \alpha$ et $g^B \equiv \beta$; on aura : $x \equiv g^{B-A}$.

A défaut des tables de Jacobi, on se servira de celle de GAUSS (*Disq. Arith.*), auteur de cette application des racines primitives; ou de celles d'Ostrogradski, insérées dans les traités de TCHEBICHEF et de CAHEN; ou celles de LEBESGUE (*Tables numériques*, Paris, 1866). Celles de Gauss s'arrêtent à $p = 97$; les secondes à $p = 197$.

trouvera les réduites à l'aide des formules qui précèdent. Dans le cas de N et A entiers, on a vu que leur nombre est limité; si N et A sont incommensurables, le nombre des réduites est indéfini et on peut s'arrêter à un terme quelconque, qui est alors lui-même incommensurable; si on a, par exemple,

$$\omega = | a, b, c \dots e, f, g, \Omega |$$

on peut écrire

$$(11) \qquad \omega = \frac{(a \dots f, g, \Omega)}{(b \dots g, \Omega)} = \frac{(a \dots f, g)\Omega + (a \dots f)}{(b \dots f, g)\Omega + (b \dots f)}\,[1]$$

(voir exercices n°s 1 à 11).

5. — Supposons que les entiers $a, \dots b, c \dots$ soient en nombre impair et leurs valeurs, symétriques, de sorte qu'on puisse les écrire $a \dots b, c, d, c, b, \dots a$; (8) deviendra

$$(12) \quad (a \dots b, c, d, c, b \dots a) = (a \dots b, c)[(a \dots b, c, d) + (a \dots b, c)];$$

on peut encore affirmer que $(a \dots b, c, d, c, b \dots a)$ est un nombre composé, à moins que $(a \dots c)$ ne soit égal à 1, ce qui ne peut avoir lieu si $a > 1$.

Si ces mêmes entiers sont en nombre pair et leurs valeurs également symétriques, on aura :

$$(13) \qquad (a \dots c, d, d, c \dots a) = (a \dots c, d)^2 + (a \dots c)^2 .$$

Soient A, A′, A″, ... les entiers premiers avec N et inférieurs à la moitié de ce dernier; les quotients de N par ces mêmes nombres auront leur partie entière plus grande que 1. Soit $\frac{(a, b \dots e, f)}{(b \dots e, f)}$ la dernière réduite de $\frac{N}{A}$; on aura

$$N = (a, b \dots e, f) \qquad \text{et} \qquad A = (b \dots e, f) .$$

De même la fraction $\frac{(a, b \dots e, f)}{(a, b \dots e)}$, après calcul des continuants et réduction en fraction continue, donnera $(a, b \dots e)$ égal à un des nombres A, A′, ... Ainsi, à chacun des nombres A, A′, ... correspond un autre nombre qui donne un continuant semblable, sauf qu'il a un terme de plus à droite et un de moins à gauche.

---

[1] La formule (11) se déduit directement de (α) en remarquant que la supposition

$$| b, c \dots \Omega | = \frac{(b, c \dots \Omega)}{(c \dots \Omega)} \text{ entraîne la relation } | a, b, c \dots \Omega | = a + \frac{1}{| b, c \dots \Omega |}$$

$$= \frac{a(b, c \dots \Omega) + (c \dots \Omega)}{(b, c \dots \Omega)} .$$

Dans le cas particulier où N est un nombre premier 4 + 1, les nombres A, A′, ... ne sont autres que les entiers 2, 3, 4, ... $\frac{N-1}{2}$ qui sont en nombre impair : il faut donc qu'un de ces nombres, par exemple A‴, se corresponde à lui-même. Si a, b, ... g, h sont les quotients qui résultent du développement de $\frac{N}{A'''}$ en fraction continue, on a évidemment $(a, b \ldots g) = (h, g \ldots b)$; le continuant $(a, b \ldots g, h)$ est donc symétrique, et il ne peut être formé d'un nombre impair de termes, puisqu'on a : $a > 1$, et que, d'autre part, N est premier.

On a ainsi la démonstration de ce célèbre théorème de Fermat : *tout nombre premier* 4 + 1 *est une somme de deux carrés*, et un moyen facile d'en déterminer la composition (Smith). (Voir exercices n°s 12 et 13.)

6. — *Lemme*. L'entier y variant de 0 à k, et ω désignant un nombre irrationnel, appelons x l'entier $1 + E(y\omega)$ immédiatement supérieur à $y\omega$; on aura $0 < x - y\omega < 1$. La valeur de $x - y\omega$ est comprise entre deux des fractions $\frac{0}{k}, \frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \ldots \frac{k}{k}$. Comme il n'y a que k intervalles et que y, et par suite $x - y\omega$, peuvent prendre $k + 1$ valeurs, il y a au moins un intervalle comprenant deux valeurs de $x - y\omega$, et on peut écrire :

$$0 < (x' - y'\omega) - (x'' - y''\omega) < \frac{1}{k} \quad \text{ou} \quad 0 < (x' - x'') - (y' - y'')\omega < \frac{1}{k} ;$$

$y' - y''$ est une des valeurs de y ; donc, en écrivant $x' - x'' = x$, il vient

$$(\varepsilon) \qquad 0 < x - y\omega < \frac{1}{k} < \frac{1}{y}.$$

Prenons k' assez grand pour que la plus petite valeur de $x - y\omega$ soit $> \frac{1}{k'}$; on obtiendra, de la même manière que tout à l'heure, un autre couple ξ, η, qui donnera une nouvelle solution de (ε), et ainsi de suite.

Par conséquent, *on peut toujours trouver une infinité de couples de valeurs de* x *et de* y *satisfaisant à la relation* $x - y\omega < \frac{1}{k}$ (Lejeune-Dirichlet).

Cor. Posons $\omega = \sqrt{n}$; on peut trouver une infinité de solutions de l'inégalité

$$(\zeta) \qquad 0 < x - y\sqrt{n} < \frac{1}{y}.$$

ce qui permet d'écrire

$$0 < x + y\sqrt{n} < \frac{1}{y} + 2y\sqrt{n} ,$$

et, en multipliant,

$$0 < x^2 - ny^2 < \frac{1}{y^2} + 2\sqrt{n} < 1 + 2\sqrt{n} .$$

Ainsi, θ *désignant un certain entier compris entre* 0 *et* $1 + 2\sqrt{n}$, *l'équation* $x^2 - ny^2 = \theta$ *a une infinité de racines* (id.).

(Voir exercices n°s 14 et 15.)

7. — *Problème de Fermat. — Si* n *désigne un nombre non carré, l'équation* $t^2 - nu^2 = 1$ *a une infinité de solutions.* (Fermat). Démonstration de Lejeune-Dirichlet. Parmi l'infinité de couples de solutions de $x^2 - ny^2 = \theta$, il ne peut se trouver plus de θ^2 couples tels que x et y divisés par θ donnent pour restes toutes les combinaisons des nombres inférieurs à θ. Il existe donc une infinité de couples qui donnent les mêmes restes, et on peut écrire :

$$x'^2 - ny'^2 = x''^2 - ny''^2 = \theta , \qquad x'' = x' + \alpha\theta , \qquad y'' = y' + \beta\theta ,$$

d'où, en posant $1 + \alpha x' - n\beta y' = t$, $\alpha y' - \beta x' = u$,

$$(x' \mp y'\sqrt{n})(x'' \pm y''\sqrt{n}) = \theta(t \mp u\sqrt{n}) ,$$

ce qui conduit facilement à l'équation $t^2 - nu^2 = 1$, où u est différent de zéro, car autrement on aurait

$$t = \pm 1 \qquad \text{et} \qquad x' - y'\sqrt{n} = \pm(x'' - y''\sqrt{n}) ,$$

ou bien

$$x' = \pm x'' \qquad \text{et} \qquad y' = \pm y'' ;$$

or x' et x'' peuvent être supposés positifs et inégaux, de même que y' et y''.

Cor. 1. *Soit* $x = a$, $y = b$ *une solution de* $x^2 - ny^2 = 1$; *les expressions*

$$(14) \quad \begin{cases} x_k = a^k + C_{k,2}\, a^{k-2} b^2 n + C_{k,4}\, a^{k-4} b^4 n^2 + \dots \\ y_k = k a^{k-1} b + C_{k,3}\, a^{k-3} b^3 n + C_{k,5}\, a^{k-5} b^5 n^2 + \dots \end{cases}$$

en donneront une infinité d'autres, en faisant $k = 2, 3, 4, \dots$ (Euler). En effet

$$x_k \pm y_k\sqrt{n} = (a \pm b\sqrt{n})^k \qquad \text{d'où} \qquad x_k^2 - ny_k^2 = 1 .$$

Les formules (14) peuvent s'écrire

$$(15)\quad \begin{cases} 2x_k = (a + b\sqrt{n})^k + (a - b\sqrt{n})^k, \\ 2y_k\sqrt{n} = (a + b\sqrt{n})^k - (a - b\sqrt{n})^k. \end{cases}$$

Les solutions forment deux *séries récurrentes* dont *l'échelle* est $2a$ et $-(a^2 - nb^2) = -1$, c'est-à-dire que $x_{k+1} = 2ax_k - x_{k-1}$ et $y_{k+1} = 2ay_k - y_{k-1}$.

II. Soit (x_1, y_1) la solution en nombres minima, et soit (u, v) une solution non comprise dans la série (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), ... On peut écrire $x_k < u < x_{k+1}$, et il s'ensuivra $y_k < v < y_{k+1}$.

Par suite on aura

$$x_k + y_k\sqrt{n} < u + v\sqrt{n} < x_{k+1} + y_{k+1}\sqrt{n}.$$

Le dernier membre est égal à

$$(x_k + y_k\sqrt{n})(x_1 + y_1\sqrt{n}) = \frac{x_1 + y_1\sqrt{n}}{x_k - y_k\sqrt{n}};$$

on a donc :

$$1 < (ux_k - nvy_k) + (vx_k - uy_k)\sqrt{n} < x_1 + y_1\sqrt{n};$$

or $(ux_k - nvy_k)^2 - n(vx_k - uy_k)^2 = 1$. On aurait ainsi une solution en termes positifs et moindres que x_1, y_1, ce qui est contre l'hypothèse, laquelle est donc à rejeter. (Voir exercices nos 16 à 21.)

8. *Algorithme d'Euler.* — Soient a' la racine $E\sqrt{n}$ du plus grand carré contenu dans l'entier n, et a'' le reste $n - a'^2$. Considérons la septuple série

a'	b'	...	d'	e'	f'	g'	h'	...
a''	b''	...	d''	e''	f''	g''	h''	...
α	β	...	δ	ε	φ	γ	η	...
a	b	...	d	e	f	g	h	...
α'	β'	...	δ'	ε'	φ'	γ'	η'	...
A′	B′	...	D′	E′	F′	G′	H′	...
A	B	...	D	E	F	G	H	...

dans laquelle les termes f' et f'' supposés connus, les termes qui

suivent ceux-ci sont déterminés par les lois générales suivantes :

$$(\eta)\quad \varphi = \frac{\sqrt{n}+f'}{f''}\,,\qquad (\theta)\quad f = \mathrm{E}\varphi\,,\qquad (\iota)\quad g' = ff'' - f'\,,$$

$$(\varkappa)\quad g'' = \frac{n-g'^2}{f''}\,,\qquad (\lambda)\quad \varphi' = \frac{\sqrt{n}-g'}{f''} = \frac{g''}{\sqrt{n}+g'}\,,$$

$$(\mu)\quad \mathrm{F}' = (a', a, b, \ldots e, f)\,,\qquad (\nu)\quad \mathrm{F} = (a, b, \ldots e, f)\,.$$

Les termes représentés par des lettres grecques sont irrationnels ; tous les autres sont entiers : on voit en effet que si $n - f'^2$ est divisible par f'', il en est de même, d'après (ι) de $n - g'^2$; or $n - a'^2$ est divisible par a'' : il en est donc ainsi en général.

L'algorithme renfermé dans les formules (η), (θ), (ι), $(\varkappa)$, (λ), connu probablement de Fermat et entrevu par Bombelli, Cataldi et Wallis, a été présenté explicitement par Euler et démontré par Lagrange. Il résulte immédiatement de la décomposition de $\sqrt{n}$ en fraction continue, comme il a été dit au n° **1**.

(Voir exercices n°s 23 à 26.)

9. — Si on a $2\sqrt{n} > \sqrt{n} + f' > f'' > 0$, il s'ensuit $\varphi > 1$ et, à cause de (θ), $1 > \varphi - f > 0$. Comme, à cause de (η), de (ι) et de (λ), on a :

$$(17)\qquad \varphi - f = \varphi'$$

(λ) donne en outre

$$(18)\qquad f'' + g' > \sqrt{n} > g' \quad \text{et} \quad \sqrt{n} + g' > g'' > 0$$

d'où

$$(19)\qquad 2\sqrt{n} > \sqrt{n} + g' > g'' > 0\,.$$

Ainsi, de l'hypothèse où on s'est placé, on conclut que les nombres $\sqrt{n} + g'$ et g'' sont également compris entre $2\sqrt{n}$ et 0 ; et, puisque $2\sqrt{n} > \sqrt{n} + a' > a'' > 0$, cette propriété est générale.

Les nombres $a, b, \ldots f, g, \ldots$ sont donc $\geqq 1$ et $\leqq 2a'$: ils forment par conséquent une série pouvant être partagée en *périodes* d'un nombre fini de termes, puisqu'ils ont des limites finies et se reproduisent d'après une même loi, ce qui fait que la combinaison f', f'', par exemple, doit se retrouver nécessairement, ainsi que le nombre f, qui dépend d'elle.

Cor. De $f' < \sqrt{n}$, on déduit

$$(20)\qquad ff'' = f' + g' < \sqrt{n} + g'\,.$$

Or f est entier et positif, donc, à fortiori,

$$(21) \qquad f'' < \sqrt{n} + g' = \frac{f''g''}{\sqrt{n} - g'} ,$$

d'où

$$(22) \qquad g'' > \sqrt{n} - g' = \sqrt{n} + h' - gg'' \qquad \text{et} \qquad g > \frac{\sqrt{n} + h'}{g''} - 1 .$$

Mais, par le changement de f, f', f'' et g' en g, g', g'' et h', (20) fournit la relation

$$(23) \qquad g < \frac{\sqrt{n} + h'}{g''} ;$$

des deux limites de g qu'on vient ainsi de déterminer, on tire cette formule de Lagrange

$$(24) \qquad g = \mathrm{E}\frac{\sqrt{n} + h'}{g''} .$$

10. — Il est aisé de voir qu'on a :

$$\sqrt{n} = a' + \frac{1}{\alpha} , \quad \alpha = a + \frac{1}{\beta} , \ldots \quad \varphi = f + \frac{1}{\gamma} , \quad \gamma = g + \frac{1}{\eta} \ldots$$

Le nombre $\sqrt{n}$ peut donc se décomposer en une fraction continue *illimitée*

$$(25) \qquad | a', a, b, \ldots c, d ; \ e \ldots f, g, h ; \ e \ldots f, g, h ; \ e \ldots |$$

dont les termes sont périodiques et $\leqq 2a'$: cette expression (25) peut d'ailleurs se remplacer par une infinité d'autres fractions continues limitées dont le dernier terme est irrationnel. Ainsi on a :

$$(26) \qquad \sqrt{n} = | a', a, b, c, \ldots f, \gamma | = | a', a \ldots e \ldots f \ldots f, \gamma | = \ldots$$

Par exemple, pour $n = 19$, on a les valeurs suivantes de a', b', ..., a'', b'', ..., et a, b, ...

4, 2, 3, 3, 2, 4 ; 4 ...
3, 5, 2, 5, 3, 1 ; 3 ...
2, 1, 3, 1, 2, 8 ; 2 ...

ce qui donne

$$\frac{\sqrt{19} + 4}{3} = | 2, 1, 3, 1, 2, 8 ; \ 2, 1, 3, 1, 2, 8 ; \ldots |$$

(Voir exercices nos 27 et 28.)

11. — Considérons les couples ... c', c''; d', d''; e', e''; et g', g''; h', h''; e', e''; arrêtés à un même couple e', e''. On a, d'après (ϰ)

$$d''e'' + e'^2 = h''e'' + e'^2 \qquad \text{d'où} \qquad d'' = h'' ,$$

et, à cause de (24),

$$d = \mathrm{E}\frac{\sqrt{n} + e'}{d''} = h , \qquad \text{d'où} \qquad d' = dd'' - e' = h' ,$$

et de là,

$$c'' = g'' , \qquad c = g , \qquad c' = g' , \qquad \text{et ainsi de suite.}$$

On conclut de ce qui précède que la période commence au premier terme même de la série, ce qui fait qu'on peut écrire

$$(27) \quad \begin{cases} \sqrt{n} = | a', a \dots f \dots h ; \quad a \dots f \dots h ; \quad a \dots f, \gamma | \\ \qquad = | a', a \dots f \dots h ; \quad a \dots f \dots h ; \quad a \dots | \end{cases} .$$

Mais d'après (ϰ) on a : $a''h'' = n - a'^2 = a''$. On en conclut que

$$h'' = 1 , \quad h = \mathrm{E}\sqrt{n} + a' = 2a' , \quad h' = hh'' - a' = a' , \quad g'' = \frac{n - h'^2}{h''} = a'' .$$

(Voir exercice n° 29.)

12. — A cause de (11) on a :

$$(28) \qquad \sqrt{n} = \frac{\mathrm{F}'\gamma + \mathrm{E}'}{\mathrm{F}\gamma + \mathrm{E}} ;$$

d'où, en remplaçant γ par sa valeur $\dfrac{\sqrt{n} + g'}{g''}$, effectuant et égalant séparément les parties réelles et les imaginaires de l'égalité résultante,

$$(29) \qquad \mathrm{F}'g' + \mathrm{E}'g'' = \mathrm{F}n$$

$$(30) \qquad \mathrm{F}g' + \mathrm{E}g'' = \mathrm{F}' .$$

Multipliant (29) par F et (30) par F', puis retranchant, il viendra, en remarquant que, suivant la parité du nombre des termes a', a, b, ... f, on a $\mathrm{F}'\mathrm{E} - \mathrm{F}\mathrm{E}' = \pm 1$, la relation

$$(31) \qquad \mathrm{F}'^2 - n\mathrm{F}^2 = \pm g'' .$$

Ainsi l'équation $x^2 - ny^2 = \mathrm{N}$ est toujours résoluble, d'une infinité de manières, à l'aide des formules (η), (θ), (ι), (ϰ), (λ), (μ) et (ν), si N est l'un des nombres $- a''$, $+ b''$, $- c''$, ...

Puisque l'un des nombres a'', b'', ... est égal à 1, l'équation $x^2 - ny^2 = \pm 1$ est toujours possible, en choisissant convena-

blement le signe : on posera en conséquence $x = G'$, $y = G$, $g = a'$ étant l'avant-dernier terme de la période. Si le nombre des termes de celle-ci est pair, il faut le signe + et les valeurs de x ne sont autres que les termes de la série

$$G' = (a', a \dots g), \quad G'_2 = (a' \dots g, h, a \dots g),$$

$$G'_3 = (a' \dots g, h, a \dots g, h, a \dots g), \dots$$

tandis que si les termes de la période sont en nombre impair, les termes de rang impair de cette série seront les valeurs de x dans $x^2 - ny^2 = -1$, et les termes de rang pair, les valeurs de x dans $x^2 - ny^2 = 1$. (Voir exercices n°s 30 à 35.)

13. — Désignons par D, D_2, D_3, ... et D'_1, D'_2, D'_3, ... les continuants

$$(a \dots c, d), \quad (a \dots c, d, e, f \dots a \dots d), \quad (a \dots d \dots d \dots d), \dots$$

et

$$(a', a \dots c, d), \quad (a', a \dots d \dots d), \quad (a' \dots d \dots d \dots d) \dots$$

correspondant au même quotient d. On a d'après (ι), en appelant P et Q les continuants ($e, f \dots a \dots c, d$) et ($f \dots a \dots c, d$),

$$(32) \qquad D_k = PD_{k-1} + QC_{k-1}, \qquad D'_k = PD'_{k-1} + QC'_{k-1}.$$

Les expressions D, D_2, D_3, ... peuvent donc se calculer par récurrence. On peut aussi les déduire des considérations suivantes : introduisons dans la relation

$$\sqrt{n} = \frac{D'_{k-1}\varepsilon + C'_{k-1}}{D_{k-1}\varepsilon + C_{k-1}},$$

les valeurs de C_{k-1} et de C'_{k-1} tirées de (32), il viendra

$$(33) \qquad D'_k - D_k\sqrt{n} = (P - Q\varepsilon)(D'_{k-1} - D_{k-1}\sqrt{n});$$

remplaçant ε par sa valeur $\dfrac{\sqrt{n} + e'}{e''}$, et séparant les parties réelles et les imaginaires, on aura deux égalités permettant de déduire D'_k et D_k de D'_{k-1} et D_{k-1}.

Cor. Dans le cas particulier où ces continuants correspondent à l'avant-dernier terme g de la période, ε devient $\eta = \sqrt{n} + a'$ et en outre on a :

$$P = (h, a \dots g) = (2a', a \dots g) = 2a'G + (b \dots g) = a'G + G',$$

$$Q = (a \dots g) = G.$$

d'où

(34) $$G'_k - G_k\sqrt{n} = (G' - G\sqrt{n})(G'_{k-1} - G_{k-1}\sqrt{n})$$

et par suite

(35) $$G'_k - G_k\sqrt{n} = (G' - G\sqrt{n})^k .$$

D'après ce qui a été dit au n° **7**, cor. II, G' est la plus petite valeur de x satisfaisant à l'équation de Fermat $x^2 - ny^2 = 1$, et G'_2, G'_3, ... les valeurs suivantes. On a ainsi tout à la fois une nouvelle démonstration de la possibilité de cette équation et le moyen d'en trouver les solutions.

(Voir exercices n°s 36 et 37.)

Exercices.

1. *On a :*

$$\left| a \ldots b, c \ldots \right| = \left| a \ldots b + \frac{1}{|c + \ldots|} \right| ;$$

$$|a + \alpha, b \ldots| = \alpha + |a, b \ldots| ; \quad |\ldots a, 0, b \ldots| = |\ldots a + b, \ldots| ;$$

$$|-a, b, c| = -|a - 1, 1, b - 1, c| ; \quad |a \ldots b| = |a \ldots b - 1, 1| ;$$

$$|a, -b, c| = |a - 1, 1, b - 1, -c| = |a - 1, 1, b - 2, 1, c - 1| ;$$

$$|-a_1 \ldots -a_k| = (-1)^k |a_1 \ldots a_k| ;$$

$$|a, b \ldots g, h| (b \ldots g, h) = |h, g \ldots b, a| (a, b \ldots g) ;$$

$$|a, b \ldots c| \times |b \ldots c| \times \ldots \times |c| = (a, b \ldots c) .$$

2. *Les réduites sont des fractions irréductibles.* Conséquence de (5).

3. *Les valeurs des réduites oscillent autour de celle de la fraction continue, en s'en rapprochant de plus en plus.* La première partie de ce théorème est une suite de la génération des fractions continues ; la seconde suit de ce que

$$\frac{(a \ldots h)}{(b \ldots h)} - \frac{(a \ldots g)}{(b \ldots g)} = \frac{\pm 1}{(b \ldots h)(b \ldots g)} .$$

Cor. I. *La différence de deux réduites consécutives diminue de plus en plus.*

II. *La valeur d'une fraction continue est plus près de la* k^e^ *réduite que de la* (k — 1)^e^.

4. *Toute réduite approche plus de la valeur de la fraction continue qu'une fraction quelconque dont les termes sont plus petits.* Ces propositions entrevues par Wallis et Huygens, ont été démon-

trées par Saunderson, à qui est due la relation donnée à l'exercice 3.

5. *Les réduites correspondantes des développements en fractions continues de deux fractions irréductibles dont la somme est égale à l'unité, ont elles-mêmes une somme égale à l'unité* (Stouvenel).

6. *Soit* $\left| a \ldots b, \frac{c'}{c} \right| = \frac{A'}{A}$ *et* $\left| a \ldots b, \frac{d'}{d} \right| = \frac{B'}{B}$, *on aura :*

$$\frac{A' + B'}{A + B} = \left| a \ldots b, \frac{c' + d'}{c + d} \right|. \qquad \text{(Ed. Lucas.)}$$

7. *On a :*

$$\frac{(a, b, c, d, e \ldots h)}{(b, c, d, \ldots h)} = \frac{(a)}{1} + \frac{1}{(b)(b, c)} - \frac{1}{(b, c)(b, c, d)}$$
$$+ \frac{1}{(b, c, d)(b, c, d, e)} - \ldots \qquad \text{(Euler.)}$$

8. *Le nombre des termes du continuant de* k *lettres est égal au* k^e *terme de la série de Fibonacci* 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... $u_{k+1} = u_k + u_{k-1}$ (Ed. Lucas).

9. *Si* (b ... h) = (a ... g), *la suite* a, b ... g, h *est symétrique, et réciproquement* (Legendre). En effet

$$\frac{(a, b \ldots g, h)}{(b \ldots g, h)} = | a \ldots h | \qquad \text{et} \qquad \frac{(a \ldots h)}{(a \ldots g)} = | h \ldots a |.$$

Si $(b \ldots h) = (a \ldots g)$, et dans ce cas seulement, $| a \ldots h | = | h \ldots a |$. Or une quantité donnée ne peut s'écrire que d'une seule manière en fraction continue.

10. *Démontrer la relation*

$$(a \ldots b, c, d \ldots e, f, g \ldots h)(d \ldots e) - (a \ldots e)(d \ldots h)$$
$$= (-1)^t (a \ldots b)(g \ldots h)$$

t *désignant le nombre des quantités* d ... e. (Kramp.)

11. *Soit* $X = A + \frac{1}{\alpha}$, $\alpha = a + \frac{1}{\beta}$, $\beta = b + \frac{1}{\gamma}$, ... *on aura :*

$$X\alpha\beta \ldots \gamma\delta\varepsilon = (A, a, b \ldots c, d)\varepsilon + (A, a, b \ldots c)$$
$$= (A, a, b \ldots c, d, \varepsilon) \qquad \text{(Lagrange.)}$$

12. *On a :*

$$(a, b \ldots c, d, d, c \ldots b, a)(b \ldots c, d, d, c \ldots b)$$
$$= (a, b \ldots c, d, d, c \ldots b)^2 + 1,$$

d'où la décomposition du nombre $\lambda^2 + 1$ *en deux facteurs, qui sont eux-mêmes des sommes de deux carrés* (Smith). On élève au carré les deux membres de l'égalité

$$(a \dots d)(b \dots c) - (a \dots c)(b \dots d) = \pm 1 ,$$

et on utilise la relation (13).

13. *Démontrer la relation*

$$(a \dots b, c, d \dots e, f, f, e \dots d)^2 + (a \dots b)^2$$
$$= [(a \dots b, c, d \dots e, f)^2 + (a \dots b, c, d, \dots e)^2][(d \dots e, f)^2 + (d \dots e)^2] .$$

Conséquence de (13) et de l'exercice n° 10.

14. Soient $\omega = \frac{a}{b}$, et x et y tels qu'on ait

$$0 < x - y\frac{a}{b} < \frac{1}{k} , \qquad \text{d'où} \qquad bx - ay < \frac{b}{k} ;$$

soit k l'entier immédiatement supérieur à $\sqrt{b}$. Comme $y < k$, on peut écrire $y^2 < b < k^2$, et de là

$$(bx - ay)^2 < \frac{b^2}{k^2} < b ,$$

$$(\xi) \qquad (bx - ay)^2 + hy^2 < b + hy^2 < (h + 1)b .$$

Si donc $a^2 + h$ est multiple de b, il en est de même du premier membre de (ξ), et de plus il est positif à cause de sa forme : sa valeur est donc l'un des nombres b, $2b$, $3b$, ... hb.

Soit $h = 1$; on aura $(bx - ay)^2 + y^2 = b$, puisque le premier membre a une valeur inférieure à $2b$. Donc *tout diviseur de* $a^2 + 1$ *est lui-même une somme de deux carrés* (Fermat). Cette démonstration est due à Hermite.

Faisant $h = 2$, puis $h = 3$, on démontrera de même, avec Lebesgue, que le premier membre de (ξ) est égal à b et que, par suite, *les diviseurs de* $a^2 + 2$ *et de* $a^2 + 3$ *sont respectivement de la forme* $x^2 + 2y^2$ *et de la forme* $x^2 + 3y^2$ (Euler).

Cor. I. *L'égalité* $x^2 + 1 = ny^2$ *ne peut avoir lieu qu'autant que* n *est une somme de deux carrés* (Lagrange).

II. *Les équations* $x^2 + 2 = y^3$, $x^2 + 4 = y^3$ *ne sont susceptibles, la première, que de la solution* (5, 3) *et la seconde, que des solutions* (2, 2) *et* (11, 5) (Fermat). Démonstration d'Euler. 1° y est de la forme $\xi^2 + 2\eta^2$: on posera donc $x + \sqrt{-2} = (\xi + \eta\sqrt{-2})^3$, d'où $\eta(3\xi^2 - 2\eta^2) = 1$. Il n'y a que la solution possible $\xi = 1$, $\eta = 1$.

2° y est de la forme $\xi^2 + \eta^2$. On fera en conséquence $(x + 2\sqrt{-1}) = (\xi + \eta\sqrt{-1})^3$, d'où $\eta(3\xi^2 - \eta^2) = 2$, ce qui donne $\xi = \eta = 1$ ou $\xi = 1$, $\eta = 2$.

15. *Si un nombre θ peut se mettre sous la forme* $x^2 - ny^2$, *il le peut d'une infinité de manières.*

16. On a : $x_{2k} + y_{2k}\sqrt{n} = (x_k + y_k\sqrt{n})^2$, d'où $x_{2k} = x_k^2 + ny_k^2 = 2x_k^2 - 1$. Donc $2(2x_k + 1)$ *est un carré* (Ricalde).

17. $x_{2k+1} \pm 1$ *est divisible par* $x_1 \pm 1$, *et le quotient est un carré dans les deux cas* (Palmström).

18. *Équation* $x^2 - ny^2 = -1$. Élevons au carré les deux membres de cette équation ; il viendra

$$(x^2 + ny^2)^2 - n(2xy)^2 = 1 ,$$

d'où, en désignant par (a, b) une solution de $x^2 - ny^2 = 1$,

$$2(x^2 + ny^2) = (a + b\sqrt{n})^k + (a - b\sqrt{n})^k ,$$

$$2\sqrt{n}\,(2xy) = (a + b\sqrt{n})^k - (a - b\sqrt{n})^k ;$$

$$(x \pm y\sqrt{n})^2 = (a \pm b\sqrt{n})^k$$

ce qui donne

$$(a^2 - nb^2)^k = (x^2 - ny^2)^2 = 1 ;$$

les valeurs impaires de k fournissent donc les solutions de l'équation $x^2 - ny^2 = -1$, si elles existent (Lagrange).

Cor. I. Si (a', b') est la plus petite solution de $x^2 - ny^2 = -1$, la plus petite de $x^2 - ny^2 = 1$ est $a = 2a' + 1$, $b = 2a'b'$. Donc $x^2 + 1 = ny^2$ *a ou n'a pas de solutions selon que la plus petite valeur* a *est ou n'est pas de la forme* $\frac{1}{2}X^2 + 1$ (Realis).

Ainsi la plus petite valeur de a pour

$$n = 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, \ldots$$

étant

$$a = 3, 2, 9, 5, 8, 3, 19, 10, 7, 648, 15, 4, 33, \ldots$$

l'équation $x^2 - ny^2 = -1$ est résoluble si $n = 2, 5, 10, 13, 17, \ldots$ auxquels cas correspondent les valeurs $a' = 7, 2, 3, 18, 4, \ldots$

II. On a :

$$(b^2k - a)^2 - (b^2k^2 - 2ak + n)b^2 = -1 .$$

Soit $a^2 - nb^2 = -1$. On pourra ainsi, connaissant une valeur de n conduisant à une solution, en trouver une infinité d'autres. La valeur $n = l^2 + 1$ est dans ce cas.

III. Soient $\alpha^2 - n\beta^2 = 1$ et $a^2 - nb^2 = \gamma$; les solutions de $x^2 - ny^2 = \gamma$ sont

$$x = a\alpha \pm nb\beta , \qquad y = \alpha b \pm \beta a ,$$

formules données par Brahmegupta et retrouvées par Euler.

19. Soit (a, b) la solution primitive de $x^2 - ny^2 = 1$. On aura $(a+1)(a-1) = nb^2$. Si n est un nombre premier, et qu'on fasse $b = fgh$, on aura l'une des relations

$$a + 1 = fg^2n \quad \text{et} \quad a - 1 = fh^2 ,$$

ou bien

$$a + 1 = fg^2 \quad \text{et} \quad a - 1 = fh^2n ,$$

d'où

$$f(h^2 - ng^2) = -2 \quad \text{ou} \quad f(g^2 - nh^2) = 2 ;$$

f ne peut donc avoir que l'une des valeurs 1 ou 2 ; de là, quatre cas à examiner :

$$(o) \quad h^2 - ng^2 = -1 , \qquad (\pi) \quad g^2 - nh^2 = 1 ,$$

$$(\rho) \quad h^2 - ng^2 = -2 , \qquad (\sigma) \quad g^2 - nh^2 = 2 .$$

La supposition (π) est à écarter, car (a, b) ne serait pas la plus petite solution de l'équation proposée.

Si n est un nombre premier $4+1$, quelle que soit la parité de g et de h, les relations (ρ) et (σ) ne peuvent avoir lieu : la seule possible est donc (o), qui doit dès lors être toujours satisfaite, puisque $x^2 - ny^2$ admet toujours une solution.

Donc *si* n *est un nombre premier* $4+1$, *l'équation* $x^2 + 1 = ny^2$ *est toujours possible* (Legendre).

En outre on a une nouvelle preuve de cette proposition de Fermat : *tout nombre premier* $4+1$ *divise* x^2+1 (Id.).

Si n est de la forme $8+3$, (o) n'a pas lieu, d'après ce qui précède, et on démontrera aisément que (σ) non plus ne peut avoir lieu. La relation (ρ) est seule vraie dans ce cas, et on peut donc dire que *pour* n *premier de forme* $8+3$, *l'équation* $x^2 - ny^2 = -2$ *est possible* et, avec Euler, que n *divise un nombre de la forme* $x^2 + 2$ (Id.).

Si n est de la forme $8-1$, on démontrera, par des moyens semblables, que la relation (σ) est la seule possible. Donc, *dans ce cas, l'équation* $x^2 - ny^2 = 2$ *est toujours soluble* (Id.).

On trouvera d'autres théorèmes du même genre mais moins simples dans la *Th. des n.* de Legendre, ainsi que dans les *Werke* de Lejeune-Dirichlet.

20. Si (α, β) est la solution primitive de $x^2 - ny^2 = 1$ et qu'on ait

$$(\tau) \qquad f^2 - ng^2 = N ,$$

on aura cette autre solution de $x^2 - ny^2 = N$.

$$(\upsilon) \qquad (f\alpha - ng\beta)^2 - n(f\beta - g\alpha)^2 = N .$$

Si on remplace α et f par leurs valeurs $\sqrt{n\beta^2+1}$ et $\sqrt{ng^2+N}$, on verra immédiatement que $f\alpha - ng\beta > 0$; donc la solution

donnée par (v) est en termes plus petits que ceux de (τ) si on a :

$$f\alpha - ng\beta < f, \quad \text{d'où} \quad (ng^2)(n\beta^2) < f^2(\alpha - 1)^2$$

et par suite

$$f > \sqrt{\frac{(\alpha + 1)N}{2}} \quad \text{et} \quad g > \sqrt{\frac{(\alpha - 1)N}{2n}}.$$

L'équation $x^2 - ny^2 = - N$ peut s'écrire $(ny)^2 - nx^2 = nN$; donc si (nf', g') est une solution de cette dernière équation, on en aura une autre en termes plus petits pour

$$nf' > \sqrt{\frac{(\alpha + 1)nN}{2}} \quad \text{et} \quad g' > \sqrt{\frac{(\alpha - 1)nN}{2n}}$$

ou bien

$$f' > \sqrt{\frac{(\alpha + 1)N}{2n}} \quad \text{et} \quad g' > \sqrt{\frac{(\alpha - 1)N}{2}}.$$

Ainsi, *α désignant la plus petite valeur de* x *satisfaisant à l'équation* $x^2 - ny^2 = 1$, *si l'équation* $x^2 - ny^2 = \pm N$ *est possible, elle a des racines positives inférieures,* x *à* $\sqrt{\frac{(\alpha \pm 1)N}{2}}$ *et* y *à* $\sqrt{\frac{(\alpha \mp 1)N}{2n}}$.

Par exemple, pour $n = -2$, les limites sont $\sqrt{2N}$ et $\sqrt{\frac{N}{2}}$,

. . . . . -3, ... $\sqrt{\frac{3N}{2}}$ et $\sqrt{\frac{N}{6}}$,

. . . . -5, ... $\sqrt{5N}$ et $\sqrt{\frac{4}{5}N}$,

. . . .

(Tchebichef)

Cor. Soient (a, b) *et* (c, d) *deux solutions de* $x^2 - ny^2 = N$, *on aura :*

$$(\varphi) \qquad (ac \pm nbd)^2 - n(ad \pm bc)^2 = N^2 ;$$

et, si elles sont dans les conditions indiquées plus haut, N *est composé ;* en effet on a :

$$(\chi) \qquad ac \pm nbd < \frac{\alpha + 1}{2}N + \frac{\alpha - 1}{2}N = \alpha N.$$

Si $ac \pm nbd$ était divisible par N, il en serait de même de $ad \pm bc$, d'après (φ), ce qui donnerait une solution de $x^2 - ny^2 = 1$, où la valeur de x serait $< \alpha$, d'après (χ), ce qui est contre l'hypothèse. Ainsi aucun des deux nombres $ad \pm bc$ n'est divisible par N. On démontrera de même, dans le cas de N négatif.

Or le produit de ces deux nombres est divisible par N, car il est égal à

$$a^2d^2 - b^2c^2 = \pm (d^2 - b^2)N ,$$

et par conséquent on trouvera deux diviseurs de N en cherchant le p. g. c. d. de N et de chacun des deux nombres $ad \pm bc$ (Id.).

21. *Applications.* I. Les identités

$$(ba^2 \pm 1)^2 - b(ba \pm 2)a^2 = 1 , \qquad (2ba^2 \pm 1)^2 - b(ba^2 \pm 1)(2a)^2 = 1$$

donnent la solution du problème de Fermat dans un grand nombre de cas.

Soit $ax^2 - by^2 = 1$, il viendra $(2ax^2 - 1)^2 - ab(2xy)^2 = 1$. De là le moyen de trouver les solutions de $x^2 - aby^2 = 1$ quand on connaît celles de $ax^2 - by^2 = 1$.

Si $ax^2 - by^2 = 2$, on aura $(ax^2 - 1)^2 - ab(xy)^2 = 1$: conclusion analogue (Realis).

II. a *et* b *étant premiers entre eux, de même que* α *et* β, *si on peut écrire*

$$a^2 - nb^2 = \alpha^2 - n\beta^2 = N ,$$

il s'ensuit la solution de l'équation de Fermat. En effet $a^2\alpha^2 - n^2b^2\beta^2$ est divisible par N ; un et un seul des deux nombres $a\alpha \pm nb\beta$ est divisible par N, car autrement leur somme $2a\alpha$ le serait ainsi que a ou α. Appelons P celui de ces deux nombres qui est divisible par N. et Q celui des deux nombres $b\alpha \pm a\beta$ qui a le même signe que P. On a :

$$(a\alpha \pm nb\beta)^2 - n(b\alpha \pm a\beta)^2 = N^2 .$$

P étant divisible par N, il en est de même de Q, et il s'ensuit

$$\left(\frac{P}{N}\right)^2 - n\left(\frac{Q}{N}\right)^2 = 1 . \qquad \text{(Lejeune-Dirichlet)}$$

III. La considération du carré et du cube de $a \pm b\sqrt{n}$ conduit, par multiplication des deux couples d'expression ainsi obtenues, aux identités,

$$(a^2 + nb^2)^2 - n(2ab)^2 = (a^2 - nb^2)^2 ,$$

$$a^2(a^2 + 3b^2n)^2 - b^2(3a^2 + b^2n)^2n = (a^2 - b^2n)^3 ,$$

dont la première montre que si $a^2 - b^2n = \pm 2$, $(a^2 \mp 1, ab)$ est une solution de $x^2 - ny^2 = 1$ (Lagrange) et que pour $a^2 - nb^2 = \pm 4$, $(a^2 \mp 2, ab)$ en est une de $x^2 - ny^2 = 4$ (Cayley).

Pour $a^2 - b^2n = \pm 4$, la deuxième identité se ramène à une équation de Fermat (Lagrange). La supposition $a^2 - b^2n = \pm 2$ fournit une solution de $x^2 - ny^2 = \pm 1$.

IV. *Soit à trouver les triangulaires qui sont en même temps des carrés* (Euler). On a : $x^2 + x = 2y^2$ ou $(2x + 1)^2 - 2(2y)^2 = 1$. On est ramené à l'équation $X^2 - 2Y^2 = 1$, dont les racines sont $X = 1, 3, 17, 99, 577, 3363, \ldots X_{n+1} = 6X_n - X_{n-1}$.

V. *Trouver les nombres dont les carrés diminués de l'unité donnent des triangulaires.* (Euler). Solution analogue.

VI. *Trouver deux nombres dont le produit, ajouté successivement à chacun d'eux, donne des carrés* (Diophante). Posons $y = x - \lambda$, $z - w = 1$, l'égalité $xy + x = z^2$ deviendra

$$4x^2 - 4(\lambda - 1)x = (\lambda + 1)^2 \qquad \text{d'où} \qquad 2x = \lambda + 1 \pm \sqrt{2\lambda^2 + 2}\ .$$

On est conduit à résoudre $2\lambda^2 + 2 = (2\mu)^2$ ou $\lambda^2 - 2\mu^2 = -1$.

VII. *Soit* r *l'excès de* x *sur le plus grand carré qui y est contenu. Déterminer* x *de manière : 1° que* rx *soit un carré ; 2° que* rx *surpasse également de* r *le plus grand carré qui y est contenu* (Brocard).

1° On a :

$$x - r = y^2\ , \qquad r(y^2 + r) = z^2\ .$$

Posant $z = rz'$, puis $y = ry'$, il vient $z'^2 - ry'^2 = 1$.

2° On a :

$$x - r = y^2\ , \qquad r(y^2 + r) = z^2 + r\ .$$

Posant $z = rz'$, il vient

$$(\psi) \qquad y^2 - rz'^2 = r + 1\ .$$

Si (a, b) est une solution de $x^2 - ry^2 = 1$, $(rb \pm a, a \pm b)$ en est une de (ψ). D'ailleurs z^2 est le plus grand carré contenu dans $r(y^2 + r)$, car autrement on aurait successivement

$$r > 2z\ , \qquad r^2 > 4(ry^2 + r^2 - r)\ , \qquad 3r + 4 > 4y^2\ ; \qquad \text{or} \qquad r < 2y\ .$$

22. Dans le second membre de l'identité

$$(\omega) \qquad \sqrt{n} = a' + \frac{a''}{\sqrt{n} + a'}$$

remplaçons $\sqrt{n}$ par le second membre lui-même ; puis, dans le résultat, $\sqrt{n}$ par le même second membre de (ω), etc. On aura une généralisation de fraction continue, dont les continuants se calculent à l'aide des formules

$$G' = 2a'F' + a''E'\ , \qquad G = 2a'F + a''E\ ,$$

et on a :

$$G'^2 - nG^2 = (-a'')^t\ ,$$

t désignant le rang de G dans la série des continuants A, B, ... G. Si on prend $n = a_1'^2 - a_1''$, on a les solutions de $x^2 - ny^2 = a''^t$, quelle que soit la parité de t (Landry).

23. *Les périodes correspondant aux nombres* a′, ... ; a″, ... , *et* a, ... *provenant de la réduction en fraction continue des racines carrées des nombres*

$$a'^2 + 1\ , \quad a'^2 + 2\ , \quad a'^2 + a'\ , \quad a'^2 + 2a' - 1\ , \quad a'^2 + 2a'\ ,$$

sont respectivement

a' ;	a', a' ;	a', a' ;	a', $a'-1$, $a'-1$, a' ;	a', a' ;
1 ;	2, 1 ;	a', 1 ;	$2a'-1$, 2, $2a'-1$, 1 ;	$2a'$, 1 ;
$2a'$;	a', $2a'$;	2, $2a'$;	1, $a'-1$, 1, $2a'$;	1, $2a'$;

En déduire les fractions continues représentant les racines carrées des nombres 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 14, 15, 17, 18, 20, 23, 24, ...

24. *Etudier les nombres qui donnent les périodes*

a', a, $2a'$; a', a, a, $2a'$; a', a, b, a, $2a'$; a', a, b, b, a, $2a'$;
a', b, c, b, a, $2a'$; etc. (Euler)[1]

25. *Les termes de la série* 1, 5, 29, 169, 985, 5741, ... $u_{k+1} = 6u_k - u_{k-1}$ *provenant de la réduction de* $\sqrt{2}$ *en fraction continue, sont tous des sommes de deux carrés* (Ed. Lucas), *et sont les seuls nombres dont les carrés sont égaux à la somme de deux carrés consécutifs* (Welsch, *I. M.*, 1909, p. 17).

26. *On a* $\sqrt{5} + 1 = 2 \mid 1, 1, 1, \ldots \mid$; *les termes des diverses réduites ne sont autres que les nombres de la série de Fibonacci* (exercice n° 8), *lesquels représentent les continuants* (0), (1), (1, 1), (1, 1, 1), (1, 1, 1, 1), ...[2]

Le ke *terme de cette série est égal à*

$$\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k}{\sqrt{5}},$$

d'où il suit que si k est un nombre quelque peu considérable, on a :

$$\frac{1{,}61803^k}{\sqrt{5}}$$

pour la valeur de ce k^e terme (Binet).

---

[1] Auparavant Saunderson avait étudié les cas | 1, 2, 3; ... |, | 4, 1, 1, 1; ... |, | a; ... |, a, b; ... |, | a, b; c, d, e; c, d, e; ... |. C'est donc lui qui, le premier, a considéré les fractions continues en elles-mêmes.

[2] C'est une conséquence immédiate de ce même exercice n° 8.

27. *La période* (nº 9) *a au plus* 2n *termes,* puisque $g' < \sqrt{n}$ et $g'' < 2\sqrt{n}$.

28. Des relations (18) et (21), on déduit la suivante

$$f'' + g' > \sqrt{n} > f'' - g'$$

ce qui ne peut avoir lieu que si g' est positif. Donc *tous les termes de la série du nº* 8 *sont positifs* (Lagrange).

29. *Si* $e'' = 1$, *on a :* $f' = a'$, $e = e' + a'$, $f'' = a''$, *et la suite se reproduit périodiquement.* Conséquence de (η), de (θ) et de (ι).

30. *Démontrer les relations*

$$\sqrt{n}\,\alpha\beta \ldots \varepsilon\varphi\gamma = G'\eta + F' , \qquad \alpha\beta \ldots \varepsilon\varphi\gamma\ G\eta + F$$

et tirer de là une autre démonstration de (28) (Lagrange).

31. D'après (η), ($\varkappa$) et (λ) on peut écrire

$$\alpha'\beta = \ldots = \delta'\varepsilon = \varepsilon'\varphi = \varphi'\gamma = \gamma'\eta = \eta'\alpha = 1$$

d'où

$$\gamma' = -g + \frac{1}{\varphi'} , \quad \varphi' = -f + \frac{1}{\varepsilon'} , \ldots \quad \beta' = -b + \frac{1}{\alpha'} , \quad \alpha' = -a + \frac{1}{\eta'} ,$$

et de là

$$\frac{\sqrt{n} - a'}{a''} = \frac{\sqrt{n} - h'}{g''} = \gamma' = | -g, -f, \ldots -b, -a, \eta' |$$
$$= - | g, f \ldots b, a, -\eta' | .$$

L'expression γ' se développe donc également en une fraction continue inverse de celle de $\sqrt{n}$ (Lagrange).

32. Supposons que dans la succession ... $j, k, l \ldots r, s, \ldots$ on ait $r' = l'$ et $r'' = k''$; d'après (θ et 24), il viendra $r = k$; et en outre, comme on a :

$$k' + l' = kk'' , \qquad r' + s' = rr'' , \qquad j''k'' + k'^2 = r''s'' + s'^2 ,$$

il s'ensuit $s' = k'$, $s'' = j''$.

Mais $a' = h'$, $a'' = g''$; donc $b'' = f''$, $a = g$, $b' = g'$. Opérant de même sur les couples g', b' et f'', b'', il viendra $c'' = e''$, $b = f$, $c' = f'$, et ainsi de suite.

Les termes $a, b, c \ldots e, f, g$ de la période forment donc une *suite symétrique,* ainsi que les nombres a', b' ... et a'', b'' ...

On peut donc écrire :

$$\sqrt{n} = | a', a, b, c \ldots c, b, a, 2a' ; a . b, c \ldots |$$

Cette forme du développement de $\sqrt{n}$ a été découverte par Euler, ainsi que les lois de ses termes. Elle a été démontrée par Lagrange. Elle montre que, dans une même période il y a au

moins deux solutions de l'équation $x^2 - ny^2 = \pm g''$, à moins que la période ne soit d'un nombre impair de termes et que g'' soit celui du milieu.

A titre de curiosité, voici la demi-période correspondant à $n = 991$, la plus longue pour $n < 1000$,

$$31, 2, 12, 10, 2, 2, 2, 1, 1, 2, 6, 1, 1, 1, 1, 3, 1, 8, 4, 1, 2, 1, 2, \\ 3, 1, 4, 1, 20, 6, 4 ; 31 ; 4, 6 \ldots$$

ce qui donne, d'après Legendre,

$$x = 37951\ 64009\ 06811\ 93063\ 80148\ 96080 ,$$

pour la racine du plus petit carré qui soit de la forme $991y^2 + 1$.

33. Si la période $a, b \ldots d, e \ldots g, h$ contient un nombre pair de termes, et qu'on ait, par exemple, $d = e$, on aura aussi $d'' = e''$. Or on a en général $d''e'' + e'^2 = n$, ce qui donne, dans ce cas particulier, $e'^2 + d''^2 = n$: mais le nombre des termes $a, b \ldots g, h$ étant pair, l'équation $x^2 + 1 = ny^2$ est toujours résoluble. Donc, dans le même cas, le nombre n est la somme de deux carrés.

Mais l'équation est également résoluble dans le cas où n est un nombre premier $4 + 1$. De là, ce théorème de Fermat : *tout nombre premier* $4 + 1$ *est la somme de deux carrés*, et, en même temps, la décomposition de ce nombre en ses deux carrés (Legendre [1]).

On peut aussi conclure de la première partie de cette démonstration, que si n est un nombre premier $4 - 1$, la période a un nombre impair de termes.

34. D'après (8) on a :

$$(a', a \ldots b, c, d, c, b \ldots a) = CD' + BC' ,$$
$$(a \ldots b, c, d, c, b \ldots a) = C(B + D) ,$$
$$(a', a \ldots c, d, d, c \ldots a) = CC' + DD' ,$$
$$(a \ldots c, d, d, c \ldots a) = C^2 + D^2 .$$

De là le moyen de passer immédiatement du continuant de la demi-période à celui de la période entière, ce qui réduit de moitié le calcul de la solution du problème de Fermat (Van Aubel [2]).

[1] D'aprés certains manuscrits de Fermat retrouvés par Ed. Lucas, cette démonstration serait celle de cet illustre géomètre.

[2] Dans les deux premieres formules, Van Aubel trouve, assez péniblement du reste,

$$\frac{nC^2 + C'^2}{nC^2 - C'^2} \quad \text{et} \quad \frac{2CC'}{nC^2 - C'^2}$$

au lieu de $CD' + BC'$ et $C(B + D)$. On pourra s'exercer à vérifier l'identité de ces deux expressions. Il tire de ses formules l'idée de rechercher les solutions de l'équation $x^2 - ny^2 = 1$, en remarquant qu'elles reviennent à déterminer ω de telle maniere que $n + \omega^2$ et 2ω soient divisibles par $n - \omega^2$, car les deux quotients représentent les valeurs de x et de y, ce qui conduit a déterminer de nombreuses valeurs de n pour lesquelles la solution est immédiate. (Voir *A. F.*, 1885, p. 137 et seq.)

35. *Posons*

$$\frac{G'_{kh}}{G_{kh}} = M_h \quad \text{et} \quad \frac{n}{M_h} = N_h \;;$$

on aura :

$$2M_{2h} = M_h + N_h \quad \text{et} \quad N_{2h} = \frac{n}{M_h} \,.$$

Les valeurs des termes de la série M_h, N_h ; M_{2h}, N_{2h} ; M_{4h}, N_{4h} ; ... telle que le premier terme de chaque couple est égal à la moyenne arithmétique des deux précédents, et le second, à leur moyenne harmonique, — *oscillent de part et d'autre de la valeur de la racine* $\sqrt{n}$, *dont elles se rapprochent de plus en plus* (Serret). Cette proposition a lieu pour M_h quelconque, et, sous cette forme, elle était connue des anciens ; la valeur de M_h donnée par Serret fournit une approximation très rapide de $\sqrt{n}$.

36. *Pour que la fraction* $\frac{N}{A}$, *développée en fraction continue, donne une suite symétrique, il faut et il suffit que le nombre* $\frac{A^2 \pm 1}{N}$ *soit entier*. En déduire la décomposition du nombre premier $4 + 1$ en deux carrés (Serret).

37. *Les conditions nécessaires et suffisantes pour que deux irrationnelles* ω *et* ω' *se développent en fractions continues ayant même période, sont qu'elles soient liées par des relations de la forme*

$$\omega' = \frac{A\omega + B}{a\omega + b}\,, \qquad Ab - aB = \pm 1\,. \qquad \text{(Serret)}$$

38. On a différentes manières de représenter graphiquement les procédés de calcul des fractions continues et de l'équation de Fermat. On se contentera de signaler ici :

1° le moyen d'obtenir le quotient et le reste de la division de a par b, en portant, à l'aide d'un compas, la longueur b sur la longueur a, autant de fois que cela est possible ;

2° la solution, par Poinsot, de l'équation $ax - by = 1$, au moyen de la considération des sommets du b^{gone} (voir *Ent. math.*, 1907, p. 301) ;

3° l'emploi du papier quadrillé sur lequel on trace la droite $ax - by = c$ ou l'hyperbole $x^2 - ny^2 = 1$.

4° L'inscription à l'aide d'un compas, sur la même droite et à une même échelle, des longueurs $ax + b$, $a'x + b'$, ... ce qui permet de trouver immédiatement la solution des systèmes $ax + b = a'x + b' = ...$ On pourrait aussi employer des bandes de papier transparent contenant chacune une droite divisée de a en a, de a' en a', ...

39. Les substitutions $X = \alpha x + \beta y$ et $Y = \gamma x + \delta y$ qui rendent l'expression $AX^2 + 2BXY + CY^2$ identique à elle-même sont déterminées par une équation de la forme $t^2 - (B^2 - AC)u^2 = a^2$, a désignant le p. g. c. d. des nombres A, 2B et C.

Plus généralement, si ces mêmes substitutions donnent une formule identique à celle qu'amènent les substitutions $X = \alpha' x + \beta' y$, $Y = \gamma' x + \delta' y$, on a :

$$[A\alpha\alpha' + B(\alpha\gamma' + \alpha'\gamma) + C\gamma\gamma']^2 - (B^2 - AC)(\alpha'\gamma - \alpha\gamma')^2 = a^2 .$$

et plusieurs autres relations de la même forme.

C'est par des considérations de ce genre que Gauss a trouvé sa solution de l'équation $t^2 - nu^2 = a^2$, au moyen de la théorie des formes binaires quadratiques, théorie où elle est de première importance.

40. *Si* n *est un nombre premier* **4** — 1, *les termes moyens* d″ *et* d′ *de la période sont égaux, le premier à* 2 *et le second à la racine du plus grand carré impair contenu dans* n. (Picou ; voir *I. M.*, 1900, p. 302.)

41. *Si* $x^2 - ny^2 = M$, $\frac{x}{y}$ *est une des réduites du développement de* $\sqrt{n}$ *en fraction continue* (Lagrange).

42. *Etendre les théorèmes nos* **8** *à* **13** *au développement en fraction continue des racines de l'équation* $Ax^2 + 2Bx + C = 0$ (Lagrange). Voir par exemple, Legendre, *Th. des n.* ou les traités d'algèbre supérieure de Serret ou de Weber.

On lira aussi avec grand fruit la résolution de l'équation de Fermat en nombres complexes par Lejeune-Dirichlet (Werke, t. I, p. 570).

Pour la théorie des fractions continues généralisées, voir *l'Encycl. math.*, t. I, vol. I, p. 282.

A. Aubry (Dijon).

COURBES TRANSCENDANTES ET INTERSCENDANTES

A la base de toute classification, se trouve généralement un certain nombre entier : c'est ce qui a permis d'envisager diverses classifications des courbes algébriques, puisque plusieurs nombres entiers (le degré, la classe, le genre) ont pu être associés à ces courbes ; il n'en est nullement de même en ce qui concerne les courbes transcendantes, à moins que l'on n'ait recours à la théorie des équations différentielles. Il serait cependant possible, en se permettant de modifier convenablement le sens attribué jusqu'ici à un mot, fort peu usité d'ailleurs, de diviser les courbes transcendantes en deux catégories, dont la première servirait à établir une sorte de continuité entre les courbes algébriques et les courbes transcendantes de la seconde catégorie.

Leibniz appela *interscendantes* les courbes planes dont les équations s'obtiennent en égalant à zéro des polynômes à exposants irrationnels. Un exemple d'une grande simplicité, donné par Euler et reproduit par Salmon, est celui de la parabole interscendante représentée par l'équation

$$y = x^{\sqrt{2}} .$$

La fonction précédente peut être représentée par une série de courbes algébriques, dont le degré croît constamment et au delà de toute limite ; ces courbes sont les paraboles d'équation

$$y = x^m ,$$

m étant un nombre rationnel ; ces paraboles s'approchent de plus en plus de la courbe cherchée sans arriver à la représenter exactement. Un autre exemple connu est celui de la courbe interscendante qui a fait l'objet d'une question proposée par M. Rose et résolue dans *Mathesis* (1905, p. 29 et 164) : il s'agit de déterminer la courbe la plus générale pour laquelle la relation

$$\overline{TP}^2 + \overline{ON'}^2 = \overline{OM}^2$$

existe entre le rayon vecteur OM, la sous-tangente TP et le segment ON′ de l'axe OY qui est compris entre l'origine O et la

normale MN'; l'équation différentielle du problème,

$$x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2xy\frac{dy}{dx} - x^2 - y^2 = 0 ,$$

admet pour intégrale générale la courbe interscendante d'équation

$$y = \frac{x}{2\sqrt{2}}\left(ax^{\sqrt{2}} - \frac{1}{ax^{\sqrt{2}}}\right).$$

Il n'y a guère d'autre exemple connu de courbes interscendantes ayant fait l'objet de travaux; aussi le terme « interscendant » est-il peu usité et peu connu. Il me semble qu'on devrait faire, dans la terminologie mathématique, une place plus grande à ce mot qui est particulièrement expressif; il suffirait d'étendre la définition des courbes interscendantes à des courbes plus générales que celles qui furent considérées par Leibniz ou Euler; cette généralisation d'ailleurs ne pourrait donner lieu à aucune confusion et interpréterait au mieux la pensée même de Leibniz.

Je considérerai dans ce but une famille de courbes (C) dépendant d'un paramètre réel m et qui varie d'une manière continue. Je supposerai que pour toutes les valeurs rationnelles du paramètre m, pour lesquelles les courbes (C) correspondantes sont bien définies, ces courbes (C) sont algébriques; pour les valeurs irrationnelles du paramètre m, au contraire, les courbes (C) seront supposées transcendantes : c'est à ces dernières courbes transcendantes que je proposerai de donner le nom d'interscendantes.

Avec cette définition généralisée, on voit tout de suite combien seront nombreuses les courbes interscendantes, parmi celles des courbes transcendantes qui ont donné lieu à des recherches. Parmi les courbes définies simplement en coordonnées ponctuelles cartésiennes, il suffit de citer les perles de Sluse, les courbes de Lamé; parmi les courbes d'équations paramétriques simples, les courbes de Lissajous, les hypocycloïdes et les épicycloïdes, la courbe de Jean Bernoulli...; les spirales sinusoïdes, les rhodonées, les épis, les nœuds, les hyperboles étoilées, les courbes de puissance... seront de nouveaux exemples de courbes définies en coordonnées polaires.

Il est presque inutile d'ajouter que la définition que je viens d'introduire des courbes interscendantes vaut pour les courbes gauches aussi bien que pour les courbes planes; les clélies et les courbes à torsion constante découvertes par M. Fabry, les courbes de Serret, les courbes de Lamé gauches, les épicycloïdes sphériques seront des exemples de courbes gauches, algébriques ou interscendantes suivant que le paramètre envisagé sera rationnel ou non.

Les courbes d'équation

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{cx^{m+1}}{m+1} + \frac{x^{1-m}}{c(m-1)}\right),$$

c'est-à-dire les courbes de poursuite, seront aussi algébriques ou interscendantes suivant le cas. Pour $m = \pm 1$, toutefois, l'équation précédente cesse d'avoir un sens ; mais on sait qu'alors les courbes de poursuite correspondantes sont des courbes transcendantes ; pour $m = 1$, par exemple, l'équation est

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{cx^2}{2} - \frac{1}{c}\log x\right) ;$$

les courbes de poursuite seront donc algébriques ou interscendantes lorsque leur équation aura un sens ; et aux cas singuliers $m = \pm 1$ correspondront des courbes véritablement transcendantes.

Cette remarque me conduit à la considération de certaines courbes transcendantes susceptibles d'être associées à des familles de courbes algébriques ou interscendantes ; c'est là certainement un fait offrant un véritable intérêt que, par un passage à la limite, certaines courbes transcendantes particulières puissent être envisagées comme appartenant à une famille de courbes (C), *sous l'unique condition d'invoquer la continuité.* Dans son *Mémoire sur la manière d'exprimer les fonctions par des séries de quantités périodiques,* Poisson cite un problème de Jean Bernoulli qu'Euler résolut le premier et dont Legendre donna ensuite une solution plus simple. Dans cette proposition très remarquable, la cycloïde ordinaire apparaît comme étant la limite d'une infinité de développantes successives d'un arc d'une courbe absolument quelconque. Passant à un autre ordre d'idées, non sans quelque analogie avec le problème de Bernoulli qui m'a conduit à réfléchir au sujet de diverses questions que je traite dans le présent article, je considérerai une famille de courbes (C) dépendant d'un paramètre m et qui seront algébriques ou interscendantes dans les conditions que j'ai antérieurement précisées. Lorsque m tend vers une certaine limite, pour laquelle l'équation des courbes (C) se présente sous la forme d'indétermination ou d'impossibilité, il se présente un grand nombre de cas où les courbes (C) ont une limite qui est une courbe transcendante particulière. C'est ce qui a lieu pour les paraboles

$$y^m = 1 + mx$$

qui tendent, lorsque m a pour limite zéro, vers la courbe exponentielle ou logarithmique ; c'est aussi une propriété connue que

les courbes de Lamé admettent pour limite, dans certaines conditions, la courbe d'équation

$$e^x + e^y = 1 ,$$

dont l'étude est intimement liée à celle de la surface signalée par Sophus Lie comme étant une surface de translation d'une infinité de manières.

Du fait que la courbe exponentielle ou logarithmique

$$y = e^x \quad \text{ou} \quad y = \log x ,$$

est une limite de courbes algébriques ou interscendantes, il résulte que cette même propriété s'étend aux courbes dont l'équation est une fonction égalée à zéro et rationnelle par rapport à x, y, e^x, e^y, $\log x$, $\log y$, shx, chx, thx, shy, chy, thy : cette remarque s'applique à la chaînette ordinaire, à la visoria de Saavedra, à la courbe

$$y = \frac{x}{\log x - 1{,}08366}$$

représentative, d'après Tchebycheff, de la fréquence de nombres premiers... Les courbes analytiques de mortalité et de survie seront des exemples de courbes de cette nature, d'équations rationnelles par rapport à x, e^x, $\log y$, $\log x$; pour celle de Gauss, par exemple, on aura :

$$\log y = Aa^x - Bb^x ;$$

pour celle de Lazarus :

$$\log y = A \log x + A_1 a_1^x + A_2 a_2^x + \dots + A_n a_n^x ;$$

pour celle de Quiquet :

$$\log y = A \log x + A_1 a_1^x + A_2 a_2^x .$$

Les courbes réelles

$$y = (1 + imx)^{\frac{1}{m}} + (1 - imx)^{\frac{1}{m}} ,$$

$$iy = (1 + imx)^{\frac{1}{m}} - (1 - imx)^{\frac{1}{m}} ,$$

permettront de même de définir, au titre de limites, les sinusoïdes ; et, d'une façon générale, les courbes représentées au moyen de fonctions rationnelles des lignes trigonométriques (la cycloïde, la tangentoïde, l'hélice ordinaire, par exemple) rentreront dans la

catégorie considérée. D'après leurs définitions cinématiques, la cycloïde ordinaire et la développante de cercle sont des limites de familles d'hypocycloïdes ou d'épicycloïdes. La tractrice et la chaînette d'égale résistance de Coriolis seront deux exemples remarquables où figurent les lignes trigonométriques de x et l'exponentielle de l'autre variable y. La courbe

$$y = x \sin x ,$$

la méridienne

$$y = a \frac{\sin(bx + c)}{\sqrt{x}} ,$$

de la surface proposée pour représenter l'ébranlement produit dans l'eau lorsqu'on jette une pierre, sont encore à citer.

Je passerai maintenant au cas des coordonnées polaires. Les rhodonées

$$\rho = \frac{\sin m\omega}{m}$$

et les nœuds

$$\rho = \frac{\tang m\omega}{m} ,$$

lorsque m tend vers zéro, définissent la spirale d'Archimède sous le point de vue considéré ; dans les mêmes conditions, les épis

$$\rho = \frac{m}{\sin m\omega}$$

conduisent à la spirale hyperbolique : le lituus de Cotes est la limite des courbes analogues

$$\rho^2 = \frac{m}{\sin m\omega} .$$

A ce qui précède peut être rattaché un résultat intéressant que je trouve dans le récent ouvrage de M. D. Gautier, *Mesure des angles. Hyperboles étoilées et développante.* En remarquant que la courbe désignée par la dénomination d'hyperbole développante est identique à la quadratrice de Dinostrate, celle-ci, qui correspond à l'équation

$$\rho = \frac{\omega}{\sin \omega} ,$$

est la limite des hyperboles étoilées particulières

$$\rho = \frac{1}{m} \frac{\sin m\omega}{\sin \omega} .$$

lorsque m tend vers zéro; une autre famille d'hyperboles étoilées particulières,

$$\rho = m \frac{\sin \omega}{\sin m\omega},$$

permettrait évidemment d'obtenir la cochléoïde; une généralisation facile conduirait à la syncochléoïde et autres courbes connexes qui ont été rencontrées dans l'étude de l'hélicoïde.

J'ai réservé pour la fin le cas de la courbe qui transporta d'enthousiasme Jacques Bernoulli : la spirale logarithmique est elle aussi une limite de courbes algébriques ou interscendantes et celles-ci sont des plus remarquables. Que l'on considère, en effet, les spirales sinusoïdes d'équation

$$\rho^m = a^m \frac{\sin (h + m\theta)}{\sin h},$$

lorsque h tend vers zéro; la limite de ces courbes n'est autre que la spirale logarithmique

$$\rho = ae^{\theta \cot h}.$$

C'est dans ce fait signalé par M. Haton de la Goupillière et démontré par M. Allégret, qu'il faut certainement chercher la raison des analogies profondes qui existent entre les propriétés de la spirale logarithmique et des spirales sinusoïdes.

Par ces exemples remarquables, j'espère avoir suffisamment montré l'intérêt que présente la généralisation de la notion, introduite par Leibniz, de courbes interscendantes. J'insisterai, pour terminer, *sur la nécessité de la considération des courbes interscendantes généralisées,* lorsqu'on désire établir la continuité entre une famille de courbes algébriques et une courbe transcendante particulière. Pourquoi se permettrait-on, en effet, d'écrire ou de dire qu'une certaine courbe transcendante est la limite d'une famille de courbes algébriques, lorsqu'en Analyse, dans les questions de limites, continuité, etc., aucune hypothèse restrictive n'est faite sur les variables considérées? J'ajouterai aussi que les courbes interscendantes du plan forment, parmi les courbes transcendantes, un ensemble invariant à l'égard du groupe des transformations algébriques du plan.

É. Turrière (Poitiers).

NOUVELLE NOTE SUR LES FONCTIONS DE MESURE

Dans ma dernière Note sur les fonctions de mesure, j'indiquais que la proposition 5 de ma Note précédente (*Ens. math.*, 1911, p. 388) n'impliquait nullement que $\Phi(u, v)$ fût une fonction croissante ou continue de sa première variable.

Voici une démonstration qui met nettement en évidence cette indépendance.

On continuera à admettre que l'on a toujours : $\Phi(u, v) > u$ et que v est, en vertu de l'égalité $\Phi(u, v) = w$, une fonction uniforme de u et de w sous la seule condition que l'on ait $w > u$.

Lemme. *Si un nombre ε de* U *est plus petit que des termes de la suite* $\{\varphi_\alpha(v)\}$ *définis par un autre nombre α de* U *ou si cette propriété appartient à $\Phi(\alpha, \varepsilon)$, on a toujours la relation $\Phi(\alpha, \varepsilon) > \varepsilon$, et si ε possède cette propriété par rapport à tous les nombres de* U, *$\Phi(x, \varepsilon)$ est une fonction croissante de x définie dans le champ* U.

Dans le cas où l'on a $\alpha > \varepsilon$, on devra toujours, d'après les propriétés attribuées à Φ, avoir aussi

$$\Phi(\alpha, \varepsilon) > \alpha > \varepsilon\ .$$

et la première partie de la proposition est alors évidemment superflue.

Dans le cas contraire $\alpha \leqq \varepsilon$, il existera un nombre positif entier n tel que l'on aura

$$\varphi_\alpha(n) \leqq \varepsilon < \varphi_\alpha(n+1) = \varphi_\alpha(1+n) = \Phi[\alpha, \varphi_\alpha(n)]\ ,$$

où n est au moins égal à 1, puisque l'on a $\varphi_\alpha(1) = \alpha < \varepsilon$.

En outre, Φ étant supposée croissante comme fonction de sa deuxième variable, on déduit des relations précédentes

$$\varepsilon < \Phi[\alpha, \varphi_\alpha(n)] \leqq \Phi(\alpha, \varepsilon)\ .$$

De même, si l'on a

$$\Phi(\alpha, \varepsilon) < \varphi_\alpha(n+1) = \Phi[\alpha, \varphi(n)]\ ,$$

on devra, eu égard aux propriétés maintenues à Φ ainsi qu'à l'hypothèse $\alpha \leqq \varepsilon$, avoir

$$\alpha \leqq \varepsilon < \varphi_\alpha(n) \; .$$

où n est au moins égal à 1 puisque $\varphi_\alpha(1) = \alpha$; la condition relative à $\Phi(\alpha, \varepsilon)$ implique donc celle qui est relative à ε.

La première partie de la proposition est donc bien ainsi établie dans les deux cas qui la conditionnent.

En ce qui concerne la seconde partie, pour deux nombres x et y $y > x$ de U, on peut toujours écrire $y = \Phi(x, z)$, et la partie déjà établie de la proposition étant applicable à ε en raison de l'hypothèse faite sur ce nombre, on aura $\Phi(z, \varepsilon) > \varepsilon$ et par suite eu égard aux propriétés déjà attribuées à Φ

$$\Phi(y, \varepsilon) = \Phi[x, \Phi(z, \varepsilon)] > \Phi(x, \varepsilon) \; ,$$

relation qui établit bien la seconde partie du lemme.

Soit ε un nombre quelconque de U et n un nombre entier positif quelconque.

Si ε est plus petit que tous les termes des suites définies par certains nombres de U, l'un quelconque de ceux-ci satisfera évidemment à la proposition.

Dans le cas contraire, c'est-à-dire si ε est plus petit que les termes de toute suite définie par un nombre quelconque de U *(et cette propriété s'étend alors évidemment à tous les nombres de U plus petits que ε)*, il sera justiciable, ainsi que tous les nombres de U plus petits que lui, du lemme. Un quelconque α de ces nombres définit toujours un nombre α_1 de U tel que l'on a

$$\varepsilon = \Phi(\alpha, \alpha_1)$$

et, le lemme étant applicable à ε, c'est-à-dire à $\Phi(\alpha, \alpha_1)$, on aura

$$\varepsilon = \Phi(\alpha, \alpha_1) > \alpha_1 \; .$$

Le nombre α étant, d'après une remarque déjà faite, justiciable du lemme, on pourra lui appliquer le même procédé dans les mêmes conditions et, en poursuivant cette application sur des nombres toujours décroissants, on pourra toujours obtenir $n - 1$ couples de nombres de U donnant lieu aux relations suivantes :

$$\varepsilon = \Phi(\alpha, \alpha_1) \quad \text{avec} \quad \alpha, \alpha_1 < \varepsilon$$

$$\alpha = \Phi(\alpha', \alpha_2) \quad \text{avec} \quad \alpha', \alpha_2 < \alpha$$

$$\alpha^{(n-3)} = \Phi(\alpha_n, \alpha_{n-1}) \quad \text{avec} \quad \alpha_n, \alpha_{n-1} < \alpha^{(n-3)} \; .$$

Tous ces nombres sont justiciables du lemme, de sorte que, dans le champ qu'ils déterminent pour les variables de Φ, celle-ci

sera croissante comme fonction de chacune de ses variables. On aura donc, si β désigne le plus petit des nombres $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ ou, s'ils sont égaux, un nombre plus petit que leur valeur commune, les relations suivantes, dont l'une au moins sera une inégalité

$$\varphi_\beta(2) = \Phi(\beta, \beta) \leqq \Phi(\alpha_n, \alpha_{n-1}) = \alpha^{(n-3)}$$

$$\varphi_\beta(3) = \Phi[\varphi_\beta(2), \beta] \leqq \Phi(\alpha^{(n-3)}, \alpha_{n-2}) = \alpha^{(n-4)}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\varphi_\beta(n) = \Phi[\varphi_\beta(n-1), \beta] < \Phi(\alpha, \alpha_1) = \varepsilon .$$

Le nombre β satisfait ainsi à la condition posée et la proposition 5 de la première Note est donc bien établie avec les hypothèses réduites.

Les nombres de U qui possèdent la propriété caractéristique de la seconde partie du lemme sont évidemment plus petits que tous les autres nombres de U, de sorte qu'ils forment un champ particulier, qui a pour origine u_0 et pour lequel la fonction $\Phi(u, v)$ a toutes les propriétés qui lui avaient été attribuées dans ma première Note. On établirait facilement en outre que, si ε et ε' désignent deux nombres appartenant à ce champ, $\Phi(\varepsilon, \varepsilon')$ lui appartient aussi, de sorte que la fonction Φ définit, dans ce champ, une opération d'addition possèdent toutes les propriétés ordinaires et, en particulier, la propriété archimédienne.

Il n'est à ma connaissance rien qui permette d'affirmer qu'un continu linéaire n'admet que des métriques archimédiennes, bien que les exemples signalés jusqu'à présent de métriques non-archimédiennes (notamment par M. Hilbert dans son ouvrage *Grundlagen der Geometrie*) ne s'appliquent qu'à des ensembles ordonnés dont le type ordinal n'est pas celui du continu.

Il résulte bien des travaux de S. Lie que la droite n'admet comme groupes continus à un seul paramètre que les groupes semblables à celui des translations[1]; mais il importe d'observer que l'analyse de Sophus Lie implique, non seulement la continuité de la variable dépendante par rapport à la variable indépendante et au paramètre, mais encore l'existence des dérivées premières, propriétés qui doivent évidemment s'étendre au groupe paramétral représenté, dans ce qui précède, par l'équation $w = \Phi(u, v)$. Il n'est donc pas sans intérêt d'établir la proposition 5 de ma première Note indépendamment de toute hypothèse sur la continuité ou la croissance de $\Phi(u, v)$ comme fonction de sa première variable.

Voir page suivante : *Errata*. G. Combebiac (Limoges).

---

[1] S. Lie, *Theorie der Transformations-gruppen*, 3e vol., p. 6.

ERRATA

Errata à la Note complémentaire sur les fonctions de mesure (*Ens. math.* du 15 septembre 1911).

Page 388, 2e alinéa. A la suite de « $\varphi(\sigma) = u = F(x_0, x)$ » ajouter : « c'est-à-dire par les relations

$$u_0 = \varphi(0) = F(x_0, x_0) , \qquad \varphi(1) = F(x_0, x_1) ,$$
$$\varphi(\nu + 1) = \Phi[\varphi(\nu), \varphi(1)] = \Phi[\varphi(1), \varphi(\nu)] \text{ » .}$$

Dernier alinéa. A la suite de « Dans le cas contraire », ajouter : « c'est-à-dire si u (et avec ce nombre, à fortiori, tout nombre de U plus petit que u) est plus petit que des termes de toute suite définie par un nombre quelconque de U ainsi que $\{\varphi_\varepsilon(\nu)\}$ l'est par ε, il existera », rayer en outre les deux mots « il existera » après « pour un nombre quelconque de U » ; intercaler entre « $\varphi_\alpha(\nu + 1)$ » et « $= \Phi[\alpha, \varphi_\alpha(\nu)]$ » le terme « $= \Phi[\varphi_\alpha(1), \varphi_\alpha(\nu)$ ».

Page 389, 1er alinéa. Supprimer la première phrase et les quatre premiers mots de la seconde ; remplacer dans celle-ci la lettre « D » par « U » ; remplacer, dans la 5e ligne, α_1 par α dans l'égalité : « $\alpha_1 = \Phi(\alpha', \alpha_2)$ » et ajouter à la suite de cette égalité : « ; en outre, α possédant, selon une re« marque faite dans l'alinéa précédent, la même propriété que u, l'on pourra « démontrer, par les moyens qui ont été employés pour u et α_1, que l'on a « aussi $\alpha_2 < \alpha_1$. » Enfin, dans la suite de nombres « $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha^{(n)}, \alpha', \alpha'', \ldots \alpha^{(n-1)}$; », remplacera $\alpha^{(n)}$ par α_n et $\alpha^{(n-1)}$ par $\alpha^{(n-3)}$.

G. C.

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Sur l'expression du rayon de courbure d'une courbe plane en coordonnées tangentielles.

Extrait d'une lettre de M. d'Ocagne, Professeur à l'Ecole Polytechnique de Paris.

A propos d'une Note de M. G. Loria (Gênes).

« ...Venant seulement d'avoir connaissance de la Note de M. Gino Loria parue dans le Tome XIII de l'*Enseignement mathématique* (p. 104), je prendrai la liberté de rappeler que j'ai donné une détermination du rayon de courbure d'une courbe plane définie en coordonnées plückériennes, dans une Note que j'ai publiée en

1891 dans le *Bulletin de la Société mathématique de France* (T. XIX, p. 26). J'ai donné au résultat obtenu [formule (II) de cette Note] une forme géométrique; mais son expression analytique coïncide avec celle qu'a, de son côté, obtenue M. Loria.

« Ma détermination repose, en effet, sur cette remarque que si (x, y) d'une part, (u, v) de l'autre, sont des coordonnées ponctuelles et tangentielles en correspondance dualistique telle que l'équation du point et de la droite unis s'écrive

$$ux + vy + 1 = 0,$$

on a, en tout point d'une courbe quelconque

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{u}{v}$$

et

$$\frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{d^2v}{du^2} = \frac{1}{y^3v^3}.$$

Tirant $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$ de ces formules pour les porter dans l'expression classique du rayon de courbure en coordonnées cartésiennes on a la formule demandée

$$R = \frac{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}\frac{d^2v}{du^2}}{\left(u\frac{dv}{du} - v\right)^3},$$

qui, lorsqu'on exprime u et v en fonction d'un paramètre, se transforme en celle obtenue par M. Loria.

« Je rappellerai par la même occasion que, si les coordonnées tangentielles u et v sont celles que j'ai appelées *parallèles*, le rayon de courbure R est donné par la formule

$$R = \frac{[\delta^2 + (u-v)^2]^{\frac{3}{2}}\frac{d^2v}{du^2}}{\delta\left(1 - \frac{dv}{du}\right)^3},$$

où δ représente la demi-distance des origines A et B des axes Au et Bv. On peut aisément passer de l'une à l'autre de ces deux dernières expressions »

CHRONIQUE

Commission internationale de l'Enseignement mathématique.

I. — Réunion de Cambridge (août 1912).

Nos lecteurs ont déjà eu sous les yeux le programme général[1] de la réunion que la Commission tiendra à Cambridge, à l'occasion du 5e Congrès international des mathématiciens (22-28 août). Trois séances seront organisées en commun avec la section d'enseignement du Congrès.

1re séance : *Présentation des travaux des sous-commissions nationales*. Pour chaque pays le délégué déposera un court rapport écrit, destiné à faire ressortir les points caractéristiques des travaux de sa sous-commission. L'exposé oral sera un résumé de ce rapport.

2me séance : Discussion de la question A, *L'intuition et l'expérience dans l'enseignement mathématique des Ecoles moyennes*. — Rapporteur : M. Dav.-Eug. Smith (New-York).

3me séance : Discussion de la question B, *Les mathématiques en physique*. Connaissances mathématiques utiles aux physiciens et réclamées par ceux-ci. — Rapporteur : M. C. Runge (Gœttingue).

Le Comité central a constitué *deux sous-commissions* A et B, avec la mission d'élaborer un rapport préparatoire sur chacune des questions. Il s'est assuré le concours de MM. D.-E. Smith et C. Runge, qui rapporteront l'un sur la question A, l'autre sur la question B. Nous avons publié en mars la liste des objets qui seront mis en discussion.

Les jours et heures des séances ci-dessus seront fixés dès que le Comité de Cambridge aura arrêté le programme du Congrès.

Pour tout ce qui concerne la Commission, s'adresser au Secrétaire-général, M. H. Fehr, 110, Florissant, Genève. Les demandes de renseignements relatives au Congrès doivent être adressées à M. W. Hobson, Christ's College, Cambridge.

[1] Voir *L'Ens. math.* du 15 janvier (p. 39 et du 15 mars 1912, p. 132-135).

II. — Sous-commissions nationales.

Allemagne. — Un nouveau rapport vient d'être distribué aux membres de la Commission. C'est une étude d'un grand intérêt sur l'enseignement de la Cosmographie dans les Ecoles moyennes :

Band III, Heft 4. — *Mathematische Himmelskunde und niedere Geodäsie an den höheren Schulen*, von Prof. Dr. Bernhard Hoffmann. (VI et 68 p., B. G. Teubner, Leipzig.)

La Sous-commission vient de publier en outre un nouveau fascicule de ses *Berichte u. Mitteilungen*. Il contient un compte rendu du Congrès de Milan, par W. Lietzmann, d'après le compte rendu détaillé publié par le secrétaire-général de la Commission ; 2° une étude de M. R. Schimmack (Gœttingue) sur la fusion des différentes branches mathématiques.

Heft VII (139 p.), W. Lietzmann, *Der Kongress in Mailand vom 18. bis 20. September 1911.*

R. Schimmack, *Ueber die Verschmelzung verschiedener Zweige des mathematischen Unterrichts.*

Autriche. — Nous venons de recevoir le fasc. 11 des *Berichte über den mathem. Unterricht in Oesterreich.* Il traite des Mathématiques dans l'enseignement de la Physique.

Heft 11. — *Die Mathematik im Physik-Unterricht der œsterreichischen Mittelschulen*, von Schulrat Dr. Aloïs Lanner (56 p.).

Etats-Unis. — Le « Bureau of Education » vient de publier deux nouveaux fascicules consacrés l'un aux Ecoles techniques moyennes, l'autre aux Ecoles militaires.

Comité VI. — *Mathematics in the Technical Secondary Schools* (35 p.).

Comité. XI. — *Mathematics at West Point and Annapolis* (25 p.).

Iles Britanniques. — Ce nouveau fascicule, le 18e de la série des rapports anglais, est consacré à l'enseignement mathématique des jeunes filles, dans les établissements secondaires et supérieurs.

N° 18. — 1. *The Value of the Study of Mathematics in Public Secondary Schools for Girls.* By Miss E. R. Gwatkin.

2. *The Place of Mathematics in the Education of Girls and Women.* By Miss Sara A. Burstall.

3. *Higher Mathematics for Women.* By Mrs. Henry Sidgwick. — 1 fasc. de 32 p. ; 2 1/2 d. ; Wyman & Sons, Londres.

Russie. — La Sous-commission vient de publier un nouveau fascicule. Il contient les trois rapports ci après, rédigés en français :

1. *Sur l'organisation de l'enseignement mathématique dans les gymnases de jeunes filles du ressort du Ministère de l'Instruction publique et dans l'Institut supérieur pédagogique des jeunes filles de St-Pétersbourg*, par M. Mikhelson (St-Pétersbourg).

2. *Notice sur l'enseignement mathématique dans les gymnases de jeunes filles de l'arrondissement de Varsovie*, par M. Goriatchev (Varsovie).

3. *Sur l'organisation de l'enseignement des mathématiques dans les écoles industrielles du ressort du Ministère de l'Instruction publique*, par P. Kotournitzki et A. Hatzouck (St-Pétersbourg).

Suisse. — Le fasc. 2 de *L'Enseignement mathématique en Suisse* comprend les rapports de MM. Stöcklin et Badertscher sur les mathématiques dans l'enseignement primaire et dans l'enseignement secondaire élémentaire (ou primaire supérieur). Il contient en outre la table générale des matières du volume renfermant l'ensemble des rapports suisses et comprenant plus de 750 pages.

No 2. — I. *Aperçu général*, par H. Fehr.

II. *Der mathematische Unterricht an den schweizerischen Primarschulen*, von J. Stöcklin.

III. *Der mathematische Unterricht an den schweizerischen Sekundarschulen*, von Dr. Badertscher. — 1 fasc. de 106 p.; Georg & Cie, Genève.

Le premier congrès des professeurs de Mathématiques en Russie.

Enseignement secondaire.

Le 9-16 janvier 1912 a eu lieu, à St-Pétersbourg, le premier congrès des professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire russe. Il a réuni plus de 1200 participants et comprenait environ 60 conférences et communications. En voici son programme préliminaire, signé par MM. les Prof. A.-V. Vassilief, K.-A. Possé, S.-E. Savitch, et M. le gén. Z.-A. Makcheïeff, directeur du Musée pédagogique des Ecoles militaires.

1. Bases psychologiques de l'enseignement mathématique (l'initiative, l'activité, le rôle de l'intuition et de la logique, etc.).

2. Le contenu du Cours des Mathématiques à l'Ecole moyenne au point de vue *a)* des tendances scientifiques modernes; *b)* des réclamations de la vie actuelle; *c)* des théories pédagogiques générales modernes.

3. La coordination des programmes des Mathématiques de l'enseignement secondaire avec ceux de l'enseignement primaire et supérieur.

4. Questions de la méthodologie des mathématiques élémentaires secondaires.

5. Les manuels et le matériel d'enseignement.

6. Les éléments historiques et philosophiques dans le cours des mathématiques secondaires.

7. Le dessin, le modelage et le travail manuel comme moyens auxiliaires d'enseignement mathématique.

8. Préparation des maîtres de mathématiques.

Le comité organisateur, sous la présidence de M. le général Makcheïeff, a commencé les travaux préparatoires avant les vacances, au mois de mai 1911. Une exposition des modèles et d'appareils d'enseignement et de la littérature classique des mathématiques a été organisée dans les salles du Musée pédagogique, le siège du Congrès.

Le Congrès fut ouvert le 9 janvier. Il désigna comme président du Congrès M. le Prof. A. Vassilief, qui a prononcé le discours *Sur l'enseignement mathématique et philosophique à l'Ecole moyenne*, dont voici les thèses : I. L'Ecole moyenne doit se poser comme un de ses buts d'éveiller l'intérêt pour la spéculation philosophique sérieuse ; c'est l'année dernière de l'enseignement secondaire qui, plus particulièrement, peut et doit servir à ce but. II. Dans toutes ses étapes, l'enseignement mathématique doit viser le développement du raisonnement logique. III. Pendant la dernière année de l'école secondaire, l'enseignement mathématique doit viser 1° à éclairer et expliquer aux élèves la valeur des mathématiques pour les sciences exactes et pour l'expression mathématique des lois de la nature, et 2° à donner un coup d'œil rétrospectif sur le système des mathématiques élémentaires (le plan de Méran, 1905). IV. Conformément à ce but, dans les programmes des mathématiques de la dernière année de l'Ecole secondaire, l'attention principale doit être dirigée 1° sur l'explication de la notion de la fonction et de sa variation, 2° sur les fondements de l'arithmétique, de l'algèbre et de la géométrie. V. Il est désirable d'établir alors un lien étroit entre les cours des mathématiques et de la propédeutique philosophique. VI. Les fondements de l'arithmétique (l'étude du nombre entier) sont particulièrement riches de questions suggestives et intéressantes au point de vue de l'enseignement préparatoire de la philosophie.

Nous ne croyons pas nécessaire d'insérer ici la liste de toutes les communications, et ne mentionnons que celles qui nous paraissent le plus importantes.

M. Bogomolov (St-Pétersbourg), parla des *fondements de la géométrie en rapport avec son enseignement*. Il a insisté sur la division du cours de la géométrie en deux : *a)* l'enseignement préparatoire, intuitif et expérimental, ayant pour but d'accumuler des faits géométriques et le développement de l'intuition de l'espace, et *b)* l'enseignement systématique de la géométrie comme système hypothético-déductif; les matières traditionnelles de la géométrie élémentaire pourraient être ranimées et complétées par les théo-

ries plus récentes de la géométrie projective et descriptive dans le cours préparatoire, de la géométrie non-eucludienne (dans l'enseignement scientifique).

Ce discours fut suivi d'une communication de M. Dolgouchine (Kieff), qui expliqua comme il enseignait avec succès l'interprétation de M. Poincaré des planimétries d'Euclide, de Lobatchevsky et de Riemann par des faisceaux des cercles. Je ne puis pas dire que cette communication, en soi fort spirituelle et accompagnée de dessins fort élégants, m'ait convaincu : de pareilles matières doivent être familières au professeur de l'Ecole secondaire, mais c'est à l'Université qu'il doit les apprendre.

M. S.-J. Chokhor-Trotskij, un des pédagogues les plus appréciés, a montré dans son discours : *Ce que demande la psychologie des mathématiques comme objet de l'enseignement,* sur les avantages de l'enseignement « laboratoire » des mathématiques et sur l'individualisation de l'enseignement selon les types psychologiques différents qui se rencontrent parmi les élèves. Je passe plusieurs autres communications qui visaient la même chose, soit en arithmétique, soit en algèbre et en géométrie.

Dans un discours animé, qui dura presque deux heures, M. W.-W. Bobynin a insisté sur l'introduction, dans l'enseignement secondaire, *des notions historiques.*

M. le gén. M.-G. Poprouјenko a parlé de *l'enseignement de l'analyse infinitésimale* à l'école moyenne, ayant en vue principalement son introduction récente dans les corps des cadets (écoles secondaires militaires), dont le vénérable rapporteur est un des adeptes ardents.

Le dernier jour, MM. K.-A. Possé et W.-B. Struve ont donné deux discours sur *la coordination des programmes* de l'Ecole moyenne et de l'Ecole supérieure. M. Possé regarde, comme le problème principal de l'organisation de l'enseignement, l'équilibre de deux buts de l'enseignement moyen : 1° l'Ecole moyenne doit donner une éducation complète ; 2° l'Ecole moyenne doit préparer aux études supérieures. Il trouve à bon droit qu'en ce qui concerne les mathématiques, les plans et les programmes de l'enseignement secondaire russe doivent être considérablement modifiés. Pour satisfaire aux deux buts, il recommande que l'on adopte le système français de bifurcation de l'enseignement. Le nombre toujours croissant des jeunes filles qui s'adonnent aux études supérieures, fait désirer que l'enseignement secondaire des jeunes filles devienne plus conforme — en mathématiques, bien entendu — avec celui des garçons.

M. W.-B. Struve, directeur de l'Institut d'Arpentage, à Moscou, dont nous déplorons vivement la mort prématurée, survenue au lendemain du Congrès, a prononcé un discours sur le même sujet, où il rappela les idées qu'il avait publiées il y a quinze ans

dans la revue russe *l'Enseignement technique et commercial;* il les a complétées de remarques basées sur son expérience et ses méditations. J'ai ajouté à ces discours quelques mots pour communiquer les chiffres extrêmement remarquables sur la fréquentation des différentes sections des lycées français, qui m'ont été communiqués par M. Niewenglowski.

Parmi les autres communications, citons celles de M. W. Kagan (Odessa), *Sur les transformations des polyèdres,* illustrées par des projections où l'auteur montrait l'impossibilité de diviser deux polyèdres symétriques non congruents en parties congruentes, quelque grand que soit leur nombre; la communication de M. Chatounovskij (Odessa), *Sur la grandeur*, dans laquelle il déduisait la notion de la grandeur de quelques prémisses tout à fait abstraites.

N'oublions pas enfin une étude très documentée que nous a communiquée M. W. Kagan, *Sur l'histoire de la préparation des maitres de mathématiques en Russie.* Il faudrait mentionner encore les communications de Mme T.-A. Ehrenfest, *Sur les nombres irrationnels*, et une seconde *Sur Euclide et l'Ecole secondaire;* celles de M. D. Tenner, *Sur les moyens intuitifs* et *Sur les illustrations graphiques de la résolution d'un système d'équations.* Bien d'autres seraient encore à mentionner. Les communications furent suivies de débats animés, souvent d'un grand intérêt par les compléments qu'ils apportaient parfois au sujet de la communication.

Mais je n'insiste pas davantage. Nous reviendrons peut-être sur ce sujet quand les travaux du Congrès seront publiés. Des télégrammes, votés par acclamation, ont été envoyés à MM. F. Klein, A. Gutzmer et C.-A. Laisant sur la proposition du Comité d'organisation.

Voici enfin les *résolutions votées* à l'unanimité à la séance de clôture du Congrès, dont je dois le texte précis à l'amabilité de M. le général Makcheïeff :

1. Le Congrès estime qu'il est nécessaire de relever l'individualité et l'activité des élèves; il faut augmenter l'intuitivité de l'enseignement sur toutes ses étapes et développer en même temps l'élément logique dans les classes supérieures, en prenant toutefois en considération les particularités psychologiques de l'âge des écoliers et l'accessibilité des matières enseignées.

2. Le Congrès trouve à propos de supprimer, dans le cours de mathématiques de l'école moyenne, quelques questions de valeur secondaire; l'enseignement doit éclairer vivement l'idée de la dépendance fonctionnelle; il faut rapprocher l'enseignement des exigences de la science et de la vie moderne, et faire apprendre les idées les plus simples et les plus accessibles de la géométrie analytique et de l'analyse.

3. Le Congrès émet le vœu que les auteurs des manuels en cours

et à faire prennent en considération les points de vue exprimés dans le n° 2 de ces résolutions. En particulier il est désirable d'avoir des recueils de problèmes qui soient conformes aux intérêts de l'écolier à chaque étape de l'enseignement, et qui contiennent des données de physique, de cosmographie, de mécanique, etc., une chrestomatie mathématique complète permettrait à l'écolier d'approfondir ses connaissances.

4. Le Congrès émet le vœu de l'élaboration d'un plan détaillé de l'organisation de l'enseignement secondaire, d'une manière telle que, tout en conservant son caractère d'éducation générale, elle permette une spécialisation dans des classes supérieures, adaptée aux capacités individuelles des écoliers, et satisfasse aux exigences de l'enseignement supérieur.

5. Le Congrès émet le vœu que l'Ecole tienne compte des besoins des écoliers spécialement doués en mathématiques, et que des directions leur soient données de la part du personnel enseignant.

6. Le Congrès émet le vœu que l'Université, sans nuire à sa destination principale, cultive la science et l'enseignement scientifique ; renforce son enseignement par des éléments nécessaires au futur maître d'école moyenne.

7. Le Congrès estime nécessaire qu'après avoir achevé leurs études scientifiques, les candidats au professorat reçoivent une préparation pédagogique spéciale par un personnel enseignant bien choisi et dans des conditions matérielles aussi bonnes que possible.

8. Le Congrès trouve nécessaire qu'en dehors de ces cours permanents, il soit organisé des séries de conférences et des réunions pour rajeunir le bagage scientifique et pédagogique du corps enseignant.

9. En vue de faciliter aux professeurs de compléter leurs connaissances spéciales et pédagogiques, les bibliothèques des écoles doivent être pourvues des ouvrages nécessaires dans les domaines scientifiques, didactiques et méthodologiques, ainsi que des journaux.

10. Le Congrès émet le vœu qu'il soit accordé plus d'indépendance aux Conseils pédagogiques des écoles pour ce qui est de la distribution de la matière d'enseignement suivant les classes, ainsi que pour le choix des manuels.

11. Le Congrès émet le vœu que dans les établissements de jeunes filles le niveau de l'enseignement des mathématiques soit relevé, en raison de la haute valeur éducative des mathématiques et de la tendance bien répandue chez les jeunes filles à continuer dans l'enseignement supérieur.

12. Reconnaissant les difficultés que peut présenter la réalisation de ces vœux, le Congrès estime qu'il est nécessaire de procé-

der avec beaucoup de prudence dans toutes les mesures qui concernent leur introduction dans l'organisation actuelle. A cet effet, le Congrès exprime les présentes résolutions sous une forme très générale, et charge le Comité d'organisation de former des commissions qui s'occuperont d'élaborer avec soin des projets détaillés concernant tous ces vœux généraux.

Les rapports de ces commissions devront être imprimés au plus tard trois mois avant le IIme Congrès, et envoyés à tous les Comités scientifiques, aux Conseils et conférences des Ecoles supérieures, aux Sociétés et Cercles mathématiques, aux maîtres de mathématiques et aux organes de la presse pédagogique. La principale mission du IIme Congrès sera de discuter ces rapports et de voter les décisions définitives.

13. Le Congrès émet le vœu que ses membres présentent aux commissions qui vont être organisées leurs desiderata sur les questions mentionnées plus haut et sur des questions annexes.

14. Vu que la question très importante des examens et des travaux écrits n'a été discutée que par l'une des sections, le Congrès, tout en reconnaissant que l'état actuel n'est pas satisfaisant et qu'il est nécessaire d'introduire des changements radicaux, charge le Comité du prochain Congrès d'organiser une commission spéciale, à laquelle doivent être renvoyées les résolutions émises par la IIme section.

15. Le Congrès émet le vœu que le IIme Congrès comprenne aussi des sections spéciales pour les maîtres des écoles féminines, des écoles techniques et commerciales, et qu'à ces sections soient présentés des rapports sur les changements de programmes.

16. Etant donné qu'il existe à présent dans les différentes régions de la Russie un nombre assez considérable de Cercles mathématiques, il est désirable de créer une organisation spéciale, qui, tout en laissant à ces Cercles une complète indépendance, les unisse sur le fond de leurs intérêts communs et de leurs aspirations.

17. Le Congrès témoigne sa reconnaissance aux organes de la presse russe, qui servaient et servent à l'œuvre de l'enseignement des sciences mathématiques, et approuve le projet du Cercle mathématique de Moscou, concernant sa revue[1] dans laquelle il se propose d'accorder une grande place à l'information mutuelle des Sociétés et des Cercles qui se vouent à l'enseignement des mathématiques.

18. Le Congrès trouve nécessaire de convoquer le IIme Congrès russe des professeurs de mathématiques au mois de décembre

[1] Cette revue du Cercle mathématique de Moscou porte le nom de *Mathematitcheskoïe Obrasovanïe* (L'Enseignement mathématique) : trois numéros sont parus.

1913, à *Moscou*, et prie le Cercle mathématique de Moscou de se charger de l'organisation de la réunion.

19. Le Congrès charge son Comité d'organisation de présenter ces résolutions aux ministres et aux directeurs en chef dans le ressort desquels se trouvent des écoles moyennes.

D. Sintsof (Kharkof).

Nouvelles diverses. — Nominations et distinctions.

Allemagne. — La *Société mathématique allemande* (Deutsche Mathematiker-Vereinigung) se réunira cette année à Münster i. W., du 15 au 21 septembre, sous la présidence de M. le prof. von Dyck (Munich). Les communications porteront principalement sur la Géométrie infinitésimale.

La *Société allemande pour le progrès de l'enseignement des Sciences mathématiques et naturelles* (Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts) tiendra sa XXIme assemblée générale à Halle a. S., du 27 au 30 mai 1912, sous la présidence de M. le prof. Thaer (Hambourg). Le Comité local est présidé par M. le prof. Wangerin.

Fondation Wolfskehl. — La Société scientifique de Gœttingue a attribué une somme de 5000 Mk à M. le prof. Zermelo, pour ses recherches dans le domaine de la théorie des ensembles et comme contribution aux frais que nécessite le rétablissement complet de sa santé.

Privat-docents. — M. R. Courant est admis en qualité de privat-docent à l'Université de Göttingue, et M. F. Pfeiffer à l'Ecole supérieure technique de Danzig.

Angleterre. — M. L. N. G. Filon, F. R. S., est nommé professeur de Mathématiques appliquées et de Mécanique à l'Université de Londres.

Autriche. — M. E. Czuber, professeur à l'Université de Vienne, est nommé membre de l'Académie des Sciences de Halle.

M. L. Schrutka de Rechtenstamm, assistant et privat-docent à l'Ecole technique supérieure à Vienne, est nommé professeur extraordinaire à l'Ecole technique supérieure allemande à Brünn.

M. Hostinsky est admis en qualité de privat-docent à l'Université bohême de Prague.

France. — *Le Jubilé Camille Flammarion.* — Le 26 février dernier, dans la grande Salle de l'Hôtel des Sociétés savantes, a eu lieu, sous la présidence de M. H. Poincaré, une fête en l'honneur des 70 ans de M. Camille Flammarion et du vingt-cinquième anniversaire de la fondation de la Société astronomique de France. A cette occasion, une plaquette commémorative a été offerte au Jubilaire et des discours ont été prononcés par MM. H. Poincaré,

Puiseux, Ferdinand Buisson, Jean Mascart, le commandant Paul Renard, Maurice Fouché, Edmond Haraucourt et Ch. Richet.

Congrès des Sociétés savantes (9-13 avril). — Le Congrès a été ouvert le 9 avril, à la Sorbonne, sous la présidence de M. Gaston Darboux, président de la Section des sciences du Comité des travaux historiques et scientifiques.

Nous donnons ci-après la liste des communications présentées à la Section des mathématiques :

Gérardin : « Décomposition des grands nombres en facteurs premiers. » — Signoret : « Transport d'énergie électrique d'Orlu (Ariège) ». — E. Lebon : « Facteurs premiers des nombres de 1 à 100 millions ». — Lacour : « Potentiels de simple couche ». — Fréchet : « La notion différentielle ». — Capitaine Jordan : « Observations de l'Astrolabe ». — Riquier : « Système particulier d'intégrales satisfaisant à des conditions déterminées le long d'un contour ».

M. P. Appell est nommé membre correspondant de l'Académie des Sciences de St-Pétersbourg.

M. G. Darboux est nommé membre d'honneur de l'Académie royale d'Irlande.

Grèce. — M. D. Aeginitis est nommé professeur d'Astronomie à l'Université d'Athènes.

Italie. – *Reale Istituto Veneto* (Venise). — M. G. B. Guccia, professeur à l'Université de Palerme, a été élu associé national. MM. P. Duhem, de l'Université de Bordeaux, et W. Nernst, de l'Université de Berlin, ont été élus associés étrangers.

Suisse. — La *Société mathématique suisse* tiendra sa réunion annuelle ordinaire à Altorf, les 9 et 10 septembre, à l'occasion de la 95me réunion de la Société helvétique des Sciences naturelles.

Nécrologie.

M. C. Arzela, professeur d'Analyse infinitésimale à l'Université de Bologne, est décédé, après une longue maladie, le 16 mars 1912, à Santo Stefano di Magra (Gênes), à l'âge de 65 ans. Il y était né le 8 mars 1847. Ses travaux ont résolu maintes questions fondamentales touchant aux principes de la théorie des fonctions d'une variable réelle.

M. le prof. Dr C. Färber est décédé le 22 mars 1912, à Berlin, à l'âge de 48 ans.

J. Pillet. — Nous apprenons avec regret la mort de M. Jules Pillet, professeur au Conservatoire des Arts et Métiers et à l'Ecole des Ponts et Chaussées ; il était en outre Maître de Dessin de machines à l'Ecole polytechnique.

NOTES ET DOCUMENTS

Commission internationale de l'Enseignement mathématique.

Compte rendu des travaux des sous-commissions nationales[1].
(7e article.)

ALLEMAGNE

L'enseignement du calcul.

Stoff u. Methode des Rechenunterrichts in Deutschland[2]. *Ein Literaturbericht* von Dr. W. Lietzmann, Oberlehrer an der Oberrealschule in Barmen. — L'ouvrage de M. le Dr W. Lietzmann est une étude très complète, très approfondie de l'enseignement du calcul en Allemagne aussi bien dans les écoles primaires que dans les Mittelschulen (écoles primaires supérieures) et dans les écoles normales d'instituteurs. L'auteur spécifie bien qu'il s'agit du calcul, c'est-à-dire des opérations faites sur des nombres positifs, entiers ou fractionnaires, représentés par des chiffres.

Pendant très longtemps on se bornait à donner aux enfants les règles nécessaires pour effectuer les opérations, sans essayer de les leur expliquer. C'est surtout Pestalozzi (1746-1827) qui introduisit le raisonnement. Mais en Allemagne les études dans les écoles supérieures ne sont pas régies par un programme commun. Certaines villes prescrivent des programmes annuels. Il en résulte alors pour le maître l'obligation de répartir les matières de ce programme sur chaque semaine et même sur les différentes heures de son enseignement. On attache une très grande importance à ce mode de répartition ; le maître inscrit d'ailleurs sur un cahier spécial les matières traitées pendant la semaine. L'auteur s'étend sur ces questions de programme et donne des exemples et des détails fort intéressants que je regrette de ne pouvoir citer ici.

Il insiste ensuite sur l'importance du calcul mental. On exerce à ce calcul les élèves de toutes les classes, même des classes supérieures et peut-être quelquefois va-t-on jusqu'à l'exagération. M. Lietzmann a vu demander dans une école normale d'instituteurs à faire de tête des exercices qui se résolvent par un système d'équations à plusieurs inconnues.

Le maître fait donc effectuer un nombre considérable d'opérations et d'exercices ; sa besogne lui est facilitée par des livres de problèmes mis entre les mains des élèves ; le mot livre ne convient peut-être pas très bien,

---

[1] Voir l'*Ens. math.*, 13e année, 1911 ; 14e année, 1912.

[2] *Abhandlungen über den mathem. Unterricht in Deutschland.* Band V : *Der mathematische Elementarunterricht u. die Mathematik an den Lehrerbildungsanstalten*, Heft 1. — 1 fasc. de VII et 126 p., 3 Mk., B. G. Teubner, Leipzig.

il faudrait dire des recueils d'exercices. Les recueils de Koch parus en 1855 ont atteint 552 éditions ; il a été vendu plus de dix millions d'exemplaires du livre de calcul de Buttner.

Quelques-uns de ces livres contiennent des théorèmes ou plutôt leurs énoncés ; la partie théorique ne dépasse pas l'indication de quelques règles, de quelques simplifications, de quelques exemples développés. Les livres existent en grand nombre, ainsi que les revues pédagogiques ; la bibliothèque de l'union des instituteurs allemands à Berlin en reçoit plus d'une centaine.

Ces considérations générales sont contenues dans le premier chapitre. Le second chapitre est consacré aux opérations sur les nombres entiers. Tout d'abord il s'agit d'enseigner la numération parlée et pour cela on procède en Allemagne, comme en France et comme ailleurs, au moyen d'objets, de boules, de bâtonnets. On représente les unités décimales des divers ordres par des images distinctes ou des objets munis de points.

Arrivant ensuite aux opérations, la question suivante se pose : Doit-on donner des explications et formuler des règles. « Nous n'avons en Allemagne (dit l'auteur) aucune théorie du calcul numérique, cet intermédiaire entre notre calcul et notre arithmétique ou algèbre que les Français désignent dans les programmes de leurs écoles par arithmétique. Aussi dans le domaine du calcul numérique un exposé systématique avec des démonstrations logiques basé sur des axiomes, n'existe pas chez nous. Même lorsqu'il est parlé de justification logique (Schellner), la règle n'est autre chose que le résumé d'un certain nombre d'exemples traités auparavant. »

Je pense que M. Lietzmann a eu sous les yeux les livres d'Arithmétique de M. Bourlet. Il a vu sans doute avec quel soin et avec quelle clarté on sait expliquer aux enfants de France tout ce que leur âge les met en état de comprendre.

Je ne peux pas citer ici les nombreux détails donnés dans le livre sur l'addition, la soustraction, la multiplication, la division. En ce qui concerne la divisibilité, on n'étudie que les caractères les plus simples, quelquefois même on donne les caractères par 3 et par 9 sans les expliquer et on les applique à la preuve par 9.

On enseigne la recherche des nombres premiers jusqu'à 20 ou jusqu'à 100 par le crible d'Eratosthène. On ne démontre jamais que la suite des nombres premiers est illimitée.

Il est rarement question des diviseurs communs à plusieurs nombres et lorsqu'on en parle c'est sans démonstration.

Les écoles supérieures seules enseignent la décomposition en facteurs premiers, peu de livres indiquent la recherche du plus grand commun diviseur par la méthode des divisions successives due à Euclide.

L'auteur insiste ensuite sur les applications aux grandeurs, sur la nécessité de bien faire comprendre aux enfants les différentes espèces de grandeurs et sur le choix des énoncés de problèmes. Ils doivent avoir un côté pratique et être empruntés le plus possible à la vie usuelle.

Quant aux fractions, il paraît que les jeunes élèves ont quelque peine à comprendre la multiplication des fractions ; je crois que cela n'est pas particulier à l'Allemagne et à la France, il doit en être de même partout[1].

---

[1] Voir l'exposé très simple qu'en donne M. LAISANT dans son *Enseignement du calcul* (Paris. Hachette)

Depuis 1872 les fractions décimales sont employées, mais sans aucune considération théorique.

Les règles de trois se résolvent par la réduction à l'unité. « Le chapitre consacré à cette question indique un certain nombre de modifications et de simplifications, que je ne peux citer ici.

L'école primaire donne des règles pour l'extraction de la racine carrée et souvent aussi de la racine cubique. M. Lietzmann voudrait, je crois, que l'on séparât bien les deux questions et peut-être que l'on se contentât de la première. A la fin de son ouvrage, il s'élève contre un abus des problèmes algébriques qu'on résout sans l'emploi des lettres, il cite d'ailleurs l'opinion de M. Bourlet qui, comme lui, regrette « cette gymnastique terrible qui consiste à traduire en langage vulgaire tout ce qui est condensé dans cette équation. »

Le rapport de M. Lietzmann est un document précieux pour la Commission internationale de l'enseignement mathématique. C'est un travail important : toutes les questions que peut soulever l'enseignement élémentaire y sont traitées dans leurs moindres détails, des détails que je n'aurais pas soupçonnés avant la lecture de ce livre et qui ont leur intérêt.

A. Lévy (Paris).

Ecoles spéciales

Die Mathematik an Hochschulen für besondere Fachgebiete[1], von Dr E. Jahnke, Professor an der k. Bergakademie in Berlin. — Ce rapport est consacré à l'enseignement des mathématiques dans les *écoles supérieures spéciales :* écoles des mines, écoles militaires, écoles forestières, instituts agronomiques, écoles de commerce. Pour terminer l'auteur examine encore les cours académiques spéciaux donnés comme cours de perfectionnement à l'école supérieure des postes et télégraphes à Berlin, ainsi que les cours académiques publics organisés par certaines villes, notamment Hambourg et Berlin.

1. *Ecole des mines* (Bergakademien). Elle sont à Berlin, Clausthal, Aix-la-Chapelle, Freiberg. L'école d'Aix-la-Chapelle est une section de l'Ecole technique supérieure. Il en sera prochainement de même avec celle de Berlin. Les deux autres écoles ont une organisation indépendante.

Les élèves de ces écoles doivent posséder la maturité et avoir fait un stage pratique de une année dans l'industrie minière. Pour le diplôme d'ingénieur des mines la durée des études est de 4 années.

Le cours principal de mathématiques est un cours de mathématiques supérieures et mécanique de 7 ou 8 heures hebdomadaires pendant 2 semestres, avec 1 ou 2 heures d'exercices ; ces heures sont comprises dans les précédentes. A côté de ce cours il existe encore un cours de géométrie descriptive avec 2 ou 3 heures pendant deux semestres et un cours de géodésie de 4 heures, pendant un semestre.

L'école de Freiberg présente une répartition quelque peu différente pour l'enseignement des mathématiques. Les cours de mathématiques supérieures et de mécanique sont séparés. Le premier se répartit sur quatre semestres avec 6, 6, 3 et 3 heures, le deuxième sur deux semestres avec 3 et 3 heures.

---

[1] *Abhandlungen über den mathem. Unterricht in Deutschland.* Band. IV : *Die Mathematik an den technischen Schulen.* Heft 7 ; 1 fasc. de VI et 56 p., 1 M. 80 ; B. G. Teubner, Leipzig.

En outre la géométrie descriptive figure avec 5 heures pendant deux semestres.

2. *Ecoles militaires.* Ce sont : L'Académie militaire royale de Berlin (Kriegsschule) ; l'Académie technique militaire de Charlottenbourg ; l'Académie maritime impériale de Kiel ; l'Académie militaire royale bavaroise de de Munich et l'Ecole d'artillerie de Munich.

Au début, l'enseignement des mathématiques à l'Académie militaire de Berlin s'étendait sur les trois années d'études. A l'heure actuelle cet enseignement a été considérablement réduit et il ne compte plus que 6 heures hebdomadaires la 1re année, et 4 la 2me. Dans la 1re année on développe la trigonométrie sphérique, la géométrie analytique plane, le calcul différentiel avec les séries. Dans la 2me année, la fin du cours de calcul différentiel et intégral puis quelques exemples de la mécanique analytique. L'auteur se plaint amèrement du recul de l'enseignement des mathématiques, de la physique et de la chimie. A l'Académie technique de Charlottenbourg, les officiers sont répartis en trois groupes : les officiers de troupe, les officiers des services techniques (mécanique, électricité, construction) et les officiers du service des transports. Les cours durent de deux à quatre années.

Les mathématiques comprennent un cours général, un cours de descriptive, un cours de mécanique et un cours de ballistique. Le premier cours dure trois ans (2 fois 4 heures et 1 fois 2 heures) ; il embrasse la répétition du programme de maturité, puis les éléments du calcul différentiel et intégral avec applications. Le cours de descriptive s'adresse seulement aux officiers de troupe, 4 heures la 2me année : projections orthogonales avec pénétrations des corps de révolution et d'autres corps importants. La mécanique figure dans tous les groupes pendant deux ou trois années avec 2, 3 ou 5 heures hebdomadaires. Les cours de ballistique ne sont prévus que pour les officiers de troupe : 2, 3, 12 et 8 heures.

A l'Académie de marine de Kiel, les cours de mathématiques forment deux cours annuels de 2 heures : calcul différentiel puis calcul intégral avec de nombreuses applications spécialisées.

A l'Ecole de guerre de Munich, l'enseignement des mathématiques se répartit sur les trois années d'études avec 3 heures par semaine : 1re année. Algèbre supérieure et géométrie analytique plane ; 2me année. Géométrie analytique de l'espace, calcul différentiel et intégral ; 3me année. Répétitions, applications et mécanique analytique.

Il nous reste à parler de l'Ecole d'artillerie de Munich ; elle comprend deux sections : artillerie, avec 2 cours et services techniques, avec 4 cours. La 1re section a 4 heures de mathématiques et mécanique dans chaque cours et l'autre 5, avec en plus 2 heures de descriptive dans les deux premiers cours.

3. *Ecoles forestières.* Les écoles spéciales sont à Eberswald, Münden-Hannover, Tharandt et Eisenach ; il y a en outre des sections forestières aux universités de Munich et Karlsruhe. Les deux écoles de Eberswald et Münden n'ont pas de cours spéciaux de mathématiques générales. On y enseigne la géodésie (1 semestre, 7 heures), le cubage des bois (2 semestres, 1 heure), le calcul forestier (2 semestres, 3 heures). A Tharandt, il y a par contre deux cours semestriels de 4 heures pour le calcul infinitésimal et un de 3 heures pour la mécanique, avec en plus les cours spéciaux de géodésie, calcul forestier et dessin de plans. L'école de Eisenach semble être dans une période de transformation. Les sections forestières universitaires

de Munich et Karlsruhe ont toutes deux des répartitions de cours assez différentes, mais dans chacunes d'elles figure un cours de mathématiques supérieures et de descriptive, à côté des cours spéciaux pour les sciences forestières.

4. *Ecoles supérieures d'agriculture et instituts agronomiques.* Nous trouvons ces instituts à Berlin, Bonn-Poppelsdorf, Halle, Hohenheim, Breslau, Giessen, Iéna, Kiel, Königsberg et Munich. Dans ces écoles, les mathématiques n'occupent qu'une place relativement restreinte. La trigonométrie sphérique et la géodésie avec applications semblent les deux seuls domaines sur lesquels on s'arrête. Ceci est du reste facilement compréhensible, étant donné le but proposé.

5. *Ecoles supérieures de commerce et cours commerciaux universitaires.* Ces institutions sont à Francfort-s-M., Leipzig, Cologne, Munich et Mannheim. L'arithmétique commerciale et le calcul des assurances sont seuls enseignées dans ces écoles. Francfort fait exception. Il y a dans cette dernière ville des cours complets de mathématiques supérieures [1], mais nous devons ajouter qu'ils sont suivis principalement par des mathématiciens.

6. *Formation des employés supérieurs du service des postes et télégraphes.* L'Ecole des postes et télégraphes de Berlin donne des cours de calcul différentiel et intégral et de géométrie analytique. Le personnel supérieur des services dont nous parlons peut encore étendre sa culture mathématique par des cours complémentaires organisés spécialement pour lui par les administrations compétentes.

7. *Cours universitaires publics.* Le rapport de M. Jahnke se termine par un aperçu sur les cours publics universitaires de Berlin et de Hambourg. Le personnel du corps enseignant moyen de ces villes, les techniciens et les ingénieurs en place, ont l'occasion d'étendre leur culture mathématique par des cours supérieurs de toute nature. Nous citerons les cours de Schubert à Hambourg, ceux de Schwahn et de Korn à Berlin.

Parlant du mouvement antimathématique qui s'est manifesté en Allemagne, dans certains milieux techniques pendant les années 1890 à 1900, M. Jahnke fait ressortir avec raison les conséquenses fâcheuses que présente cette tendance à un moment où le technicien doit posséder une solide culture mathématique pour pouvoir suivre tous les progrès accomplis dans sa branche.

L. Crelier (Bienne).

BELGIQUE

La Sous-commission belge vient de faire paraître un volume de 348 pages intitulé *Rapports sur l'enseignement des Mathématiques, du Dessin et du Travail manuel dans les Ecoles primaires, les Ecoles normales primaires, les Ecoles moyennes, les Athénées et les Collèges belges*, Bruxelles, J. Goemaere, 1911.

Pour l'intelligence du compte rendu suivant, nous donnerons d'abord un tableau de l'enseignement primaire et moyen (secondaire) en Belgique, en indiquant entre parenthèses l'âge normal ou moyen des écoliers.

---

[1] Donnés actuellement par M. le prof. Schoenflies (*Réd.*).

Enseignement primaire : 1° Ecoles gardiennes d'après le système Frœbel (3 à 6 ans); 2° Ecoles primaires à trois degrés (6 à 12 ans), complété dans certaines localités par un quatrième degré de une, deux ou trois années; 3° Ecoles d'adultes; 4° Ecoles normales primaires (15 à 19 ans), auxquelles sont annexées des écoles primaires d'application.

Enseignement moyen du degré inférieur : 1° Ecoles moyennes pour filles ou garçons[1] (12 à 15 ans); 2° Sections normales moyennes (19 à 21 ans).

Enseignement moyen du degré supérieur : 1° Athénées royaux (11 à 18 ans) pour garçons; 2° Collèges communaux ou libres à programme analogue à celui des Athénées. Les Athénées correspondent aux lycées français ou aux gymnases allemands; ils sont divisés en quatre sections: humanités grecques-latines, humanités latines, humanités modernes scientifiques, humanités modernes commerciales. Leur personnel se forme à l'Université; il n'en sera donc pas question.

L'enseignement moyen du degré supérieur pour filles n'existe pas officiellement; certaines écoles moyennes de filles sont complétées par une ou plusieurs années d'études; il existe aussi des établissements privés ou communaux, à programme variable, se rapprochant rarement des Athénées pour garçons.

Cela dit, parcourons rapidement les quatre rapports du volume.

I. — *Rapport sur l'enseignement des Mathématiques dans les Ecoles primaires et dans les Ecoles normales primaires*, par M. Dock, inspecteur des Ecoles normales primaires, p. 5-33. — Le programme-type de 1887 pour les écoles primaires comprend : au 1er degré, le calcul des nombres de 1 à 100, les dixièmes et centièmes de l'unité, les fractions dont le dénominateur ne dépasse pas 100, le mètre, le litre, le gramme et le franc, le tout très intuitif; au 2e degré le calcul des nombres entiers, la formation des fractions ordinaires et leur conversion en décimales, le système métrique et des problèmes; au 3e degré la théorie des nombres entiers; les fractions ordinaires et décimales, l'application du système métrique à des évaluations d'aires et de volumes.

Le but est à la fois utilitaire et formel, la méthode intuitive et progressive; calculs mental et chiffré sont menés de front. Environ un septième du nombre total d'heures de cours est consacré au calcul.

Les communes qui organisent un 4e degré ou des écoles d'adultes arrêtent un programme d'après les besoins locaux; il existe un mouvement sérieux pour donner au quatrième degré un caractère technique.

Quant aux élèves des Ecoles normales primaires, outre un cours de méthodologie spéciale, ils voient l'arithmétique démontrée (nombres entiers, fractions, proportions, racine carrée et cubique, progressions, logarithmes, problèmes de la vie usuelle); l'algèbre (calcul des polynômes et des fractions, équations et problèmes du 1er degré à une ou plusieurs inconnues); la géométrie plane (environ les quatre premiers livres de Legendre).

Les mathématiques représentent à peu près 10 % du total des matières, tant pour le temps qui y est consacré que pour la cote d'importance dans les examens annuels. Les institutrices ne voient pas d'algèbre ni de géométrie.

---

[1] Une section préparatoire comprenant les trois degrés primaires y est généralement annexée.

II. — *Rapport sur l'enseignement du Dessin et du Travail manuel dans les Ecoles primaires, les Ecoles moyennes, les Athénées et les Collèges* par L. Montfort, Inspecteur de l'Enseignement du Dessin, p. 35 à 187. — Nous devons, à regret, passer rapidement sur cet important Rapport dont le sujet intéresserait moins directement les lecteurs de l'*Enseignement mathématique*. Signalons toutefois le passage où l'auteur reproche avec raison au programme de dessin géométrique et de perspective de devancer le moment où les notions correspondantes sont étudiées dans les cours de mathématiques.

III. — *Rapport sur l'enseignement des Mathématiques dans les Ecoles moyennes, les Athénées et les Collèges*, par H. Ploumen, Inspecteur de l'enseignement moyen, p. 189-276. — Après un aperçu historique sur l'organisation de l'enseignement moyen en Belgique, le Rapport détaille les programmes de mathématiques.

1° *Athénées royaux*. Les classes de 7e et de 6e sont communes à toutes les sections et voient les règles démontrées de l'addition, de la soustraction, de la multiplication des nombres entiers, les caractères de divisibilité, le calcul des fractions ordinaires et décimales, des problèmes usuels.

Dans la section greque-latine, on enseigne les compléments de l'arithmétique démontrée en 5e et en 4e; l'algèbre jusqu'aux équations du second degré, logarithmes et rentes viagères, à partir de la 4e; la géométrie plane et solide de Legendre à partir de la 4e, l'arpentage en 3e; la trigonométrie rectiligne en 2e et en 1re.

La section latine et la section moderne scientifique ont le même programme de mathématiques, comportant : l'arithmétique démontrée, y compris les approximations numériques, la racine cubique, les différents systèmes de numération, en 5e, 4e, 3e et 2e; l'algèbre jusqu'au second degré, logarithmes, binôme de Newton, fractions continues dans les mêmes classes; la géométrie plane en 5e, 4e et 3e et la géométrie solide en 2e; la trigonométrie rectiligne en 3e et 2e; enfin, en 1re, la trigonométrie sphérique, la géométrie analytique des coniques et la géométrie descriptive (point, droite et plan); de plus, en 1re, on revoit les théories principales enseignées dans les classes inférieures.

La section commerciale n'a de programme distinct qu'à partir de la 3e; on n'y voit guère plus de mathématiques que dans la section greque-latine, mais on insiste sur l'algèbre financière.

2° *Ecoles moyennes de garçons*. A l'inverse de ce qui arrive pour les Athénées royaux, les trois classes successives des Ecoles moyennes sont désignées sous les noms de première année, deuxième année et troisième année; on y voit de l'arithmétique démontrée dans les trois années; le calcul algébrique et les équations du premier degré en deuxième et troisième année; la géométrie plane répartie sur les trois années.

3° *Ecoles moyennes de filles*. Le programme d'algèbre et de géométrie est moins étendu; la géométrie ne commence qu'en seconde année.

Le temps consacré aux mathématiques est en moyenne de 3 heures par semaine dans les sections grecques-latines ou commerciale des Athénées royaux, de 5 heures dans leurs sections latines ou scientifiques, de 4 heures dans les Ecoles moyennes de garçons et de 3 heures dans les Ecoles moyennes de filles.

Le Rapport examine ensuite le but et les méthodes de l'enseignement, la concentration de l'enseignement et les examens trimestriels et annuels; il

énumère quelques questions posées aux concours généraux entre Athénées et Ecoles moyennes.

Les professeurs des Ecoles moyennes portent le nom de régents ou régentes et sont formés dans des sections normales moyennes à deux années d'études dont voici le programme :

1° *Régents.* Compléments d'arithmétique démontrée, algèbre jusqu'au second degré et aux logarithmes ; les huit livres de Legendre ; la topographie ; la trigonométrie rectiligne ; les premiers éléments de géométrie analytique, de géométrie descriptive et de mécanique.

2° *Régentes.* Compléments d'arithmétique, algèbre jusqu'au second degré et géométrie plane.

Ces programmes sont ceux de la section dite scientifique ; ceux de la section littéraire ne comportent de mathématiques qu'en première année.

Suivent quelques questions posées aux examens de régents et régentes :

IV. — *Les tendances actuelles de l'enseignement mathématique en Belgique et leur influence sur les méthodes et les programmes*, par H. Ploumen, Inspecteur de l'enseignement moyen, p. 277-343. — L'auteur passe en revue les diverses branches des mathématiques en examinant leur rôle éducatif et utilitaire, signale le besoin d'une forte instruction mathématique qui se fait sentir dans les diverses carrières libérales. Il propose l'introduction de la géométrie analytique, dans la section grecque-latine des Athénées, du calcul différentiel et intégral ainsi que de la géométrie projective dans les sections scientifique et latine en indiquant les suppressions qui pourraient compenser cet accroissement de matières. Il termine par une série d'observations d'ordre méthodologique.

M. Stuyvaert (Gand).

ÉTATS-UNIS D'AMÉRIQUE

Les mathématiques dans les Ecoles élémentaires.

La Sous-commission américaine, ainsi qu'il a déjà été expliqué (*L'Ens. Math.*, mai 1909), procède par comités et sous-comités ; chacun d'eux rapporte sur un type d'école aux divers points de vue indiqués par le rapport préliminaire du Comité central.

Les comités I et II, chargés respectivement des écoles élémentaires générales et des écoles élémentaires spéciales, ont résumé leurs rapports en un fascicule de 185 pages, intitulé : « Les mathématiques dans les écoles élémentaires des Etats-Unis » [1].

Le fascicule débute par une exposition générale de l'organisation de l'enseignement américain. Cet enseignement comporte deux divisions principales : l'enseignement public et l'enseignement privé ; ce deuxième comprend des institutions religieuses, philanthropiques ou simplement financières.

Le rapport du comité n° 1 embrasse les écoles élémentaires générales, publiques et privées. Il étudie l'enseignement des mathématiques tel qu'il est donné actuellement dans ces écoles : *a)* le but de l'organisation ; *b)* le

---

[1] « Mathematics in the Elementary Schools of the United States ». Publié par les soins du « United States Bureau of Education », Washington.

plan d'études mathématiques ; *c)* la question des examens ; *d)* les méthodes d'enseignement ; *e)* la préparation des maîtres.

Le travail est réparti entre six sous-comités. Le premier présente un rapport d'ensemble sur les établissements d'instruction, leur succession et leurs rapports.

Le titre d'école élémentaire a été interprété un peu différemment suivant les localités. Cependant, d'une manière générale, dans les Etats de l'Est, les écoles élémentaires comprennent 9 degrés, soit les 9 premières années d'école, ceux du Sud 7, ceux du Nord et de l'Ouest 8.

L'année scolaire est en moyenne de 180 jours, la semaine scolaire de 5 jours et chaque jour scolaire de 5 heures.

Des statistiques établies sur 50 grandes villes américaines ont permis de constater que l'étude de l'arithmétique emploie le 15,26 % du temps de scolarité.

Actuellement il y a tendance, pour le 1er et le 2me degré, à supprimer l'arithmétique comme étude formelle et, pour les degrés supérieurs, à la remplacer par l'algèbre et la géométrie. Pourtant on désigne encore par le nom de mathématiques plus spécialement l'arithmétique.

A côté des sujets essentiels enseignés partout, le programme en comprend d'autres. Par exemple, les intérêts composés sont traités dans 64 % des établissements considérés, l'algèbre dans 36 %, les constructions géométriques dans 28 %, les exercices graphiques dans 7 %.

En ce qui concerne les méthodes d'enseignement, le sous-comité conclut que de grands progrès ont été réalisés en donnant plus d'importance au point de vue psychologique qu'au point de vue logique, ce qui, en pratique, a rendu le travail plus objectif et a développé la méthode d'induction.

Il ressort de statistiques que l'augmentation du nombre des maîtres et maîtresses annuellement nécessaire dépasse de beaucoup le nombre des élèves sortant des écoles qui donnent un enseignement pédagogique ; il n'y a ainsi guère que le 1/5 du corps enseignant qui ait reçu une préparation professionnelle quelconque.

On peut se rendre compte du champ parcouru dans les huit degrés des écoles élémentaires en consultant les deux plans d'études mathématiques insérés dans ce rapport. L'un de ces plans d'études est destiné aux écoles rurales et l'autre aux écoles urbaines. Dans tous les deux, l'étude de l'algèbre et de la géométrie est jointe à celle de l'arithmétique dans les derniers degrés.

Le sous-comité 2 traite de l'enseignement dans les jardins d'enfants, écoles qui reçoivent les enfants de 4 à 6 ans ; elles précèdent donc les écoles élémentaires. L'enseignement mathématique n'y est, bien entendu, représenté que sous une forme implicite ; les connaissances acquises par les enfants dans ce domaine sont le résultat inconscient de leur activité et de leurs jeux.

Le sous-comité 3 consacre 52 pages à l'enseignement mathématique dans les six premiers degrés. Il présente un rapport général, puis quatre rapports distincts traitant respectivement de l'organisation des écoles, du plan d'études mathématiques, des examens et des méthodes d'enseignement. Les renseignements qu'ils renferment sont fréquemment le résultat d'enquêtes faites par la méthode des questionnaires.

Chaque Etat étant maître de l'instruction chez lui, il y a naturellement d'assez grandes divergences d'organisation. Le rôle du « United States

Bureau of Education » est seulement de donner des renseignements et des conseils qui aident à obtenir une certaine unité dans l'esprit de l'enseignement.

Le rapport donne un exposé complet des méthodes en usage ainsi que des changements à y apporter, le tout éclairé par de nombreux exemples.

Le sous-comité 4 résume en quelques pages ce qui concerne la préparation du corps enseignant des six premiers degrés. L'arithmétique ne donne généralement pas lieu à une préparation distincte des autres branches. On exige du maître de mathématiques des connaissances plus étendues que celles du programme qu'il enseignera, mais l'algèbre et la géométrie, par exemple, sont traitées de telle sorte que leur rapport avec l'enseignement et leur utilité dans celui-ci n'apparaît en aucune façon.

Le sous-comité 5 reprend, pour les deux derniers degrés, les mêmes questions que le précédent, et il y ajoute quelques détails complémentaires sur les écoles paroissiales catholiques romaines (parochial schools), ainsi qu'un plan d'études de ces écoles.

En résumé, l'instruction élémentaire est obligatoire et gratuite de 6 à 14 ans. L'enseignement dans les deux derniers degrés est, pour le plus grand nombre des élèves, la fin de leurs études. Un petit nombre continuent dans les écoles supérieures (high schools). La plus ou moins grande proportion des élèves visant l'un ou l'autre but détermine des programmes assez différents dans lesquels on peut distinguer, pour les mathématiques, deux courants : ceux qui n'indiquent ni la géométrie ni l'algèbre, et ceux qui leur font une place.

On tend de plus en plus à enseigner ces deux branches en appuyant sur leurs rapports avec l'arithmétique.

Le sous-comité 6 étudie la question de la préparation des maîtres pour les 7me et 8me degrés. Les élèves des écoles normales ont généralement accès aux cours mathématiques des collèges et universités. Le programme mathématique de ces écoles varie beaucoup ; il est généralement au moins égal à celui des « high schools ».

Le comité no II s'est occupé des écoles élementaires spéciales, écoles de métier et écoles industrielles. Ces écoles peuvent être considérées soit comme des écoles élémentaires spéciales, soit aussi comme des écoles secondaires, puisque, pour l'admission dans la plupart d'entre elles, les élèves doivent justifier d'un minimum d'instruction équivalent aux six premiers degrés élémentaires.

Le programme mathématique de ces diverses écoles varie naturellement en étendue suivant le but qu'elles se proposent. Il donne toujours une place prépondérante à la partie pratique des mathématiques, au détriment de la théorie.

Ces différentes écoles spéciales peuvent se classer en :

1o Ecoles intermédiaires industrielles et écoles de métiers, qui prennent les élèves à leur sortie du 6me degré. Les études mathématiques proprement dites y jouent un rôle plutôt effacé.

2o Ecoles de métiers publiques et privées.

3o Ecoles techniques. Leur programme mathématique comporte les études nécessaires au futur contremaître ou mécanicien-chef.

4o Ecoles d'apprentissage. L'enseignement théorique y est étroitement lié à la pratique.

5o Ecoles du soir.

6° Ecoles complémentaires.

7° Ecoles de métiers pour races de couleur. L'arithmétique, l'algèbre et la géométrie y sont enseignées.

8° Ecoles par correspondance.

Deux sous-comités étudient plus spécialement : l'un, les classes industrielles des écoles publiques, l'autre, celles des écoles privées ou corporatives. Dans ces classes on tend de plus en plus à obtenir la fusion des mathématiques théoriques et des travaux manuels et industriels.

On est en général d'accord pour faire précéder l'enseignement de la géométrie déductive par l'algèbre, et l'algèbre par de la géométrie intuitive. Le programme d'arithmétique, d'algèbre, de géométrie et de trigonométrie des écoles privées et corporatives est en général sensiblement le même que celui des écoles ordinaires.

Un troisième sous-comité rapporte sur la question de la préparation des maîtres de mathématiques des écoles de métiers et des écoles industrielles. Les écoles normales ont toutes des cours de mathématiques appliquées, et presque toutes des cours de mathématiques théoriques. L'opinion la plus répandue est que pour le moment, après l'acquisition d'une première base théorique, la meilleure préparation des maîtres s'obtient par plusieurs années de pratique dans l'application des mathématiques aux problèmes qui se présentent à l'atelier.

R. Masson (Genève).

ILES BRITANNIQUES

N° 6. — La corrélation de la géométrie pratique élémentaire et de la géographie.

The Correlation of Elementary Practical Geometry and Geography[1], by Miss Helen Bartram, Head Mistress of the (London) County Secondary School, St-Pancras. — La géométrie pratique étant devenue une partie si importante des mathématiques élémentaires dans les écoles élémentaires et moyennes, il est intéressant d'en étudier les rapports avec les autres branches du programme. Dans ce rapport, l'auteur étudie comment cette géométrie élémentaire peut servir de base à l'enseignement de la géographie scientifique qu'on peut introduire à l'école pour élèves de douze ans et demi environ.

Mesure de lignes. Dès que la notion d'unité de longueur est connue, on peut l'utiliser à la mesure de la distance entre deux villes sur une carte. On arrivera le plus rapidement possible à l'idée de l'échelle et par suite à la détermination de la distance réelle. L'utilisation des horaires de chemin de fer présentera aussi un certain intérêt pour la vérification approximative des résultats.

C'est aussi le moment d'apprendre aux élèves à évaluer grossièrement une longueur donnée, par exemple en connaissant la longueur de leurs pas, ou en se servant d'autres moyens de comparaison. On leur fera mesurer la plus courte distance de deux points d'une sphère à l'aide d'un fil tendu et on leur expliquera pourquoi un vaisseau ne suit pas toujours cette ligne de

[1] 8 pages ; prix : 1 penny, Wyman & Sons, Londres.

plus courte distance. Ils pourront enfin déterminer la longueur d'une ligne courbe et irrégulière quelconque à l'aide d'une roue traçant le contour (tracing wheel), ils se rendront compte ainsi de la longueur de frontière ou de côte d'un pays.

Mesure des angles. On étudiera les divisions de la boussole à l'aide d'un rapporteur en carton construit par les élèves eux-mêmes. On pourra leur faire construire une boussole en carton à l'aide de laquelle ils auront à déterminer les directions suivies pour aller de la maison à l'école ou inversement.

Construction de cartes. Dès que l'évaluation des longueurs et des angles est bien comprise, on peut l'appliquer à la construction de cartes, très simples d'abord. L'élève apprendra à déterminer la direction du sud, soit en trouvant la position du soleil à midi, soit à l'aide de la boussole marine. En se plaçant ensuite dans un endroit élevé et horizontal, il pourra dresser une carte, ou plutôt un panorama des objets environnants, en ne s'occupant que des directions.

Comme exemple de combinaison de mesures linéaires et angulaires, le dessin à l'échelle de la classe ou du lieu de récréation est tout indiqué. On insistera sur le fait que la réduction à l'échelle ne modifie pas les angles. On pourra également introduire d'autres méthodes de construction de cartes (triangulation, arpentage) et imaginer des problèmes variés sur ce sujet. La direction du vent offre une nouvelle application des mesures angulaires. Au besoin les élèves pourront eux-mêmes construire une girouette. Signalons encore la détermination des hauteurs à l'aide d'une base et d'un angle d'élévation.

Pente. On expliquera la notion de pente aux élèves qui pourront, à l'aide d'un simple clinomètre en carton, construit par eux-mêmes, déterminer la pente des routes voisines.

Lignes de contour. Sachant déterminer les pentes, ils seront plus à même d'apprécier la signification des lignes de contour sur une carte. Ils pourront représenter une coupe de terrain en utilisant, comme on le fait généralement, des échelles différentes pour les distances verticales et horizontales ; il est bon aussi de dessiner la pente réelle, pour une partie de la coupe, pour en avoir une idée correcte.

Construction de cartes à l'aide des ombres. On peut considérer la position d'objets sur la terre relativement au soleil. Par exemple, la direction suivant laquelle un observateur se déplace à midi peut être déterminée par l'angle que forme cette direction avec celle de son ombre. On pourra donc faire une carte du chemin parcouru par l'observateur en se basant sur les modifications apparentes de la direction de l'ombre et en prenant comme unité de distance la longueur du pas. Jusqu'à présent il a été tenu compte uniquement de la direction de l'ombre ; l'opération suivante consistera à montrer comment la longueur de l'ombre varie avec la longueur de l'objet et aussi avec la hauteur du soleil au-dessus de l'horizon. Les élèves pourront alors calculer la hauteur d'objets inaccessibles par l'observation de la longueur de leurs ombres. On mesurera (1) la longueur de l'ombre d'un bâton d'un mètre toutes les demi-heures dans une même journée, (2) la longueur de l'ombre à midi pendant une année ; les graphiques correspondants occasionneront d'utiles observations sur les jours et les nuits et sur les saisons.

Aires. Un papier quadrillé, chaque carré représentant une unité de sur-

face, pourra servir à estimer grossièrement la superficie d'un pays, ou mieux, à comparer les superficies de deux pays représentés à la même échelle. On fera remarquer que lorsqu'on réduit l'unité de longueur à sa dixième partie, par exemple, l'unité de surface est réduite à sa centième partie.

Géométrie sphérique. Des considérations sur les propriétés des cercles peuvent être déduites de l'observation d'une sphère. On peut faire construire aux élèves un modèle comprenant le cercle de l'équateur et un certain nombre de cercles méridiens, le tout fixé et donnant l'apparence d'une sphère. On pourra y joindre les cercles des tropiques et les cercles polaires.

Latitude et longitude. Le modèle en question pourra servir avantageusement pour expliquer les termes de latitude et longitude. On remarquera que la longueur à parcourir sur la terre, parallèlement à l'équateur, pour que la longitude varie de un degré, décroît lorsqu'on se rapproche des pôles, tandis que la longueur dont on doit se déplacer le long d'un méridien pour que la latitude varie de un degré est constante (si l'on ne tient pas compte de l'aplatissement des pôles). Ces longueurs peuvent être mesurées approximativement en utilisant le grand globe de la classe. On déterminera ensuite la position d'un point de la terre par sa latitude et sa longitude. On expliquera plus aisément par une expérience concrète la rotation de la terre sur elle-même et sa révolution autour du soleil ainsi que toutes les conséquences qui en résultent relativement aux saisons, aux jours et aux nuits, aux heures des différents points du globe, etc.

N° 7. — L'enseignement de la mécanique élémentaire.

The Teaching of Elementary Mechanics[1], by Mr. W. D. Eggar, Assistant Master at Eton College. — Pendant longtemps les côtés pratique et théorique de la mécanique se sont développés indépendamment l'un de l'autre. Ils ne se sont réunis que récemment, et c'est à cette réunion qu'est due l'importance croissante de la mécanique considérée comme branche scolaire.

La préparation des ingénieurs se fait dans les collèges d'ingénieurs (Engineering Colleges) et les écoles techniques (Technical Institutions), mais beaucoup de ces établissements exigent un examen d'entrée comprenant entre autres la mécanique élémentaire.

L'enseignement pratique de la mécanique dans les écoles est de création presque entièrement nouvelle. Actuellement on trouve des laboratoires de physique dans un grand nombre d'écoles, et l'on y pratique également un peu de mécanique. Mais, même à l'heure qu'il est, il y a très peu de relations entre l'enseignement de la mécanique pratique et celui des mathématiques. Dans la grande majorité des écoles[2], la mécanique est enseignée par le maître de mathématiques, comme une partie du programme des mathématiques. Aucune expérience n'est faite, et les difficultés pratiques ne sont que très rarement mentionnées. Le maître de sciences est obligé d'organiser un cours rapide de mécanique pratique pour les plus jeunes de ses élèves afin qu'ils soient à même de le comprendre dans ses autres leçons.

[1] 13 p.; prix : 1 penny.

[2] The Correlation of Mathematical and Science Teaching. Report of a Joint Committee of the Mathematical Association and the Association of Public School Science Masters. (London, G. Bell and Sons, 1909.)

Les principaux défauts de cette organisation sont les suivants :

1. Le cours très rapide de statique pratique que le maître de physique doit donner comme préparation à l'étude du magnétisme et de l'électricité n'a aucune relation avec l'enseignement des mathématiques.

2. Non seulement les élèves en mathématiques ne participent souvent même pas à ce cours rapide, mais ils n'ont que peu d'occasions d'élargir leurs connaissances pratiques dans les domaines plus avancés de la mécanique.

La question de savoir si la mécanique doit être considérée comme une partie des mathématiques ou comme une partie de la physique ne rentre pas dans le cadre du présent rapport. Au Central Technical College, établissement servant à la préparation des ingénieurs, le laboratoire de mécanique est placé sous le contrôle direct du professeur de mathématiques ; il est complètement séparé des laboratoires d'ingénieurs que les étudiants suivent plus tard.

Avant de considérer les « public schools » proprement dites, citons encore les « Naval Colleges » à Osborn et Dartmouth pour élèves de 12 ½ à 16 ½ ans, se destinant à la carrière d'officiers de marine. A Osborne où se passent les deux premières années, les cadets commencent la trigonométrie et ont un cours de statique pratique suivi d'une étude théorique plus détaillée du sujet. A Dartmouth, pendant la seconde période de deux ans, les élèves suivent un cours plus complet de statique suivi de la cinématique, le tout étudié inductivement et expérimentalement. Le travail expérimental sert toujours de préliminaire à l'étude théorique.

Dans les écoles publiques ou secondaires, exception faite du cours rapide dont il a été déjà question, la mécanique ne fait pas partie de l'éducation générale de tous les élèves. Cela s'explique par le fait que les mathématiques ne sont généralement pas poussées jusqu'au point où la mécanique est habituellement introduite. Pour que cette branche trouve sa place dans les plans d'études, il serait nécessaire de modifier le programme de mathématiques, simplifier entre autres considérablement l'algèbre et introduire les éléments de trigonométrie. Il faudrait ensuite examiner les questions suivantes : 1° A quel âge le sujet doit-il être abordé ? 2° Quelles sont les relations à la trigonométrie ? 3° Doit-on commencer par la statique ou la cinématique ? 4° Quelle est la quantité de travail pratique désirable au point de vue mathématique ? 5° La nécessité d'un laboratoire.

Nous pourrons diviser les élèves en deux catégories : 1. ceux qui ont une tournure d'esprit pratique sans avoir de capacités spéciales en mathématiques ; 2. ceux qui ont de la facilité pour les mathématiques. La première partie de la discussion qui suit s'adresse plus spécialement à la première catégorie.

Le cours de physique élémentaire comprend généralement la chaleur, la lumière, le magnétisme et l'électricité. Les deux premiers chapitres peuvent se passer de la mécanique, mais pas les deux derniers. Il est donc nécessaire qu'un cours élémentaire de mécanique pratique soit donné avant d'étudier le magnétisme et l'électricité. Mais il vaudrait mieux que ce cours fût dirigé par le maître de mathématiques ou en tout cas avec son concours, afin qu'il serve de base au cours de mécanique pratique proprement dit qui se donne plus tard.

Il est, semble-t-il, préférable de débuter par la statique plutôt que par la cinématique. C'est du reste l'ordre généralement suivi. On commence habituel-

lement par la vérification du parallélogramme des forces, l'étude du triangle, du polygone des forces et de la loi des moments. Or, il serait préférable de débuter par de simples expériences sur la transmissibilité des forces, sur la façon dont on peut les mesurer, sur les tensions et les pressions à l'aide de ressorts et de balances à ressort. Des expériences devraient être faites également sur le principe de l'action et de la réaction, sur la tension des fils, etc. C'est surtout à propos de la théorie des moments que le travail pratique est d'une grande importance. De nombreux exercices sont à faire sur les leviers et sur les diverses conditions d'équilibre des corps. Selon l'opinion de l'auteur, l'étude des forces parallèles devrait suivre celle des moments.

Des expériences directes sur le frottement ne sont pas très avantageuses. Au lieu de l'étudier à l'aide d'un poids et d'un fil passant sur une poulie, il est préférable de se servir d'une balance à ressort. Mais les exercices sur les machines simples seront toujours d'un intérêt plus réel pour les débutants et leur fourniront une conception claire de la notion de travail. La différence entre le travail théorique et le travail réel donne le travail perdu grâce au frottement. Les expériences rendront compte également de l'augmentation du frottement avec la charge de la machine.

En cinématique, si l'on veut suivre l'ordre historique, on débutera par les expériences de Galilée au moyen du plan incliné. Il faut que l'élève se fasse une idée claire des mots espace, vitesse, accélération, il a souvent beaucoup de peine à réaliser que ces grandeurs sont mesurées à l'aide d'unités différentes. La notion de vitesse à un instant donné se prête particulièrement bien à l'introduction du calcul différentiel. Vient ensuite la notion d'accélération ou de changement de vitesse qui fournira l'occasion de nombreux exercices à l'aide de papier quadrillé. L'étude des accélérations produites par les forces peut se faire facilement à l'aide d'un appareil inventé par M. W.-C. Fletcher. Une bande d'acier maintenue à l'une de ses extrémités est mise en vibration, et les oscillations sont enregistrées sur une bande de papier mise en mouvement par le moyen d'une certaine force. Les vibrations enregistrées seront plus ou moins espacées suivant la vitesse de la bande de papier, et il sera facile d'étudier les lois concernant les forces et les accélérations correspondantes. Citons encore les expériences sur les moments et les moments angulaires, la transformation de l'énergie potentielle en énergie cinétique, l'énergie d'un volant, le mouvement harmonique simple illustré par les oscillations d'un ressort spiral, le pendule, le module de Young, le module de torsion, etc.

Le temps qui doit être consacré aux exercices pratiques varie suivant les élèves. Les bons mathématiciens saisiront plus rapidement la portée des expériences que les élèves peu doués en mathématiques.

En ce qui concerne la question du laboratoire, remarquons que la démonstration de la plupart des expériences citées peut se faire dans la salle de classe habituelle, et que les appareils nécessaires peuvent y trouver place facilement. Cependant, pour les classes nombreuses, un laboratoire spécial est de toute nécessité. Les dépenses qu'exigerait son installation constituent pour beaucoup une sérieuse objection ; mais il ne faut pas oublier qu'un bon appareil de mécanique dure très longtemps et que son entretien est fort peu coûteux.

N° 8. — Géométrie pour ingénieurs

Geometry for Ingeneers [1] by D. A. Low, Professor of Engineering at the East London College (University of London). — La géométrie est pour les ingénieurs une des branches les plus importantes des mathématiques. Elle constitue en effet la base du dessin mécanique sans lequel les grandes entreprises des ingénieurs ne pourraient être réalisées. Il est donc intéressant de se demander quels sont les chapitres de la géométrie qui concernent plus spécialement les étudiants qui se destinent à cette carrière, et comment cet enseignement doit leur être présenté.

Insistons tout d'abord sur l'importance du dessin mécanique qui devrait accompagner dès le début l'étude des principes géométriques. Par dessin mécanique nous n'entendons pas dessin de machine, mais dessin de figures géométriques et la résolution de problèmes de géométrie sur le papier, à l'aide des instruments. Il est nécessaire d'exiger dès le début, la plus grande exactitude possible ; l'étudiant s'exercera tout d'abord à de nombreux exemples très simples au point de vue géométrique, ayant uniquement pour but de développer son habileté dans le maniement des instruments. Ces exercices, 1° lui serviront de préparation à ses futurs dessins d'ingénieur, 2° le familiariseront avec d'importantes propositions de géométrie, 3° le rendront capable de vérifier certaines propositions qu'il n'a peut-être pas le temps ou la capacité de démontrer rigoureusement par un raisonnement déductif.

A propos de l'enseignement de la géométrie élémentaire, l'auteur recommande aux maîtres de lire soigneusement la « Circular 711 » du Board of Education, intitulée « *Teaching of Geometry and Graphic Algebra in Secondary Schools* » et reproduite dans l'*Enseignement mathématique* (N° du 15 mai, 1910, p. 238-253). Les propositions qui y sont faites sont excellentes

L'auteur insiste sur l'importance que présente la résolution des problèmes de géométrie. C'est un genre d'exercices très avantageux pour développer les facultés inventives des étudiants ; les démonstrations devront être confirmées autant que possible graphiquement et les principes de géométrie trouveront de nombreuses applications.

A partir du cinquième livre d'Euclide, on ne devrait pas exiger la démonstration rigoureuse de toutes les propositions qui interviennent : en tous cas ces démonstrations devront être abrégées autant que possible, quelquefois même, il sera suffisant de se borner à une vérification graphique. Il serait bon d'introduire aussi l'arithmétique graphique, comprenant l'addition, la soustraction, les proportions, la multiplication, la division et les racines carrées.

De nombreux problèmes de géométrie peuvent se résoudre aisément à l'aide de lieux géométriques. Ce procédé peut être plus rapide et tout aussi exact qu'une résolution directe. Dans certains cas, l'usage du papier à calquer est tout indiqué. Cette méthode présente un intérêt tout particulier pour l'ingénieur, car elle est rapide et évite l'emploi d'un grand nombre de lignes de construction qui rendent souvent la figure confuse. On l'utilisera

---

[1] 15 p., Prix : 1 1/2 d. ; Wyman & Sons, Londres.

par exemple pour le tracé des roulettes (cycloïde, hypocycloïde, épicycloïde, développante de cercle) si important pour les ingénieurs.

On introduira de bonne heure les principes et les méthodes de la géométrie vectorielle qui s'appliqueront aux problèmes de cinématique et de statique.

Insistons également sur l'étude géométrique des sections coniques qui fournira de nombreuses applications au dessin géométrique (construction d'une conique connaissant le foyer, la directrice et l'excentricité). L'étude systématique des propriétés des coniques pourra se faire comme suit : Propriétés générales des coniques. Propriétés de la parabole. Construction de la parabole. Propriétés générales des coniques à centre. Propriétés de l'ellipse. Construction de l'ellipse. Propriétés de l'hyperbole. Construction de l'hyperbole. Centre de courbure en un point d'une conique. Développées des coniques. Pour l'étudiant ingénieur il suffira de ne considérer que les théorèmes les plus importants. Certaines propriétés de l'ellipse se démontreront en considérant cette courbe comme projection d'un cercle.

L'auteur estime que les théories projectives modernes (involution, rapport anharmonique, etc.) n'ont pas encore été mises sous une forme leur permettant de remplacer avantageusement une étude géométrique détaillée des coniques.

Après les coniques, il serait intéressant de considérer brièvement les principales propriétés de diverses courbes planes (spirale d'Archimède, spirale logarithmique, chaînette, tractrice, etc.).

Le cours de géométrie descriptive devrait débuter par les projections orthogonales de points et de lignes sur les deux plans de projection (horizontal et vertical) et les problèmes qui s'y rattachent. On passerait ensuite à la représentation des solides, en projections orthogonales d'abord, puis en projections obliques. Ce dernier procédé est spécialement important pour les ingénieurs et l'on devrait y insister davantage. Il est inutile en général de s'arrêter aux démonstrations rigoureuses des théorèmes qui servent de base aux diverses constructions de la géométrie descriptive, mais il est essentiel néanmoins que ces principes soient bien compris. Les chapitres de cette branche qui présentent ensuite le plus d'importance pour les ingénieurs sont les suivants : Sections de solides. Projection horizontale d'une portion de la surface terrestre et problèmes de coupes et de terrassements. Génération de surfaces courbes. Plans tangents aux surfaces courbes. Développement de surfaces. Projection d'hélices et de filets de vis. Intersection de surfaces. La perspective, la projection isométrique et la détermination des ombres sont moins importantes sauf à titre d'applications des principes et méthodes de la géométrie descriptive. Les exemples à traiter ne doivent pas être de caractère essentiellement technique car avant de se spécialiser il est nécessaire de posséder une base générale suffisante.

En terminant, l'auteur insiste sur l'importance du dessin mécanique dans l'étude de la géométrie. Il reconnaît du reste que de louables efforts ont été faits dans ce sens, spécialement par le Board of Education.

N° 9. — Ecoles secondaires de jeunes filles

The organisation of the Teaching of Mathematics in Public Secondary Schools for Girls[1], by Miss Louisa Story, Headmistress of the Royal School,

Bath. — En 1867 parut un rapport de la *Schools' Inquiry Commission* condamnant la superficialité et l'insuffisance de l'éducation dans les écoles de filles. Il en résulta, quatre ans plus tard, la fondation de la « National Union for improving the Education of Women of all Classes » qui organisa, l'année suivante, la Girls' Public Day School Company. Pour la première fois les mathématiques furent reconnues comme sujet d'étude dans le programme des écoles de filles, à commencer par les High Schools qui se développèrent rapidement dans tout le royaume, grâce à l'activité de cette société.

Tout d'abord les difficultés furent nombreuses, étant donné l'incapacité des maîtres ; du reste le champ d'études était très peu considérable : une teinture d'arithmétique et d'algèbre et quelques livres d'Euclide appris plus ou moins par cœur.

A l'heure actuelle, les mathématiques sont enseignées, d'une manière remarquablement uniforme en ce qui concerne les programmes et les méthodes, dans toutes les écoles secondaires publiques de jeunes filles et dans les meilleures écoles privées.

Pour obtenir des renseignements concernant le présent rapport, des circulaires furent envoyées aux directrices de 275 écoles. 180 réponses furent retournées, renfermant d'utiles informations.

Les écoles secondaires de filles adoptent en général la classification suivante :

Classes préparatoires (Kindergarten)	pour enfants de	5	à	7 ou 8 ans
Form I	» »	7 ou 8	—	10
Form II	» »	10	—	12
Form III	pour filles de	12	—	14
Form IV	» »	14	—	15 1/2
Form V	» »	15 1/2	—	17
Form VI	» »	17	—	19

Dans la majorité des écoles, chaque classe est sous la surveillance spéciale d'une maîtresse de classe (Form-mistress) qui enseigne dans sa propre classe un certain nombre de branches et dans d'autres classes le sujet qui constitue sa spécialité.

Dans les 180 écoles qui ont envoyé des réponses aux circulaires, on ne compte pas moins de 681 maîtresses enseignant les mathématiques. Dans chaque école, la principale maîtresse dans cette branche (Senior Mathematical Mistress) est chargée de l'enseignement des classes supérieures, quelquefois aussi des débutants ; elle doit surveiller également l'enseignement mathématique de toute l'école et possède un certificat de hautes études.

Dans la grande majorité de ces écoles (98 %), le champ d'études correspond à celui qui est exigé à l'entrée de l'université (Matriculation) et comprend : l'arithmétique générale ; l'algèbre, comprenant les équations du premier et du second degré à une ou deux inconnues, les rapports et les proportions, les règles élémentaires concernant les puissances, et les progressions ; les livres I à IV d'Euclide d'après les méthodes modernes. 84 % des écoles dépassent ce programme (logarithmes, binôme, Euclide VI

[1] 17 p. : 1 1/2 d. : Wymann & Sons, Londres.

et XI 1-2), trigonométrie élémentaire). Un petit nombre vont encore plus loin [mathématiques appliquées (statique, dynamique, hydrostatique), coordonnées géographiques, géométrie plane moderne, sections coniques, et à l'occasion les éléments du calcul différentiel et intégral], mais c'est l'exception.

L'époque où l'on commence les mathématiques proprement dites (d'autres branches que l'arithmétique) diffère suivant les écoles. Dans la majorité c'est dans la Form III. A partir de cette époque, l'arithmétique, l'algèbre et la géométrie sont enseignées simultanément et non pas consécutivement comme en Amérique, et récemment des tentatives de fusionnement des trois branches ont été faites.

L'arithmétique est enseignée dès les premières classes jusqu'à la Form V inférieure en tous cas. Quelques écoles l'abandonnent dans la Form V supérieure, mais la majorité la maintiennent jusqu'à la Form VI. Pour l'entrée à Cambridge et à Oxford, un des examens est encore spécialement réservé à l'arithmétique, cela explique en partie le grand nombre d'années dévolues à l'arithmétique dans les écoles anglaises. Une autre raison, c'est la grande complication du système des poids et mesures. On pourrait économiser deux années d'étude en adoptant le système métrique qu'on enseigne du reste, à l'heure qu'il est, en plus du système anglais. Une autre question à l'ordre du jour, c'est celle de l'arithmétique commerciale ; bien des maîtres estiment que nombre de chapitres présentant un caractère purement commercial devraient être éliminés du programme. De grands progrès ont été réalisés dernièrement dans les méthodes de l'enseignement des fractions décimales : signalons aussi l'introduction déjà dans les classes inférieures des méthodes abrégées donnant des résultats approximatifs. On peut se demander cependant s'il ne serait pas plus simple, dans le cas d'opérations compliquées, d'introduire l'usage des logarithmes à 4 décimales.

En ce qui concerne l'algèbre, il faut reconnaître que beaucoup de temps est consacré à l'étude de sujets qui n'ont de l'intérêt que pour le futur mathématicien, mais qu'il faudrait laisser de côté lorsqu'il s'agit de culture générale [facteurs et fractions de certains types inusités, racines (excepté l'évaluation des racines arithmétiques), imaginaires, trinôme du second degré]. Par contre certains côtés présentant une plus grande valeur éducative pourraient être développés (mécanique, mesure, stéréométrie, calcul infinitésimal, trigonométrie numérique). Les méthodes graphiques sont actuellement d'un usage continuel dans les écoles de filles. Remarquons enfin les progrès réalisés par certains manuels dans le choix de leurs exercices qui sont moins artificiels et plus pratiques.

En géométrie, le mouvement en faveur de l'abandon des méthodes purement euclidiennes n'a commencé que depuis une quinzaine d'années. Dans un grand nombre d'écoles, la première année de géométrie (généralement la Form III) consiste en un travail pratique conduisant à la découverte des principales vérités géométriques. Conformément à certaines idées émises par le Board of Education, on a essayé dans quelques écoles de commencer la géométrie théorique en établissant les propositions fondamentales et en les appliquant à de nombreux exercices. On n'envisage pas les démonstrations rigoureuses qui sont déplacées lorsqu'il s'agit de débutants. Il n'est pas encore possible de juger de l'efficacité de cette méthode qui n'en est qu'à sa période expérimentale.

Dans quelques écoles la trigonométrie est commencée dans la Form V

supérieure, mais dans la majorité elle n'apparait que dans la Form VI ou est même complètement exclue du programme.

Quelques écoles enseignent également les mathématiques appliquées, quelques-unes ont même un laboratoire à leur disposition.

Au sujet de la corrélation des mathématiques avec d'autres branches, on trouvera d'intéressantes propositions dans un rapport du « Joint Committee of the Mathematical Association and the Association of Public School Science Masters » intitulé « The Correlation of Mathematical and Science Teaching ».

Le système des examens est assez compliqué. On peut cependant adopter approximativement la classification suivante : 1. Examens scolaires qui ont lieu à certains intervalles durant la période scolaire. 2. Examens d'entrée aux universités. 3. Scholarships et autres examens plus avancés.

Il ne nous est pas possible, dans ce bref résumé, d'entrer dans les détails concernant ces divers examens. Constatons simplement qu'une simplification du système complet s'impose et qu'il reste encore bien à faire pour placer l'enseignement mathématique sur une meilleure base pédagogique.

J.-P. Dumur (Genève).

ITALIE

L'enseignement mathématique dans les Ecoles classiques.

I. — *Les différents programmes de 1867 à 1910.*

L'insegnamento della matematica nelle scuole classiche. Relazione di U. Scarpis, prof. nel R. Liceo Minghetti di Bologna. — C'est en 1867 que furent publiés pour la première fois des règlements applicables à toutes les écoles d'Italie, et des programmes pour toutes les branches d'enseignement.

Dans les programmes de mathématiques on reconnaît immédiatement l'esprit clair et profond de Betti et de Brioschi.

Ils font commencer l'étude des mathématiques au 5e cours de gymnase par le Ier livre d'Euclide et l'arithmétique rationnelle des nombres entiers et des fractions avec un horaire de 5 heures par semaine.

Le Ier cours de lycée avec 6 heures hebdomadaires comporte les 2e et 3e livres d'Euclide, la théorie de la racine carrée et les nombres incommensurables puis les éléments de l'algèbre, jusqu'au calcul des radicaux.

Au cours suivant il s'agit d'étudier à raison de 7 heures et demie par semaine les livres 4e, 5e, 6e, 11e et 12e d'Euclide, et la théorie de la mesure. Les proportions, les équations du 1er et du 2e degré, les progressions; enfin les éléments de trigonométrie.

Les inconvénients de cette curieuse répartition des études de mathématiques dans trois seulement des huit cours classiques se révélèrent bien vite. En 1869 déjà on recommande d'introduire au 3e cours du lycée des heures supplémentaires de mathématiques.

Le nouvel horaire de 1870 introduit une heure d'arithmétique pratique dans chacun des 3 cours du gymnase inférieur, et 3 heures dans les 2 cours supérieurs. En 2e cours du lycée il n'y a plus que 6 heures, mais le 3e cours se voit attribuer 1 h. et demie pour permettre des exercices de récapitula-

tion. Les 6 premiers livres d'Euclide restent obligatoires, mais il devient facultatif de recourir à un auteur moderne pour la stéréométrie.

Les examens de mathématiques comprenant une partie orale et une partie écrite deviennent obligatoires pour chaque élève dans les 8 cours d'études, le choix du sujet est laissé aux maîtres pour les examens de promotions, mais le Ministère de l'Instruction l'impose pour l'examen final de *licenza liceale*.

L'insuffisance de l'enseignement au gymnase inférieur rendait la tâche bien difficile aux maîtres du gymnase supérieur et du lycée qui considéraient le thème de l'examen final comme une épée de Damoclès. Les choses marchèrent cependant sans trop fortes secousses jusqu'en 1878.

Le sujet de l'examen final, session de juillet, ayant été :

« Trouver la relation qui doit exister entre p, q, p_1, q_1, pour que les 2 équations $x^2 + px + q = 0$ et $x^2 + p_1x + q_1 = 0$ aient une racine commune », il en résulta une véritable débâcle ; dans certaines villes, aucun candidat ne fut reçu !

La presse s'émut, le Parlement entendit des échos de l'aventure et en avril 1879 le ministre Coppino charge une commission spéciale de présenter des propositions susceptibles d'obvier aux inconvénients constatés sans diminuer l'importance des mathématiques dans l'enseignement des lycées.

Après la chute du ministre Coppino et avec l'arrivée au pouvoir de son successeur Baccelli, commence une période où les mathématiques perdent de leur importance dans les écoles classiques.

Le ministre Baccelli introduit la géométrie intuitive et le dessin géométrique au gymnase inférieur, ne laissant que l'arithmétique pratique au gymnase supérieur. Il restreint les programmes du lycée et introduit l'horaire suivant : gymnase inférieur 2 heures, gymnase supérieur 1 heure et au lycée 1[er] cours 5 heures, 2[e] cours 4 heures et 3[e] cours 3 heures par semaine.

Plus d'épreuve écrite aux examens de promotions, et le sujet de l'examen final n'est plus imposé par le Ministère, mais improvisé, quelques minutes avant la séance, par le maître en présence de toute la commission sur un sujet qu'on détermine en ouvrant un livre au hasard !

Les résultats de ce système ne furent pas heureux. La commission supérieure pour l'examen des travaux écrits émet chaque année de nouvelles plaintes.

Un nouveau règlement vient en 1884 donner le droit au Ministère de remplacer l'épreuve écrite de mathématique par un travail de physique ou de quelque autre science, mais les rapports ne cessent d'être lamentables.

En 1888 le Ministre donne aux candidats le droit de choisir entre une épreuve écrite de grec ou une de mathématique. L'horaire est du même coup réduit à 2 heures par semaine au gymnase et 3 heures au lycée.

Les candidats qui, durant les années suivantes, optent pour l'examen de mathématique, sont très peu nombreux (environ 10 %), mais les examens sont plus satisfaisants que par le passé.

En 1889 la commission supérieure, constatant la déchéance où l'absence de sanction menace de jeter l'enseignement des mathématiques, conjure les autorités d'introduire de nouveau un contrôle suffisant sous forme d'examens obligatoires, si bien qu'en 1892 le ministre Villari rétablit l'épreuve écrite obligatoire. Mais l'année suivante déjà le ministre Martini la supprime dans tous les cours, restreint l'horaire et même les programmes.

Dès 1893 l'enseignement des mathématiques dans toutes les écoles clas-

siques décline, surtout lorsqu'apparaît une distinction entre matières d'enseignement *essentielles* et *secondaires* qui place les mathématiques dans la 2e catégorie.

Le danger de ce lent travail de démolition suscita la société « Mathesis », créée en 1896 dans le but de défendre auprès du public l'enseignement mathématique, mais il n'était plus possible de revenir à l'ancien état de choses ; de bons efforts aboutirent à une modification des programmes en 1901.

Une partie du programme lycéen (l'équivalent des 4 premiers livres d'Euclide) est avancé et prend place dans le programme du gymnase supérieur. Le 1er cours du lycée obtient 4 heures, le 2e cours 3 heures, le 3e cours 2 heures par semaine.

Les programmes fusionnent l'enseignement de la géométrie plane et de la stéréométrie.

La situation ne se trouvait nullement améliorée lorsqu'en 1904 surgit à l'improviste le décret Orlando suivant lequel les élèves ont à opter entre le grec et les mathématiques à la fin de la 1re année de lycée.

Nous voyons combien l'idée de l'efficacité éducative des mathématiques a perdu de terrain auprès des législateurs qui se sont succédés durant ces 30 dernières années. Il faut souhaiter que l'enseignement des mathématiques réussisse à augmenter son prestige auprès du public en lui donnant la conviction de son utilité, non seulement pratique, mais surtout parce qu'il donne une saine éducation philosophique capable de concilier les sentiments les plus délicats de tolérance et les plus audacieuses aspirations du progrès.

II. — *Critiques et Propositions.*

L'insegnamento delle Matematiche nelle scuola classiche. II. Critiche e proposte. — Relazione di G. Fazzari, prof. nel R. Liceo Umberto I di Palermo. — Les maitres enseignant les mathématiques dans les écoles moyennes ont constitué en 1895 la société *Mathesis* dans le but de perfectionner l'enseignement au point de vue scientifique et didactique ; son conseil directeur proposa aux membres diverses questions qui furent discutées en séances partielles dans différentes villes d'Italie et au congrès de Turin en 1898.

Le ministre Gallo s'est adressé à la *Mathesis* au moment de déterminer les nouveaux programmes de mathématiques, établis par décret d'octobre 1900.

Ces programmes ajoutent, pour le gymnase inférieur, à l'arithmétique pratique, quelques notions intuitives de géométrie et des éléments de dessin géométrique. Ils retardent la théorie des nombres premiers, de la divisibilité, des fractions périodiques du gymnase supérieur à la 3me année de lycée, mais laissent en quatrième les opérations sur les nombres entiers, le plus grand commun diviseur et le plus petit commun multiple et, en cinquième les fractions.

L'enseignement de la géométrie rationnelle est attribué pour les trois premiers livres d'Euclide aux deux classes du gymnase supérieur, et pour le reste, dans les limites des anciens programmes aux deux premières classes du lycée.

L'algèbre est répartie entre les trois classes du lycée ; en 3me année on trouve les nombres irrationnels, les progressions, les logarithmes.

La trigonométrie rectiligne est enseignée en 3me année.

Ces programmes qui peuvent satisfaire ceux qui considèrent l'enseignement des mathématiques dans les écoles classiques comme un moyen de culture générale, comme une gymnastique intellectuelle ne permettent guère aux maîtres la vie dans l'enseignement en montrant par de nombreuses applications que les mathématiques servent à d'intéressantes recherches d'ordre pratique.

Le professeur Bettazzi a exposé dans une note « Les applications des mathématiques [1] » quelques sujets qui pourraient être introduits à l'école, par exemple : Représentation graphique de nombres irrationnels. — Développement de polyèdres ; — Réduction de dessins à des échelles données ; — Détermination de la hauteur d'un édifice ; — Problèmes sur les cartes topographiques, distances, etc. ; — Usage du pantographe ; — Courbes représentant graphiquement certains phénomènes, etc.

Dans la pratique scolaire de grosses difficultés s'opposent à la réalisation de ces intentions intéressantes : les horaires trop restreints, la préparation insuffisante des élèves qui en arrivant dans les classes supérieures ont trop oublié des connaissances acquises antérieurement, etc.

Une des plus importantes d'entre les questions de méthode d'enseignement soumises à la discussion de ses membres par la société *Mathesis*, est l'opportunité de la fusion de la géométrie élémentaire.

Au congrès de Turin les membres convinrent d'entendre par fusion la méthode didactique qui consiste à étudier simultanément, dès le commencement, les question affines de la géométrie plane et de stéréométrie, pour appliquer ensuite les méthodes de l'une ou de l'autre afin d'en tirer le plus d'avantages possible.

Les professeurs secondaires se divisèrent en deux camps, pour et contre la fusion, malgré la défense enthousiaste du professeur De Amicis intitulée : *Pro-fusione*. Le Congrès demanda que les programmes soient modifiés de manière à laisser aux maîtres le libre choix entre la méthode séparatiste et la méthode fusionniste.

Les programmes de 1900 permettent de suivre la méthode fusionniste dès la 1re année du lycée, c'est-à-dire après que les élèves aient étudié les trois premiers livres d'Euclide, conformément à la méthode utilisée par Veronese dans ses *Eléments de Géométrie*.

Au congrès de Livourne en 1901 la discussion se termina en proclamant la nécessité d'introduire dans tous les examens une épreuve écrite de mathématique afin d'obtenir des élèves plus de travail et plus d'intérêt. Ce serait le moyen de mettre fin à l'abaissement de niveau de la culture mathématique chez les jeunes gens qui passent des lycées aux facultés de sciences, abaissement dénoncé de toutes parts, sans que les causes en soient bien comprises.

Le peu de profit que les élèves retirent de l'enseignement des mathématiques fut aussi le sujet de multiples discussions.

Le Ministre Léonardo Bianchi comprit qu'on n'y pourrait pas remédier par quelques retouches de détail, mais qu'une réorganisation profonde de l'école moyenne s'imposait, il désigna en 1905 une commission d'hommes de lettres et de sciences pour étudier cette question. La commission a présenté son rapport, et c'est au Ministère et au Parlement que revient le

[1] L'*Ens. math.* 2me année 1900, p. 14-30.

devoir d'en tirer une réforme qui fasse de l'école moyenne un instrument puissant de culture et de progrès.

Au congrès de Naples de la société *Mathesis* en 1903 le professeur Enrico Nannei a présenté un rapport sur les causes du peu de progrès des élèves en mathématiques. Il a dénoncé des causes *générales*, relatives à tous les enseignements : (trop grand nombre d'élèves dans les classes ; — nombre d'heures de leçons par jour trop élevé ; — vacances trop longues ; — changements trop fréquents des dispositions réglementaires ; — changements de maîtres) ; — et des causes *particulières*, relatives seulement à l'enseignement des mathématiques : difficulté particulière du sujet ; — répartition des questions sans tenir compte du degré d'intelligence des élèves, etc.).

Tandis que la société *Mathesis* s'efforçait d'améliorer l'efficacité de l'enseignement mathématique dans les lycées, le décret de 1904 rendait cet enseignement facultatif dans les deux classes supérieures, où les élèves peuvent choisir entre grec et mathématiques. Le congrès de Milan [1] se prononça sévèrement au sujet de cette réforme. En 1906 les maîtres de 113 lycées furent invités à exprimer leur avis à ce sujet : 13 se montrèrent favorables, 28 déclarèrent le temps d'essai trop court pour permettre un jugement, et 72 se prononcèrent contre l'option.

Une question bien discutée par les membres de *Mathesis* est celle de choisir la méthode la plus opportune pour introduire l'étude des proportions.

Les uns sont partisans de la méthode d'Euclide qui sans définir le rapport de deux grandeurs homogènes, introduit le rapport comme notion nouvelle, indépendamment de la notion de nombre fractionnaire ou irrationnel. Les autres après avoir étudié la théorie des nombres irrationnels déduisent l'étude des proportions de la théorie de la mesure.

M. le professeur Loria a répondu à quelques questions discutées dans l'*Enseignement mathématique* [2] et propose l'abolition de la méthode euclidienne. Le rapport se termine par quelques propositions que l'auteur croit susceptibles d'améliorer la situation. Il demande d'augmenter le nombre d'heures de mathématiques au gymnase, de supprimer les examens trimestriels et de rétablir les examens de fin d'année, écrits et oraux.

Il demande de commencer plus tôt l'étude des nombres fractionnaires, de la mesure des figures pour qu'il soit possible d'étudier abondamment la proportionnalité en 2me et 3me année, ainsi que le calcul avec un nombre déterminé de décimales exactes.

En 4me et 5me année, en introduisant les quantités négatives et le calcul littéral on mettrait les élèves en mesure de savoir résoudre les systèmes d'équations linéaires et l'équation du 2me degré à une inconnue. L'arithmétique rationnelle serait retardée pour n'apparaître qu'au lycée, et ferait place aux arrangements, permutations, combinaisons, ce qui permettrait de développer les puissances entières du binôme en 1re du lycée.

Au programme de géométrie du lycée il y aurait lieu d'ajouter la théorie de l'homothétie, de l'inversion ; — en 3me année les éléments de la géométrie analytique cartésienne, la représentation graphique de fonctions.

E. Chatelain (La Chaux-de-Fonds).

---

[1] Voir l'*Ens. math.* 7me année, 1905 ; p. 400-406.
[2] 7me année, 1905. p. 11-20.

BIBLIOGRAPHIE

Hugo Broggi. — **Versicherungsmathematik.** Deutsche Ausgabe. — 1 vol. in-8°, 360 p., br.: 7 Mk.; B. G. Teubner, Leipzig.

Nous avons déjà signalé, en 1908, la traduction française de ce traité des assurances sur la vie. L'édition allemande sera certainement la bienvenue dans un nouveau cercle de lecteurs et tout particulièrement dans l'enseignement supérieur. Elle sera lue avec intérêt par les actuaires qui y trouveront des développements théoriques présentés avec beaucoup de clarté.

L'ouvrage contient de nombreux développements sur le calcul des probabilités, des notions sur la statistique et l'établissement des tables de mortalité, le calcul des primes d'assurances et des réserves, les systèmes de participation des assurances dans les bénéfices, la théorie du risque.

Rédigé par un mathématicien connaissant à la fois les besoins de l'enseignement et ceux de la technique, ce Traité rendra de grands services à ceux qui désirent s'initier à la théorie et à la pratique du Calcul des assurances.

O.-D. Chwolson. — **Traité de Physique,** traduit par Davaux. — Tome III, fasc. 3. *Propriétés des vapeurs. Equilibre des substances en contact.* — 1 vol. in-8° de VI-260 p. avec 93 fig.; 9 fr.; librairie Hermann, Paris.

Le troisième fascicule du tome troisième du *Traité de Physique générale* de M. O. Chwolson s'ouvre par un chapitre sur les propriétés des vapeurs saturantes. L'auteur expose d'abord les mémorables recherches de Regnault interrompues d'une manière si funeste pendant la guerre de 1870, puis, avec la même richesse de documentation que dans les précédents volumes, indique les mesures qui ont été faites depuis et qui se poursuivent encore aujourd'hui.

Dans l'étude des vapeurs non saturantes, l'auteur envisage d'abord les célèbres recherches expérimentales d'Amagat, dont l'étendue et la précision peuvent être justement comparées à celles des travaux de Regnault. L'équation de van der Waals est présentée avec tous les détails nécessaires, ainsi que les nombreuses formules que l'on a proposées depuis pour exprimer plus complètement les données expérimentales. Des représentations graphiques nombreuses, puisées dans les travaux originaux d'Amagat, illustrent très heureusement tout ce chapitre.

Parmi les nombreuses questions qui appartiennent au vaste domaine de la Chimie physique, l'auteur a choisi avec raison, comme devant faire partie d'une exposition générale de la Physique, la belle théorie de l'équilibre des substances en contact qui a été créée par Gibbs; nulle question ne pouvait en effet mieux donner une idée de la puissance de la Thermodynamique moderne.

Dans un paragraphe final, ajouté au texte de l'auteur, les lois du déplacement de l'équilibre thermodynamique, dont l'étude a été récemment reprise par MM. Ehrenfest et C. Raveau, sont rattachées aux importantes considérations mécaniques de M. H. Poincaré sur les analogies hydrodynamiques bien connues, par lesquelles Lord Kelvin a proposé d'expliquer les attractions électrodynamiques.

F. G.-M. — **Exercices de Géométrie** comprenant l'exposé des méthodes géométriques et 2000 questions résolues. 5e édition. — 1 vol. gr. in-8° de XXIV-1300 p. et 1600 fig.; 15 fr.; Mame & fils, Tours, J. de Gigord, Paris.

La quatrième édition de ce livre a été analysée dans l'*Enseignement mathématique* (1908, p. 531). Je commence par renvoyer en cet endroit pour ne pas répéter la même analyse et les mêmes éloges, ces derniers étant d'ailleurs bien superflus.

Cet ouvrage esthétique et gigantesque dont je ne connais point d'analogue, ni en France ni à l'étranger, et qui, par son seul volume, pourrait sembler redoutable à plus d'un élève et même à plus d'un professeur, vient de s'épuiser en quatre ans! Je suis heureux d'avoir prévu ce succès, mais bien d'autres que moi y ont naturellement contribué; c'est qu'on trouve là non seulement des exercices, mais l'histoire vivante de la géométrie élémentaire, le rassemblement de tous les remarquables travaux qui n'ont que le défaut, capital pour le jeune géomètre, d'être extrêmement dispersés.

Et personnellement l'auteur a montré une puissance synthétique étonnante. Tout en commençant par reconnaître que les méthodes purement géométriques font souvent défaut et que le mieux est de résoudre beaucoup de problèmes, il en a réuni tant, et d'une façon si habile, que les méthodes ont fini, en bien des points, par apparaître comme par enchantement. Telle est par exemple sa méthode des maxima et minima dont je n'ai pas suffisamment parlé en 1908. La méthode classique antique (à une époque où les dérivées n'étaient pas couramment employées dans l'enseignement élémentaire), consistait à discuter le discriminant d'équations quadriques. Or certains problèmes sur la tangente au cercle conduisent à une discussion analogue et aussi générale. Il s'ensuit donc que bien des problèmes de maxima et de minima sont résolus *géométriquement* par le tracé élémentaire d'une tangente à un certain cercle.

Quant aux questions spécialement ajoutées à cette cinquième édition, il est fort difficile de signaler les plus intéressantes, car elles le sont toutes à peu près également. Beaucoup sont curieuses, par leur énoncé même, puis, plus encore, par l'extrême simplicité de la démonstration. Telle par exemple celle-ci: La sphère qui passe par les extrémités de la plus courte distance de deux droites, et par les extrémités d'un segment glissant sur ces droites, a un rayon constant.

D'ailleurs une grande partie de ces nouveaux problèmes ou théorèmes a trait à la géométrie dans l'espace, à la division des aires et des volumes.

D'importantes additions concernent les problèmes à constructions non géométriques. Tous ces derniers ont des énoncés des plus simples; ils offrent même des analogies apparentes avec d'autres à solutions à peu près immédiates. Quelle extraordinaire différence entre le triangle déterminé par trois médianes ou trois hauteurs et celui qui l'est par trois bissectrices!

Ces exemples sont choisis — c'est le cas de le dire sans métaphore — entre mille, mais ils le sont du moins complètement au hasard. L'intérêt se soutient de même à toutes les pages de cette œuvre simple et grande dont la portée philosophique n'est pas moindre que l'utilité pratique.

A. Buhl (Toulouse).

George Bruce Halsted. — **Géométrie rationnelle.** Traité élémentaire de la science de l'espace. Traduction française par P. Barbarin, avec une préface de C.-A. Laisant. — 1 vol. in-8° de IV-296 p. et 184 fig.; 6 fr. 50; Gauthier-Villars, Paris.

Cet ouvrage, inspiré à un géomètre anglais par un géomètre allemand, nous revient traduit en français. On ne peut que s'en féliciter et le considérer comme un monument fort beau et fort simple au point de vue logique. Il ne semble pas cependant qu'on le puisse imposer aux enfants abordant la géométrie pour la première fois; trop de notions intuitives, d'un usage immédiat, sont abandonnées et sacrifiées à l'enchaînement rationnel des propositions, mais beaucoup de ceux qui savent déjà quelque peu la géométrie, la sauront beaucoup mieux lorsqu'ils comprendront les méthodes de M. Hilbert.

Dans les débuts, les deux choses qui m'ont le plus frappé sont, d'une part, l'introduction du calcul segmentaire qui, une fois défini (notamment en ce qui concerne la multiplication), donne toute la théorie de la similitude et, d'autre part, les constructions effectuées sans compas à l'aide du fameux transporteur de segments *(Streckenübertrager)*. Cet instrument peut être réduit à une simple carte de visite sur le bord de laquelle on marque les longueurs à transporter. Les constructions ainsi effectuées sont éminemment intéressantes et certaines sont des merveilles d'ingéniosité. Après cela l'usage du compas, c'est-à-dire de l'instrument qui trace une courbe pour résoudre les problèmes sur les droites, paraît presque choquant au point de vue logique.

Comme je l'insinuai tout à l'heure, il ne sera pas toujours très pratique et très simple de tout faire au transporteur, mais, au point de vue du seul ordre des choses, ce sera l'instrument fondamental et unique du calcul segmentaire.

Pour l'étude des volumes, la théorie du prismatoïde domine tout; les corps ronds, la sphère même sont comparés à des solides à faces planes. Un appendice enfin est consacré à la géométrie du compas. M. Laisant, dans sa préface, a excellemment fait appel à l'esprit d'impartialité, faisant remarquer que les habitudes contrariées par le nouveau mode d'exposition pourraient bien avoir tort. Je ne saurais mieux dire.

Soyons reconnaissant aussi au traducteur de cet ouvrage en espérant que bien des Français y puiseront non seulement des vues nouvelles sur la Géométrie, mais aussi le désir d'aller plus loin... jusqu'aux grands travaux de M. Hilbert.

A. Buhl (Toulouse).

N. Isvolski. — **Géométrie plane.** 1 vol. in-8° de 266 p.; 1 rouble 20 kopecks; Zalieski, Moscou, 1911. — **Géométrie dans l'espace.** — 1 vol. de 126 p. (en russe); 65 kopecks; Doumnof, Moscou, 1910.

Les traités de géométrie se suivent et en général se ressemblent. Le nou-

vel ouvrage de M. Isvolski fait exception à cette règle commune : il diffère sensiblement des livres analogues

Dans la plupart des géométries élémentaires, on étudie les propriétés des figures dès qu'on a établi leur existence, et sans s'occuper de leur construction. Ainsi, au début, on définit l'angle droit, on démontre qu'il existe, on recherche ses propriétés, et ce n'est que beaucoup plus loin qu'on apprend à construire deux droites perpendiculaires.

M. Isvolski a renoncé à suivre cette méthode traditionnelle ; il se refuse à étudier les propriétés d'une figure avant de savoir la construire : de là de grands changements dans l'ordre de l'exposition.

Les premiers chapitres de la géométrie plane sont consacrés à la comparaison des segments de droites, des angles, des arcs de cercle, à l'égalité des triangles et aux propriétés des triangles isocèles. On n'y parle pas de l'angle droit, mais on y considère l'angle dont les côtés sont dans le prolongement l'un de l'autre, ce qui permet d'établir l'égalité des angles opposés par le sommet.

Au chapitre IV l'auteur définit les droites parallèles, et indique, pour les construire, un procédé fort ingénieux, reposant sur l'égalité des angles alternes internes. A la fin de ce chapitre, il établit que la somme des angles d'un triangle est égale à l'angle dont les côtés sont en ligne droite.

Le chapitre suivant traite des propriétés du parallélogramme, et c'est dans l'étude du losange et de ses diagonales que nous rencontrons pour la première fois les notions de perpendiculaire, d'angle droit et de bissectrice d'un angle. Viennent ensuite les propriétés des perpendiculaires, des triangles rectangles,... puis l'étude du cercle, des angles inscrits et des polygones réguliers.

L'auteur a réuni dans une seconde partie tout ce qui concerne les mesures : mesures des longueurs, des angles, des aires, lignes proportionnelles, similitude des triangles, relations métriques dans le triangle et dans le cercle. Enfin la géométrie plane se termine par l'étude des axes radicaux, par la construction des cercles tangents à des droites et à des cercles donnés et par le calcul de la longueur de la circonférence et de l'aire du cercle.

La géométrie dans l'espace est conçue sur un plan analogue. Dans une première partie, l'auteur étudie les propriétés des droites et plans parallèles, des droites et plans perpendiculaires, des dièdres, des trièdres et des polyèdres réguliers convexes ; puis, dans une deuxième partie, il aborde la mesure des aires et des volumes.

J'ajouterai, en terminant, que les définitions sont toujours très claires, et les démonstrations fort bien présentées. De plus, contrairement à la méthode, suivie habituellement dans les ouvrages élémentaires, qui consiste à énoncer chaque théorème avant d'en donner la démonstration, M. Isvolski préfère, dès qu'il a défini et construit un être géométrique quelconque, analyser ses propriétés, et, quand il a obtenu un certain ensemble de résultats, il les met en évidence dans un résumé simple et concis. Et cela rend fort attrayante la lecture de son livre. G. Papelier (Orléans)

G. Loria. — **Poliedri, Curve e Superficie secondo i metodi della Geometria descrittiva.** — 1 vol. cart. (nos 148-149 des *Manuels Hœpli*) ; fr. 3 ; Hœpli, Milan.

Ce volume est le complément naturel de celui que l'auteur a publié dans la même collection sous le titre : *Metodi della Geometria descrittiva*. La

première partie contient les problèmes classiques relatifs aux trièdres et aux polyèdres ; le mode de projection généralement employé est celui de Monge ; quelques questions sont résolues à l'aide de la projection centrale ou des plans cotés.

La deuxième partie est consacrée aux courbes et aux surfaces (courbes planes et gauches, surfaces de révolution, hélicoïdes, cônes et cylindres, développables et surfaces réglées gauches).

L'exposition est claire, concise et limitée aux problèmes essentiels ; quelques notions élémentaires de géométrie analytique permettent parfois de simplifier les démonstrations. L'auteur insiste plutôt sur les principes que sur les applications ; il est de ceux qui considèrent les exercices pratiques comme des produits secondaires qu'il est inopportun d'intercaler, en trop grand nombre, dans une théorie systématique ; c'est une des raisons qui font de son manuel un excellent livre d'enseignement.

L. Kollros (Zurich).

H. v. Mangoldt. — **Einführung in die höhere Mathematik.** *Erster Band :* Anfangsgründe der Infinitesimalrechnung u. der analyt. Geometrie. — 1 vol, in-8°, 477 p. ; broché, 12 Mk.; Hirzel, Leipzig.

L'auteur s'est proposé d'écrire un traité d'éléments de mathématiques supérieures renfermant les notions indispensables aux physiciens et aux ingénieurs. Il n'a pas voulu faire un abrégé limité à un exposé sommaire. Les démonstrations sont au contraire présentées avec beaucoup de soin et avec toute la rigueur désirable dans un pareil ouvrage. Professeur à l'Ecole technique supérieure de Danzig, l'auteur connaît les besoins des étudiants et fait preuve d'une grande expérience. Son ouvrage sera un guide très utile à tous ceux qui ont à s'initier aux éléments de mathématiques par des bases bien établies. Il comprendra trois volumes.

Voici les principaux chapitres du premier volume : I. Analyse combinatoire. — II. Formules sommatoires. — III. Eléments du calcul des probabilités. — IV. Déterminants. — V. Nombres irrationnels. — VI. Racines, Puissances entières, logarithmes ; mesure des angles. — VII. Notions fondamentales de Géométrie analytique. — VIII. Variables et fonctions. — IX. Droite et plan. — X. Limites et continuités.

A signaler l'exposé des notions de Géométrie analytique présentées d'après la méthode de la fusion de la Géométrie plane et de la Géométrie dans l'espace. Ce procédé offre de grands avantages sur la marche habituelle, surtout dans une école technique où les élèves sont appelés de bonne heure à utiliser les notions de coordonnées dans différentes branches des mathématiques appliquées.

R. Neuendorff. — **Praktische Mathematik.** I. Teil. Graphisches und numerisches Rechnen. — 1 vol. de VI-104 p., 69 fig. et 1 tabl. (Collection *Aus Natur und Geisteswelt.*) Broché 1 M., rel. 1 M. 25; B. G. Teubner, Leipzig.

Ce petit ouvrage mérite de ne pas passer inaperçu ; nous le signalons à tous ceux qui enseignent les mathématiques dans les écoles de degré moyen. Il renferme une série de six conférences faites par M. Neuendorff à la Volkshochschule de Kiel, conférences dans lesquelles il traite successivement de la représentation graphique, de la mesure des surfaces, de la mesure des

volumes, du calcul abrégé, du calcul à l'aide de Tables, enfin des machines à calculer. L'auteur, en faisant son exposé d'une façon tout à fait simple, vise surtout les applications pratiques et usuelles. Le lecteur y puisera de nombreux renseignements et de nombreux exemples sur la notion de fonction, la représentation graphique, la construction des tables et nomogrammes, leur emploi, l'interpolation, le calcul pratique et mécanique en général.

G. Benz (Le Locle).

Jules Tannery. — **Leçons d'Arithmétique théorique et pratique.** 6e édition, complètement refondue. — 1 vol. in-8°, XVI-545 p.; 7 fr.; librairie Arm. Colin, Paris.

Cet ouvrage, qui fait partie de la collection de cours pour la classe de mathématiques publiée sous la direction de M. G. Darboux, a pris place au nombre des traités classiques consacrés à l'Arithmétique. Ce n'est pas un manuel destiné à l'enseignement élémentaire, mais un traité qui s'adresse aux professeurs et aux élèves de l'enseignement secondaire supérieur. Il suffira, pour caractériser l'esprit de ce livre, de reproduire le début de la préface : « J'ai essayé de faire ici un livre d'enseignement, qui puisse servir à ceux qui commencent leurs études mathématiques et à ceux qui les poursuivent, qui soit très élémentaire au début, où les démonstrations prennent, peu à peu, une forme plus abstraite, et qui, à la fin, touche à des sujets d'ordre assez élevé. »

Quant aux matières traitées, il n'est guère besoin d'en faire l'énumération. Elles vont des propriétés fondamentales des opérations jusqu'aux éléments de la théorie des nombres et sont accompagnées de nombreux exercices. « Rien, peut-être, dit l'auteur, ne vaut pour la formation de l'esprit mathématique, les problèmes d'Arithmétique et de Géométrie élémentaire. »

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. Publications périodiques :

Atti della Reale Accademia dei Lincei. Rendiconti. — Rome.

2e *semestre* 1911. — Mathématiques : A. Comessatti : Sulle superficie razionali reali. — C.-C. Evans : L'equazione integrale di Volterra di seconda specie con un limite dell'integrale infinito. — (Id.) : Sul calcolo del nucleo dell'equazione risolvente per una data equazione integrale. — (Id.) : Applicazione dell'algebra delle funzioni permutabili al alcolo delle funzioni associate. — E. Laura : Sopra gli autovalori delle equazioni integrali a nucleo non simmetrico. — E.-E. Levi : Sulle condizioni sufficienti per il minimo nel calcolo delle variazioni. (Gli integrali sotto forma non parametrica.) — (Id.) : Sulle condizioni sufficienti per il minimo nel calcolo delle variazioni. (Gli integrali in forma parametrica.) — G. Scorza : Sopra una classe di va-

rieta algebriche a tre dimensioni con un gruppo ∞^2 di trasformazioni birazionali in sè. — F. Sibirani : Su le funzioni ordinatrici delle funzioni reali di una o più variabili reali. — L. Sinigallia : Sulle funzioni permutabili di seconda specie. — V. Volterra : Sopra una proprieta generale delle equazioni integrali ed integro-differenziali. — M. Abraham : Sulla teoria della gravitazione. — E. Almansi : Sulle de formazioni finite dei solidi elastici isotropi. — G. Armellini : Il problema dei due corpi nelle' potesi di masse variabili. — U. Cisotti : Sogra il regime permanante nei canali a rapido corso. — U. Crudeli : Sopra le deformazioni finite. Le equazioni del De Saint-Venant. — (Id.) : Sulle equazioni delle De Saint-Venant relative alle deformazioni finite. — O. Tedone : Sulla torsione di un cilindro di rotazione.

Bulletin de la Société mathématique de France. Tome XXXIX, Paris.

Fascicules III et IV. — H. Dulac : Solutions d'ordre imaginaire d'une équation différentielle. — L. Zoretti : Sur la représentation analytique d'un contenu irréductible. — A. Pellet : Des équations dominantes. — Z. De Geocze : Sur la fonction semi-continue. — P. Boutroux : Remarques sur les singularités transcendantes des fonctions de deux variables. — G. Remoundos : Sur le module maximum des fonctions algébroïdes. — S. Lattès ; Sur les formes réduites des transformations ponctuelles dans le domaine d'un point double. — W.-B. Ford : Conditions suffisantes pour qu'une série admette un développement asymptotique. — E. Cartan : Sur les systèmes en involution d'équations aux dérivées partielles du second ordre à une fonction inconnue de trois variables indépendantes. — H. Villat : Sur le problème de Dirichlet relatif au cercle.

Bulletin of the American mathematical Society. — New-York. Vol. XVIII.

Fasc. 1 à 7. — M. Bocher : The Published and Unpublished Work of Charles Sturm on Algebraic and Differential Equations. — C.-J. Keyser : A Sensuous Representation of Paths that Lead from the Inside to the Outside of an Ordinary Sphere in Point Space of Four Dimensions without Penetrating the Surface of the sphere. — N.-J. Lennes : A Direct Proof of the Theorem that the Number of Terms in the Expansion of an Infinite Determinant is of the Same Potency as the Continuum. — (Id.) : A Necessary and Sufficient Condition for the Uniform Convergence of a Certain Class of Infinite Series. — O. Bolza : A generalization of Lindelöf's Theorems on the Catenary. — S. Chapman : A Note on the Theory of Summable Integrals. — W.-B. Fite : Irreductible Homogeneous Linear Groups of Order p^m and Degree p or p^2. — Graduate Work in Mathematics in Universities and in Other Institutions of Like Grade in the United States Committee Report. — G.-A. Bliss : A New Proof of the Existence Theorem for Implicit Functions. — H. Bateman : On a Set Of Kernels Whose Determinants Form a Sturmian Sequence. — R.-E. Moritz : On the Cubes of Determinants of the Second Third, and Higher Orders. — G.-A. Miller : Not on the Maximal Cyclic Subgroups of a Group of Order p^m. — T. Hayashi : An Expression for the General Term of a Recurring Series. — F.-N. Cole : The Eighteenth Annual Meeting of the American Mathematical Society. — O.-D. Kellogg : The Fifth Regular Meeting of the Southwestern Section. — B.-H. Camp : Series of Laplace's Functions. — A.-G. Webster : On a New Mixed Problem of the Partial Differential Equation of Telegraphy. — F.-H. Safford :

An Identical Transformation of the Elliptic Element in the Weierstrass Form. — C.-L.-E. MOORE : Surfaces in Hyperspace which have a Tangent Line with Three-Point Contact Passing through Each Point. — W.-A. HURWITZ : Note on Mixed Linear Integral Equations. — A.-O. LEUSCHNER and B.-A. BERNSTEIN : Note on the Graphical Solutions of the Fondamental Equations in the Short Methods' of Determining Orbits. — A.-R. SCHWEITZER : On a Functional Equation. — C.-F. WARNER : Shop Mathematics. — F.-N. COLE : The February Meeting of the American Mathematical Society. — E.-H. MOORE : On the Foundations of the Theory of Linear Integral Equations.

Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris.

1er semestre 1912. — 8 janvier. — TZITZEICA : Sur les surfaces isothermiques. — P. LEVY : Sur les équations intégro-différentielles de M. Hadamard.

15 janvier. — E. PICARD : Sur un théorème général relatif aux fonctions uniformes d'une variable liées par une relation algébrique. — E. VALLIER : Sur la position actuelle du problème balistique. — L. ROY : Les équations générales des membranes flexibles. — J. HADAMARD : Sur une question relative aux fluides visqueux.

22 janvier. — S. BERNSTEIN : Sur la valeur asymptotique de la meilleure approximation de $|x|$. — E. ESCLANGON : Sur un régulateur thermique de précision.

29 janvier. — G. PICK : Sur les notions droites, parallèles et translation, et sur la géométrie différentielle dans l'espace non-euclidien. — J.-E. LITTLEWOOD : Quelques conséquences de l'hypothèse que la fonction $\zeta(s)$ de Riemann n'a pas de zéros sur le demi-plan $R(s) > 1/2$. — G. COTTY : Sur une classe de formes quadratiques à quatre variables liées à la transformation des fonctions abéliennes. — J. TAMARKINE : Sur le problème des vibrations transversales d'une verge élastique hétérogène.

5 février. — TZITZÉICA : Sur les équations de Laplace à solutions quadratiques. — H. LEBESGUE : Sur le problème de Dirichlet. — G. COTTY : Sur une classe de formes quadratiques à quatre variables liées à la transformation des fonctions abéliennes. — E. VALLIER : Sur la position actuelle du problème balistique.

12 février. — E. BOREL : Sur les théorèmes fondamentaux de la théorie des fonctions de variables réelles. — J. DRACH : Sur les équations différentielles de la géométrie. — F. ENRIQUES : Sur le théorème d'existence pour les fonctions algébriques de deux variables indépendantes.

19 février. — M. PETROVITCH : Allure d'une transcendante entière. — A. CHATELET : Sur une représentation des idéaux.

26 février. — Emile BOREL : La classification des ensembles de mesure nulle et la théorie des fonctions monogènes uniformes. — E. VESSIOT : Sur les groupes fonctionnels et les équations intégro-différentielles linéaires. — Rodolphe SOREAU : Sur l'équation à quatre variables d'ordre monographique 4. — E. FICHOT : Sur le décalage entre la force pertubatrice et le mouvement contraint.

4 mars. — F. RIESZ : Sur quelques points de la théorie des fonctions sommables.

11 mars. — C. GUICHARD : Sur les cercles osculateurs et les sphères os-

culatrices aux lignes de courbure d'une surface. — V. Jamet : Sur certains complexes de droites. — E. Vessiot : Sur les fonctions permutables et les groupes continus de transformations fonctionnelles linéaires. — R. Soreau : Généralisation de la construction de Massau et abaque pour résoudre les équations de la forme $z^{\alpha+\beta} + nz^{2\beta} + pz^{\beta} + q = 0$.

18 mars. — H.-W.-E. Jung : Sur l'invariant de MM. Zeuthen et Segre. — J. Chazy : Sur une équation différentielle dont un coefficient est une série divergente. — L. Rey : Les ondes de choc dans le mouvement des membranes flexibles.

25 mars. — Ch. Platrier : Contribution à un théorème sur les équations intégrales de Fredholm de troisième espèce. — R. Soreau : Résolution graphique de l'équation trinôme à exposants quelconques. — H. Poincaré : Sur la diffraction des ondes hertziennes.

1er avril. — E. Wælsch : Fonctions bipédiques, systèmes triples orthogonaux et efforts isostatiques. — A. Denjoy : Une extension de l'intégrale de M. Lebesgue. — L.-E.-J. Brouwer : Sur l'invariance de la courbe fermée. — A. Friedmann : Sur la recherche des surfaces isodynamiques.

8 avril. — Ch. Jordan et R. Fiedler : Contribution à la géométrie des courbes convexes et de certaines courbes qui en dérivent.

15 avril. — J. Boussinesq : Sur la théorie géométrique, pour un corps non rigide, des déplacements bien continus, ainsi que des déformations et des rotations de ses particules. — E. Delassus : Sur les liaisons d'ordre quelconque des systèmes matériels. — B. Mayor : Sur les déformations de certains systèmes élastiques. — E. Borel : Les bases géométriques de la mécanique statistique.

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, in Monatsheften herausgegeben von A. Gutzmer. — B.-G. Teubner, Leipzig.

1911, Nos 7 à 12. — E. Salkowski : Ueber eine bemerkenswerte Klasse von Raumkurven. — W. Burnside : The condition that an irreducible group of linear substitutions on n variables of finite order may contain a substitution with $n-1$ unit multipliers. — F. Engel : Wilhelm Thomé. — A. Brill und M. Nöther : Jakob Lüroth. — M. Brückner : Zur Erinnerung an Oswald Hermes. — Erwin Papperitz : Ueber das Zeichnen im Raume. — Rudolf Sturm : Geschichte der mathematischen Professuren im ersten Jahrhundert der Universität Breslau 1811-1911. — P. Stäckel : Ueber Extreme zusammengesetzter Funktionen. — Rudolf Rothe : Ueber die Flächen konstanter mittlerer Krümmung, auf denen die Krümmungslinien ein Kurvennetz ohne Umwege bilden. — R. de Saussure : Réponse à l'article de M. Study sur ma « Géométrie des Feuillets ». — E. Study : Herrn de Saussure zur Erwiderung. — Hermann Weyl : Berichtigung zu meinem Aufsatz : Zwei Bemerkungen über das Fourier'sche Integraltheorem. — Paul Stäckel : Ueber Extreme zusammengesetzter Funktionen. (Zweite Mitteilung.) — Arthur Rosenthal : Ueber Extreme zusammengesetzter Funktionen. (Auszug aus einem Brief an P. Stäckel.) — E.-D. Roe : A New Invariantive Function. — H.-W. March : Darstellung einer willkürlichen Funktion auf der Kugel durch ein Doppelintegral mit Kugelfunktionen. — A. Korselt : Ueber mathematische Erkenntnis. — Yoshio Mikami : The Influence of Abaci on the Chinese and Japanese Mathematics. — Gustav Kohn : Ueber die Erzeugung einer Kollineation, welche zwei windschiefe Geraden untereinander

vertauscht. — L. Schlesinger : Ueber Gauss' Jugendarbeiten zum arithmetisch-geometrischen Mittel. — Rudolf Rothe : Bemerkungen zu meiner Arbeit « Ueber die Flächen konstanter mittlerer Krümmung, auf denen die Krümmungslinien ein Kurvennetz ohne Umwege bilden. » — Angelegenheiten der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. — Sprechsaal für die Enzyklopädie. — Mitteilungen und Nachrichten. — Literarisches.

Monatshefte für Mathematik und Physik, herausgegeben von G. v. Escherich, F. Mertens u. W. Wirtinger. — Eisenstein & C°, Wien.

XXII. Jahrgang (1911): Heft 2 et 3. — G. Huber : Die Ponsfläche, eine Fläche dritter Ordnung mit vier Doppelpunkten. — H. Hahn : Ueber Variationsprobleme mit variablen Endpunkten. — E. Stamm : Beitrag zur Algebra der Logik. — R. Weitzenböck : Ueber den Schnitt zweier quadratischer Räume im vierdimensionalen Raume. — H. Böheim : Ueber die Bestimmung der Kegelschnitte, welche durch drei gegebene Punkte gehen und einen gegebenen Kegelschnitt oskulieren. — O. Danzer : Ueber Kurven, die sich zyklographisch als Zykloiden abbilden. — L. v. Schrutka : Eine Methode der Bestimmung der Anzahl der Primitivzahlen für einen Primzahlmodul. — A. Axer : Ueber einen arithmetischen Satz von Gegenbauer. — G. Majcen : Ueber eine Methode zur Behandlung gewisser ebener metrischer Probleme. — R. Weitzenböck : Das Formensystem einer räumlichen Kollineation. — M. Schechter : Ueber die Summation divergenter Fourierscher Reihen. — S. Rossi : Ein Beitrag zur Differentialgeometrie der Strahlenkongruenzen.

Heft 4. — E. v. Wartburg : Ueber den Achsenkomplex. — A. Kanda : Lineale Erzeugung von algebraischen Transformationen und Kurven. — A. Meder : Zur Herleitung gewisser Formeln aus der Kurventheorie. — W. Gross : Zur invarianten Darstellung linearer Differentialgleichungen. — J. Plemelj : Der Existensbeweis für Lösungen linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen, insbesondere an einer Fuchsschen singulären Stelle.

Nouvelles Annales de Mathématiques, dirigées par C.-A. Laisant, C. Bourlet et R. Bricard, 4e série. — Gauthier-Villars, Paris.

1911, août-décembre. — G. Fontené : Semi-invariants d'un polynôme. — (Id.) : Discussion des équations de degré 2, 3, 4, 5, au point de vue des racines multiples. — Ch. Platrier : Application du theorème de M. Appell sur le moment de la quantité de mouvement par rapport à un complexe d'un mobile soumis à une force appartenant à ce complexe. Généralisation de l'équation de Clairaut. — E. Turrière : Sur certaines surfaces généralisant la chaînette de Coriolis. — A. Proszynski : Sur la résolution de l'équation intégrale à noyau symétrique. — R. Bouvaist : Sur les triangles inscrits et circonscrits à une cartésienne. — M.-F. Egan : Note sur les quadriques homofocales. — Paul Suchar : Sur les courbes planes qui sont à elles-mêmes leurs polaires réciproques. — G. Valiron : Sur les fonctions entières d'ordre nul. — E. Keraval : Surfaces engendrées par le déplacement d'une courbe plane indéformable, de telle sorte qu'il existe un cône circonscrit le long de la courbe. — G. Valiron : Sur la dérivée logarithmique de certaines fonctions entières. — Ch. Platrier : Une application de l'équation fonctionnelle de Fredholm. — L. Quantin de la Roëre : Sur les coniques et les quadriques homofocales. — G. Fontené : Sur l'intégration des fractions rationnelles. — L. Zoretti : Sur les moments d'une aire plane. — R. Bouvaist : Sur un faisceau de strophoïdes.

2. Livres nouveaux :

R. d'Adhémar. — **Leçons sur les principes de l'analyse.** Tome I : *Séries. Déterminants. Intégrales. Potentiels. Equations intégrales. Equations différentielles et fonctionnelles.* — 1 vol. in-8°, VI-324 p. ; 10 fr. ; Gauthier-Villars, Paris.

P. Bachmann. — **Ueber Gauss' zahlentheoretische Arbeiten.** Materialien für eine wissenschaftliche Biographie von Gauss. Gesammelt von F. Klein und M. Brendel. Heft I). — 1 fasc. in-8°, 54 p. ; 2 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

C. Burali-Forti. — **Corso di Geometria Analitico-Projettiva.** — 1 vol. in-8°, VII-268 p. ; G. Gallizio, Turin.

E. Carvallo. — **Le calcul des probabilités et ses applications.** — 1 vol. in-8°, IX-169 p. ; 6 fr. 50 ; Gauthier-Villars, Paris.

G.-C. Fagnano. — **Opere Matematiche del Marchese Giulio Carlo de' Toschi di Fagnano,** pubblicate sotto gli auspici della Società Italiana per il progresso delle Scienze dai soci V. Volterra, G. Loria, D. Gambioli. — 3 vol. in-8°, 474, 471 et 227 p. ; les 3 vol. 40 lires ; Albrighi, Segati e C., Milan-Rome-Naples.

A.-R. Forsyth. — **Lectures on the Differential Geometry of Curves and Surfaces.** — 1 vol. in-8°, XXIV-526 p. ; 21 sh. ; Cambridge University Press.

D. Gautier. — **Mesure des angles. Hyperboles étoilées et développante.** — 1 vol. in-8°, IV-84 p. ; 2 fr. ; Gauthier-Villars, Paris.

Renée Masson — **Du roulement et des épicycloides** en Géométrie non-euclidienne (Thèse). — 1 fasc. in-8°, 60 p. ; A. Kündig, Genève.

O. Meissner. — **Wahrscheinlichkeitsrechnung** (*Mathem. Bibliothek*, herausgegeben von W. Lietzmann und A. Witting), N° 4. — 1 vol. p. in-8°, 64 p. ; 1 M. 80 ; B. G. Teubner.

H. Mettler. — **Graphische Berechnungs-Methoden,** im Dienste der Naturwissenschaft und Technik mit Zeichnungen. II et III. Aeromechanik. — 2 vol. in-16, 78 et 130 p. ; Leemann & C°, Zürich-Selnau.

Kolbjörn Ode. — **Das Pythagoreische Dreieck** und Faktorenzerlegung der Gleichung $x^n + z^n = a^n$, wenn $n > 2$. — 1 fasc. in-8°, 28 p. ; Kirste & Sieberth, Kristiania.

H. Poincaré. — **Calcul des Probabilités.** 2e édit. — 1 vol. in-8°, IV-336 p. ; 12 fr. ; Gauthier-Villars, Paris.

J.-F. Steffensen. — **Analytiske Studier med anvendelser paa Taltheorien.** (Thèse.) — 1 fasc. in-8°, XIV-148 p. ; V. Copenhagne.

E.-E. Whitford. — **The Pell Equation.** — 1 vol. in-8°, 193 p. ; chez l'auteur, College of the City of New-York.

Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées. Edition française dirigée par J. Molk. — Tome I, volume 2, fasc. 4 : *Algèbre. Théorie des formes et des invariants*, exposé d'après l'article allemand de F.-W. Meyer, par J. Drach. — 1 fasc. de 96 p. ; Teubner, Leipzig, et Gauthier-Villars, Paris.

SUR LA GÉNÉRATION DES COURBES UNICURSALES

1. — La théorie des courbes unicursales entre presque au début dans le champ d'étude du mathématicien. La ligne droite et les coniques fournissent des exemples courants de ces courbes.

Plusieurs des transformations géométriques les plus usuelles, par exemple celles qui donnent les courbes inverses, les podaires, les développées transforment les courbes unicursales en courbes unicursales. Il serait par conséquent utile d'avoir un exposé de leurs propriétés qui non seulement ne dépende pas de la théorie générale des courbes planes, mais qui au contraire soit une introduction à cette théorie. C'est le but que je me propose dans cette Note en traitant le problème par une méthode qui admet une généralisation facile aux courbes unicursales de l'espace à trois dimensions ou à plus de trois dimensions.

L'étude des courbes planes du troisième et du quatrième degré suffit à mettre en évidence les points principaux de la théorie. Au détriment de la perfection logique j'emploie des coordonnées non homogènes et je suppose la courbe donnée par des équations de la forme

$$x = \frac{f_1(t)}{f_3(t)} , \qquad y = \frac{f_2(t)}{f_3(t)} \qquad (1)$$

où $f_k(t) = a_k t^n + b_k t^{n-1} + \ldots + l_k$; t est un paramètre variable ; les différentes fonctions f n'ont pas de facteur commun.

Cette courbe rencontrera la droite

$$Ax + By + C = 0$$

aux n points pour lesquels t satisfait à l'équation

$$Af_1(t) + Bf_2(t) + Cf_3(t) = 0 .$$

La courbe unicursale est donc généralement du $n^{\text{ième}}$ degré. Les cas faisant exception sont traités dans les paragraphes suivants.

2. — **La droite.** — La droite est représentée par les équations

$$x = \frac{a_1 t + b_1}{a_3 t + b_3} , \qquad y = \frac{a_2 t + b_2}{a_3 t + b_3} .$$

Brill avait remarqué (*Math. Annalen*, vol. 12) que lorsqu'on suppose $n = 2$ dans les équations (I) et que l'on considère le cas de la conique dégénérée, elle se décompose en une droite tracée deux fois. On peut généraliser ceci et chercher dans quels cas les équations (I) représenteront une droite.

Supposons la droite exprimée en coordonnées rectangulaires x, y par

$$Ax + By + C = 0 .$$

Nous aurons alors l'identité suivante pour t

$$Af_1(t) + Bf_2(t) + Cf_3(t) \equiv 0 ,$$

d'où la valeur nulle des déterminants formés avec les éléments

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 & \dots & l_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & l_2 \\ a_3 & b_3 & \dots & l_3 \end{matrix} \right\| . \qquad (1)$$

La réciproque est vraie ; de sorte que les conditions sont nécessaires et suffisantes.

Dans cette représentation à chaque point sur la ligne correspondent n valeurs de t, et la courbe (dégénérée) consiste en une ligne droite tracée n fois.

3. — Il est facile de se rendre compte qu'une courbe représentée par les équations (I) ne peut pas dégénérer en deux courbes algébriques distinctes,

$$\Phi(x , y) = 0 \qquad \text{et} \qquad \Psi(x , y) = 0 .$$

En effet, ces équations devraient alors pouvoir se déduire de (I) par élimination algébrique de t, ce qui nécessiterait qu'elles soient séparément vraies pour une infinité de valeurs communes de t, c'est-à-dire qu'elles possèdent une infinité de points communs ; hypothèse qui n'est possible que pour des courbes $\Phi = 0$ et $\Psi = 0$ non distinctes.

Par conséquent la courbe, lorsqu'elle est dégénérée, est du $m^{\text{ième}}$ degré, m étant un facteur de n, et cette courbe est unique.

Dans ce qui suit nous supposerons que les équations (I) représentent une courbe proprement dite du $n^{\text{ième}}$ degré.

4. — **Coniques.** — Si nous posons

$$f_k(t) = a_k t^2 + b_k t + c_k , \qquad (2)$$

peut-on avoir l'identité en t

$$\Sigma(p_k t + q_k) f_k(t) \equiv 0 \ ? \qquad (3)$$

La condition de possibilité se traduit par quatre relations linéaires homogènes entre les six quantités

$$(p_1, q_1 ; \quad p_2, q_2 ; \quad p_3, q_3) .$$

L'identité est par conséquent possible, et si

$$(p_1, q_1 \ldots) , \qquad (p_1', q_1' \ldots)$$

sont deux systèmes de solutions, les autres systèmes sont déterminés par des combinaisons linéaires de ces deux.

Nous sommes ainsi conduits à deux identités

$$L + tM = 0 , \qquad L' + tM' = 0 \tag{4}$$

où

$$L = q_1 x + q_2 y + q_3$$
$$M = p_1 x + p_2 y + p_3 ; \qquad \text{etc.}$$

(L'équation en x, y de la conique est donc $LM' - L'M = 0$).

Il s'ensuit immédiatement la propriété projective de la conique comme lieu de l'intersection des rayons correspondants de deux faisceaux projectifs de droites. Le paramètre t a également une interprétation géométrique.

On pourrait aussi remplacer les deux systèmes de solutions

$$(p_1, \ldots) \qquad \text{et} \qquad (p_1', \ldots)$$

par deux de leurs combinaisons linéaires; mais les faisceaux ainsi obtenus seraient les mêmes et cela ne donnerait lieu à aucun résultat nouveau.

5. — **Cubiques.** — Nous prenons ici

$$f_k(t) = a_k t^3 + \ldots + d_k . \tag{5}$$

Dans ce cas la supposition

$$\Sigma(p_k t + q_k) f_k(t) \equiv 0 \tag{6}$$

détermine cinq relations homogènes entre les six quantités

$$p_1, \ldots q_3 ;$$

leurs rapports admettent alors une seule solution indépendante.

Il existe par conséquent une relation

$$L + tM = 0 \tag{7}$$

dans laquelle

$$L = q_1 x + q_2 y + q_3 ,$$

$$M = p_1 x + p_2 y + p_3 .$$

L'hypothèse

$$\Sigma (p_k t^2 + q_k t + r_k) f_k(t) \equiv 0$$

déterminerait six équations entre les neuf quantités

$$p_1 , \ldots r_3 .$$

Il y a par conséquent trois systèmes de solutions indépendants et les autres systèmes de solutions en sont des combinaisons linéaires. Nous pouvons prendre pour deux de ces systèmes les valeurs

$$o , p_1 , q_1 ; \quad o , p_2 , q_2 ; \quad \text{etc.}$$

et

$$p_1 , q_1 , o ; \quad p_2 , q_2 , o ; \quad \text{etc.}$$

données par

$$L + tM = 0 \quad \text{et} \quad Lt + Mt^2 = 0 .$$

Supposons que p'_1, q'_1, r'_1, etc. ; soit un troisième système de solutions auquel correspond l'identité

$$L' + M't + N't^2 = 0 , \tag{8}$$

dans laquelle

$$L' = r'_1 x + r'_2 y + r'_3 ; \quad \text{etc.}$$

Comme (8) représente une tangente à la section conique

$$M'^2 - 4L'N' = 0 ,$$

nous en tirons la conclusion :

La cubique peut être envisagée comme la courbe engendrée par le point commun à

$$L + tM = 0 , \tag{9}$$

$$L' + M't + N't^2 = 0 . \tag{10}$$

Enfin le théorème :

La cubique unicursale peut être considérée comme le lieu de l'intersection des rayons d'un faisceau avec les tangentes à une conique.

Ou encore :

Etant données deux séries ponctuelles et un faisceau de droites en correspondance projective ; la droite joignant les points correspondants des deux séries coupe le rayon correspondant du faisceau en un point dont le lieu est une cubique unicursale.

6. — Le point double correspond à

$$L = 0 , \qquad M = 0 ,$$

autrement l'équation

$$L + tM = 0$$

ne serait pas satisfaite pour deux valeurs de t, condition nécessaire pour le point double.

Le point double est donc le sommet du faisceau de droites déterminé par (9).

L'équation de la cubique, en x et y, s'obtient par l'élimination de t entre (9) et (10).

Aux deux tangentes à la conique enveloppée par (10) correspondent les droites du faisceau tangentes à la cubique passant par le point double. Ainsi le point double à deux branches réelles, est un rebroussement, ou un point conjugué, selon qu'il est pris extérieurement à la conique, sur la conique ou intérieurement à la conique.

7. — Lorsque la conique enveloppée par (10) rencontre la cubique, elle lui est tangente. Elle a donc généralement trois points de contact avec la cubique.

La propriété du contact peut se prouver analytiquement comme suit.

Supposons une courbe engendrée par un point satisfaisant aux équations

$$\Phi(t) \equiv Ax + By + C = 0 \qquad (11)$$

$$\Psi(t) \equiv A'x + B'y + C' = 0 \qquad (12)$$

dans lesquelles les coefficients sont fonctions d'un paramètre t dont la variation détermine la courbe.

Soit P un point quelconque (x_0, y_0) sur la courbe correspondant à $t = t_0$ et représentée par $\Phi = 0$, $\Psi = 0$.

La tangente en P à la courbe est en général donnée par

$$\begin{vmatrix} \Phi & \Psi \\ \Phi'_0 & \Psi'_0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (13)$$

où Φ'_0 est la valeur de $\frac{d\Phi}{dt}$ pour $x = x_0$, $y = y_0$, $t = t_0$.

L'enveloppe de $\Phi = 0$ s'obtient en éliminant t entre

$$\Phi = 0 \qquad \text{et} \qquad \Phi' = 0 .$$

Pour un point commun à la courbe et à l'enveloppe de (11) l'équation (13) se réduit à $\Phi = 0$; les deux courbes ont par consé-

quent une tangente commune. La même propriété reste vraie pour tous les points communs à la courbe et à l'enveloppe de (12).

8. — Les autres solutions de l'équation

$$\Sigma(p_k t^2 + q_k t + r_k) f_k(t) \equiv 0$$

donnent

$$L + tM = 0$$

$$L' + M't + N't^2 + (At + B)(L + tM) = 0$$

où A et B sont des constantes arbitraires. On peut conserver le même faisceau et remplacer la conique enveloppe par une infinité d'autres coniques[1].

9. — **Quartiques.** — Supposons

$$f_k = a_k t^4 + \dots + e_k ,$$

l'identité

$$\Sigma(p_k t + q_k) f_k(t) \equiv 0$$

est alors généralement impossible. Nous reprendrons ce cas plus loin.

Si nous supposons

$$\Sigma(p_k t^2 + q_k t + r_k) f_k(t) \equiv 0$$

des sept équations, entre les neuf quantités qui en résultent, nous déduisons deux relations de la forme

$$t^2 L + 2tM + N = 0 \qquad (14)$$

$$t^2 L' + 2tM' + N' = 0 . \qquad (15)$$

Toute autre relation peut être réduite à la suivante

$$t^2(L + AL') + 2t(M + AM') + N + AN' = 0 ; \qquad (16)$$

où A est une constante.

[1] Il est facile de démontrer que si les points de la cubique correspondant aux valeurs t_1, t_2, t_3 sont en ligne droite, alors il existe une relation

$$F(t_1, t_2, t_3) \equiv At_1t_2t_3 + B\Sigma t_1t_2 + C\Sigma t_1 + D = 0$$

dans laquelle A, B, C, D sont des constantes.

Si $t = t_1$ est un point d'inflexion, c'est une racine de

$$At^3 + 3Bt^2 + 3Ct + D = 0 \qquad (X)$$

Il y a donc trois inflexions et si i_1, i_2, i_3 sont les racines de (X), alors $F(i_1, i_2, i_3) = 0$, de sorte que les trois inflexions sont sur une même droite.

(Deux équations de cette forme peuvent naturellement être substituées aux équations (14) et (15).)

Or les deux équations (14) et (15) représentent des tangentes aux coniques

$$M^2 - LN = 0 ; \qquad M'^2 - L'N' = 0 .$$

On peut donc énoncer le *théorème* suivant :

Une courbe unicursale du quatrième ordre peut généralement être engendrée par l'intersection des tangentes à deux coniques qui sont en relation homographique l'une avec l'autre.

Ou encore : *Etant données quatre séries homographiques de points, la droite réunissant deux points correspondants de deux des séries coupe la ligne droite correspondante, joignant des points des deux autres séries, en un point dont le lieu est une courbe unicursale du quatrième ordre.*

10. — **Points doubles.** — Pour un point ordinaire (x, y) de la courbe, les équations (14) et (15) admettent *une* racine commune en t ; pour un point double les deux racines en t sont communes. D'où, pour un point double, les relations

$$\frac{L}{L'} = \frac{M}{M'} = \frac{N}{N'} .$$

Si nous représentons le rapport commun par ϱ, l'élimination de x et y conduit à une cubique en ϱ. Il y a par conséquent, en général, trois points doubles.

L'équation ordinaire de la courbe du quatrième ordre en fonction de x et y s'obtient par l'élimination de t entre les équations (14) et (15), soit

$$4(MN' - M'N)(LM' - L'M) = (NL' - N'L)^2$$

ou encore

$$C_1C_2 = C_3^2$$

où C_1, C_2, C_3 sont trois coniques passant par trois points communs (les points doubles de la courbe du quatrième ordre).

Nous arrivons ainsi à une autre génération connue de la courbe, c'est-à-dire comme intersection de

$$C_1 - \lambda C_3 = 0 , \qquad \text{et} \qquad \lambda C_2 - C_3 = 0 ,$$

où λ est arbitraire.

11. — Nous savons par le § 7 que chaque conique

$$M^2 - LN = 0 , \qquad M'^2 - L'N' = 0$$

coupe la courbe du quatrième ordre en quatre points. Nous trouvons de plus ici la propriété suivante.

Les tangentes génératrices (14) et (15) peuvent être remplacées par deux autres du système (16) dont la conique enveloppe est donnée par

$$(M + \lambda M')^2 - (L + \lambda L')(N + \lambda N') = 0$$

c'est-à-dire

$$M^2 - LN + \lambda(2MM' - LN' - L'N) + \lambda^2(M'^2 - L'N') = 0 \quad (18)$$

La variation de λ dans (18) détermine un système de coniques dont l'enveloppe est la courbe du quatrième ordre elle-même.

12. — Revenons au cas

$$\Sigma(p_k t + q_k) f_k \equiv 0 . \quad (17)$$

Cette identité n'est pas possible, en général, et la condition de possibilité s'exprime par l'équation

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & a_1 & a_2 & a_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ e_1 & e_2 & e_3 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & e_1 & e_2 & e_3 \end{vmatrix} = 0 .$$

Il existe deux solutions pour

$$\Sigma(p_k t^2 + q_k t + r_k) f_k = 0$$

correspondant à l'identité (17) multipliée par $\lambda t + B$ et qui n'en sont pas indépendantes.

Il y a quatre solutions linéairement indépendantes relatives à

$$\Sigma(p_k t^3 + \ldots) f_k \equiv 0 .$$

Trois de celles-ci sont données par l'identité (17) multipliée par

$$\lambda t^2 + Bt + C .$$

La quatrième est une identité distincte,

$$L't^3 + M't^2 + N't + P' = 0 .$$

Nous avons ainsi comme génératrices les équations

$$\left.\begin{aligned} Lt + M &= 0 \\ L't^3 + M't^2 + N't + P' &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

L'élimination de t entre elles détermine une courbe du quatrième ordre ayant un point triple au sommet du faisceau de lignes et donné par

$$L = 0 \; ; \qquad M = 0 \; .$$

13. — Nous pouvons maintenant énoncer les propriétés concernant les courbes d'ordres supérieurs et cela sans nouvelle démonstration, les développements qui y conduisent étant suffisamment illustrés par ce qui précède.

Théorème. — *Une courbe unicursale* C *de degré* n, *peut être engendrée par l'intersection des tangentes correspondantes à deux courbes unicursales* C_1 *et* C_2 *dont la somme des classes est* n.

Le cas normal pour $n = 2m$ est celui où chaque enveloppe génératrice est de classe m; et pour $n = 2m + 1$ où une des courbes enveloppes est de classe m et l'autre de classe $m + 1$.

Ce n'est que dans des cas exceptionnels que les classes seront respectivement $m - a$ et $m + a$ ou $m - a$ et $m + 1 + a$. Les courbes enveloppes sont dans tous les cas unicursales et on peut également leur appliquer le même mode de génération.

Un point de rencontre quelconque de C avec C_1 ou C_2, est généralement un point de contact.

14. — **Espace à trois dimensions.** — Les mêmes méthodes s'appliquent aux courbes unicursales dans l'espace à trois dimensions, courbes pour lesquelles les coordonnées x, y, z d'un point quelconque s'expriment en fonction rationnelle d'un paramètre t,

$$x = \frac{f_1(t)}{f_4(t)} \; , \qquad y = \frac{f_2(t)}{f_4(t)} \; , \qquad z = \frac{f_3(t)}{f_4(t)} \; .$$

La courbe est du n^{me} degré lorsque les fonctions f sont du n^{me} degré.

Pour une courbe du second degré on a l'identité

$$Ax + By + Cz + D = 0 \; . \tag{20}$$

La courbe est alors plane, c'est une section conique.

Pour une courbe du troisième degré, il y a trois relations

$$\left.\begin{aligned} L_1 + tM_1 = 0 \; , \\ L_2 + tM_2 = 0 \; , \\ L_3 + tM_3 = 0 \; , \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

correspondant à une génération projective bien connue de la cubique gauche comme intersection de trois plans.

et une troisième relation indépendante

$$L_3 + tM_3 + t^2N_3 = 0 \ . \qquad (23)$$

Pour la courbe du quatrième ordre nous avons deux relations

$$L_1 + tM_1 = 0 \ , \qquad L_2 + tM_2 = 0 \qquad (22)$$

L'élimination de t détermine la courbe comme intersection partielle d'une surface quadrique et d'une surface cubique avec une ligne double tracée sur la dernière, et qui est aussi une génératrice de la quadrique[1].

Théorème. — *La courbe unicursale du* n^{me} *degré peut être considérée comme engendrée par l'intersection des plans tangents à 3 surfaces développables pour lesquelles la somme des classes est* n :

$$\left.\begin{array}{l} L_1t^a + M_1t^{a-1} + \ldots = 0 \ , \\ L_2t^b + M_2t^{b-1} + \ldots = 0 \ , \\ L_3t^c + M_3t^{c-1} + \ldots = 0 \ , \end{array}\right\} \text{avec} \quad a + b + c = n \ .$$

Lorque $n = 3m$ la classe de chaque surface sera ordinairement m ; quand $n = 3m + 1$ elle sera respectivement m, m, $m + 1$ enfin elle sera m, $m + 1$, $m + 1$ lorsque $n = 3m + 2$.

15. — **Espace à n dimensions.** — Nous pouvons énoncer les théorèmes suivants.

I. *Une courbe unicursale de degré* m, m *étant inférieur à* n, *appartient à un espace ayant au plus* m *dimensions.*

II. *Une courbe de degré* n *qui n'est pas contenue dans un espace inférieur est nécessairement unicursale.*

On peut la considérer comme engendrée par le point commun à

$$\begin{array}{l} L_1 + tM_1 = 0 \\ L_2 + tM_2 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ L_n + tM_n = 0 \end{array}$$

---

[1] Le lecteur peut vérifier l'affirmation suivante :

Il y a deux sortes de courbes unicursales du quatrième ordre. La première a un point multiple et est l'intersection complète de deux quadriques qui sont tangentes en un point de contact.

La seconde variété ne peut être que sur une seule quadrique et n'a pas de point multiple.

S'il y a un point multiple (x, y, z), les équations (22) doivent être compatibles par rapport à (x, y, z) pour deux valeurs de t. Par conséquent

$$L_1 = 0 \ , \qquad M_1 = 0 \ ; \qquad L_2 = 0 \ , \qquad M_2 = 0$$

et la quadrique

$$L_1M_2 - L_2M_1 = 0$$

est un cône.

III. *Une courbe de degré* n + 1, *si elle est unicursale, peut généralement être représentée, avec un choix convenable de coordonnées homogènes, par les équations*

$$\rho x_1 = (t - a_1)^{n+1}$$
$$\rho x_2 = (t - a_2)^{n+1}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\rho x_{n+1} = (t - a_{n+1})^{n+1}$$

IV. *Une courbe unicursale du* m^me *degré peut être considérée comme engendrée par les* n *équations.*

$$f_a(x_1, x_2, x_3 \ldots t) = 0$$
$$f_b(x_1, x_2, x_3 \ldots t) = 0$$
etc.

dans lesquelles les n *fonctions* f *sont des fonctions linéaires des coordonnées et sont de degrés* a, b, c, *en* t, *tels que* a + b + ... = *m*

Ch. Tweedie (Edimbourg).

Traduction de Mlle R. Masson (Genève).

SUR LES DYADS ET LES DYADICS DE GIBBS

1. — Les disciples de Hamilton et de Gibbs, dans leurs critiques[1] à nos travaux sur la théorie générale des vecteurs et des homographies vectorielles[2], soutiennent que le système qu'ils ont adopté (de Hamilton ou de Gibbs) est *complet, parfait et digne d'être considéré comme système universel.* Or ces deux systèmes étant distincts et, encore plus, en contradiction entre eux, on doit donc conclure que les deux groupes de partisans ont tort tous les deux.

Le système originel des quaternions de Hamilton (avec les symboles I, I^{-1}) est sans doute parfait pour sa généralité et sa précision ; mais il est incomplet[3], car il ne peut donner que d'une manière tachygraphique et au moyen de vecteurs de référence, les homographies (qui ont 9 dimensions) et les dérivées par rapport à un point (à 9, 27... dimensions).

Il est inutile de parler des systèmes de pseudo-quaternions, dérivés du système de Hamilton ; ils sont inexacts dans leur fondement ; ils font usage de notations illogiques ; ils ne peuvent pas amplifier le champ des vrais quaternions de Hamilton.

Nous avons accepté le principe de Gibbs d'*indiquer avec un signe d'*OPÉRATION *(et non de fonction)* le *produit intérieur et vectoriel.* Mais nous n'avons pas pu accepter les signes correspondants . , ×, pour des raisons historiques et surtout parce que le *point* est signe

---

[1] *L'Enseignement mathématique,* XIe année (1909), p. 46, 129-134, 211-217, 459-466 ; XIIe année (1910), p. 39-54 ; XIIIe année (1911), p. 138-148.

The unifications of vectorial notations by E.-B. Wilson in *Bull. of the American Math. Society,* 2d series, v. XVI, n° 8, p. 415-436, New-York (1910) ; et un article de M. J.-B. Shaw in *Bulletin of the International Association for promoting the study of Quaternions and allied systems of Mathematics,* p. 26-27, October 1910.

[2] Nos notations et la bibliographie complète de nos travaux sont exposés dans notre livre : *Elementi di Calcolo vettoriale,* Bologna, Zanichelli, 1909 ; *Éléments de Calcul vectoriel,* traduit de l'italien par S. Lattès, Paris, Hermann, 1910.

On peut voir aussi : *Omografie vettoriali,* etc., Torino, Petrini, 1909. Les formules et les opérations qui se trouvent dans la première partie de cet ouvrage suffisent pour aborder la plus grande partie des questions géométriques, mécaniques et physiques auxquelles le calcul vectoriel minimum ne s'applique pas. C'est ce que nous avons prouvé dans la seconde partie de notre livre et dans plusieurs autres publications, dont nous donnerons prochainement la liste. Il s'agit de presque *quatre-vingt* travaux de MM. Burali, Boggio, Cisotti, Colonnetti, Garbasso, Lazzarino, Levi-Civita, Maggi, Marcolongo, Palomby, Santangelo, Vivanti.

[3] *Éléments de calcul vectoriel,* p. 204.

de *séparation;* et si on lui donne d'autres significations, on peut faire naître des confusions. Nous avons adopté les signes $\times$, $\wedge$; mais la forme du signe n'a pas d'importance, pourvu qu'elle soit *pratique* et soit *toujours* celle d'une opération. On pourra choisir à plaisir, même parmi les signes astronomiques!

Nous avons fait une longue critique du ∇ de Gibbs[1]. Ce ∇, avec des signes à droite ou à gauche, est un opérateur; puis il devient un *vecteur symbolique;* il finit naturellement par être un symbole inefficace, et bien différent du *nabla* de Hamilton qui est un symbole parfait et puissant, mais *seulement pour les quaternions.*

Nous n'avons jamais parlé des *dyads* et des *dyadics* de Gibbs, qui forment la base de la théorie de la transformation linéaire des vecteurs en vecteurs.

Cette théorie de Gibbs, considérée comme une des premières tentatives, a eu certainement sa valeur; quoique nous croyons que les méthodes fonctionnelles parfaites de Hamilton auraient dû faire suivre à Gibbs une autre route. Mais leur valeur réelle est presque nulle; et le lecteur pourra aisément se convaincre de ce que nous avançons par l'exposition suivante, très rapide, des choses fondamentales de la théorie des *dyads*[2].

2. — Soit: $\mathbf{r}$ un vecteur, $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i$ ($i = 1, 2, \ldots n$) deux *successions* de vecteurs. Gibbs considère le vecteur $\mathbf{r}'$, fonction linéaire de $\mathbf{r}$, au moyen des successions $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i$:

$$(1) \qquad \begin{cases} \mathbf{r}' = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 \times \mathbf{r} + \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 \times \mathbf{r} + \ldots \\ \mathbf{r}' = \mathbf{r} \times \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{a}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{a}_2 + \ldots ; \end{cases}$$

ces deux formes[3] dérivent de ce que l'on a écrit à droite ou à gauche du vecteur $\mathbf{a}_i$, le nombre $\mathbf{b}_i \times \mathbf{r} = \mathbf{r} \times \mathbf{b}_i$ qui le multiplie.

De ces formes *effectives,* Gibbs passe, tout court, aux formes *symboliques*

$$(1') \qquad \begin{cases} \mathbf{r}' = (\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2\mathbf{b}_2 + \ldots) \times \mathbf{r} \\ \mathbf{r}' = \mathbf{r} \times (\mathbf{b}_1\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_2\mathbf{a}_2 + \ldots) ; \end{cases}$$

---

[1] *L'Enseignement mathématique,* XIII[e] année (1911), p. 143.

[2] Cette théorie a été l'objet de la dernière partie des *Elements of Vector-Analysis* dans les leçons de 1881-82, qui ont été imprimées dans *The scientific Papers* of J. Willard Gibbs, New-York, 1906, v. II, p. 17-90. Mais ces recherches ne furent connues qu'après la publication de la *Vector Analysis* par M. Wilson (New-York, 1902; 2[e] édition 1909) dont elle occupe les derniers chapitres. C'est encore la partie la moins connue de l'œuvre de Gibbs; les auteurs allemands qui en parlent se limitent en effet aux premières définitions et n'ont pas fait d'applications — qui sont peu nombreuses aussi dans la *Vector Analysis.* Nous parlerons plus loin du livre de M. Jaumann.

[3] Aux symboles d'opérations . $\times$ de Gibbs nous substituons nos symboles $\times$, $\wedge$. Dans (1) les points sont des séparateurs; ainsi $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 \times \mathbf{r}$ est la même chose que $\mathbf{a}_1 (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{r})$, c'est-à-dire le produit du vecteur $\mathbf{a}_1$ par le nombre $\mathbf{b}_1 \times \mathbf{r}$.

et avec les positions

$$\Phi = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots , \qquad \Psi = \Phi_c = b_1a_1 + b_2a_2 + \ldots ,$$

il donne aux (1) les formes

$$(1'') \qquad r' = \Phi \times r , \qquad r' = r \times \Phi_c ,$$

Gibbs ne manque pas de donner un *nom* aux formes considérées : Φ est une *dyadic;* Φ_c est la *dyadic conjuguée* de Φ; les parties a_ib_i ou b_ia_i sont des *dyads.*

Mais il ne donne pas une définition formelle, logiquement précise et absolue de la *dyad* et des *dyadics* et le passage *arbitraire* de la forme effective (1) à la forme symbolique (1') ou (1'') constitue la seule définition des *dyad* et des *dyadics.* Quelle différence avec la précision de Hamilton !

Si l'on fait usage de notre[1] symbole H les relations (1) prennent la forme unique

$$(2) \qquad r' = \{ H(b_1, a_1) + H(b_2, a_2) + \ldots \} r .$$

et il *parait* alors que la correspondance entre la notation de Gibbs et notre H soit exprimée par la formule

$$(2) \qquad (a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots) \times = H(b_1, a_1) + H(b_2, a_2) + \ldots$$

ou bien, pour un seul terme,

$$(3) \qquad (ab) \times = H(b, a) . \text{ [2]}$$

Mais Gibbs dit encore (p. 272) : « *On the other hand the product* ab *is neither vector nor scalar — it is purely symbolic and acquires a determinate physical meaning only when used as operator.* » Alors il *parait* qu'au lieu de (3) on doit avoir

$$(4) \qquad ab = H(ba).$$

Il n'est pas possible d'imaginer une plus grande confusion. Le ab que Gibbs appelle *indeterminate product* est en réalité une entité *indéterminée !*

3. — Dans les formules suivantes, le premier membre donne la

[1] *Omografie vettoriali,* p. 20. $H(u, v)$ est l'homographie telle que si x est un vecteur arbitraire on a

$$H(u, v)x = u \times x \cdot v .$$

[2] Nous ne pouvons pas traduire la 2e forme (1), car nous considérons seulement les opérateurs à gauche. Et nous n'avons pas besoin, comme Gibbs, des opérateurs à droite, puisqu'on a (*Omogr. vett.*, p. 20)

$$K H(u, v) = H(v, u) .$$

notation de produit simple ou double des dyads et des vecteurs; le second est la définition du premier, suivant Gibbs; et le troisième établit la correspondance, d'après (4), entre le second membre et notre H.

$$(5) \qquad (ab) \times (cd) = b \times c \cdot ad = H(b, a) \cdot H(d, c)$$

$$(6) \qquad (ab) \wedge r = a(b \wedge r) = - H(r, a) \cdot b \wedge$$

$$(7) \qquad ab \mathop{\times}\limits^{\times}_{\times} cd = a \times c \cdot b \times d = \frac{d \times \{H(c, d) \cdot H(b, a)\} d}{d^2}$$

$$(8) \qquad ab \mathop{\wedge}\limits^{\wedge}_{\wedge} cd = (a \wedge c)(b \wedge d) = - a \wedge \cdot H(d, c) \cdot b \wedge .$$

La relation (5) dit que le produit intérieur de *deux dyads* n'est que leur *produit fonctionnel*. Après l'usage magistral qu'Hamilton a fait du produit fonctionnel, le produit intérieur de deux dyads (ou de deux dyadics) n'a plus de raison à être considéré.

Les derniers membres de (6), (7) ... (9) démontrent l'inutilité des premiers, dès que l'on a introduit l'homographie H(**u**, **v**), si naturelle et si logique; et ils démontrent aussi leur inutile complication, indépendamment de H.

4. — La définition des trois membres des formules suivantes est analogue à celle des formules (5) ... (8) suivant Gibbs; Φ_S et $\Phi_\wedge$ sont respectivement le *scalaire* et le *vecteur* de Φ; Φ_2 est le *second* de Φ.

$$(9) \qquad \begin{cases} \Phi_S = a_1 \times b_1 + \ldots = I_1 \Phi \\ \Phi_\wedge = a_1 \wedge b_1 + \ldots = - 2V\Phi \end{cases}$$

$$(10) \qquad \Phi_2 = \frac{1}{2} \Phi \mathop{\wedge}\limits^{\wedge}_{\wedge} \Phi = R\Phi \quad [1]$$

$$(11) \qquad (\Phi_2)_S = I_2 \Phi$$

$$(12) \qquad \Phi_3 = \frac{1}{3} \Phi_2 \mathop{\times}\limits^{\times}_{\times} \Phi = I_3 \Phi .$$

Scalaire signifie *nombre*; pourquoi alors appeler scalaire de Φ seulement Φ_S; $(\Phi_2)_S$ et Φ_3 ne sont-ils pas aussi des nombres? A nos notations uniformes, qui ont une définition très simple et que nous introduisons dès le début de la théorie :

$$I_1 \Phi , \quad I_2 \Phi , \quad I_3 \Phi$$

---

[1] Pour cet opérateur R, voir : *Omogr. vett.*, p. 24.
Il faut aussi se rappeler que

$$I_1 R \alpha = I_2 \alpha .$$

(Ibidem, p. 25, form. (6)).

correspondent les notations de Gibbs :

$$\Phi_S, \quad (\Phi_2)_S, \quad \Phi_3 ;$$

elles ne sont pas uniformes, et, ce qui est plus important, elles ont une définition très compliquée. Il faut encore observer l'*analogie* des deux notations Φ_2, Φ_3 malgré leur grande diversité !

La Φ_2 correspond à l'opérateur R que nous avons défini d'une manière très simple, absolue et qui nous a été d'une grande utilité dans les applications.

5. — Suivant nos notations, nous avons identiquement

$$\alpha = \mathrm{H}(\mathbf{i}, \alpha\mathbf{i}) + \mathrm{H}(\mathbf{j}, \alpha\mathbf{j}) + \mathrm{H}(\mathbf{k}, \alpha\mathbf{k})$$
$$\mathrm{K}\alpha = \mathrm{H}(\alpha\mathbf{i}, \mathbf{i}) + \mathrm{H}(\alpha\mathbf{j}, \mathbf{j}) + \mathrm{H}(\alpha\mathbf{k}, \mathbf{k}) ;$$

α est une homographie, **i**, **j**, **k** est un *système orthogonal dextrorsum.*

Gibbs arrive aussi à une forme semblable pour une homographie générale au moyen de *trois* dyads ; ainsi pour Gibbs toute homographie dépend de neuf vecteurs, dont trois sont fixes ; tandis que pour nous une homographie est indépendante de tout vecteur de référence.

Nous réduisons une homographie à la somme de sa *dilatation* et d'une *homographie axiale,* qui sont d'un usage continuel dans les applications. Les mêmes éléments figurent aussi dans Gibbs *(self-conjugate ; anti-self-conjugate dyadic),* mais sous une forme si compliquée que leur usage dans la pratique est impossible. Et c'est pour cela que ces éléments constitutifs et essentiels d'une homographie ne jouent pas un rôle bien important dans le livre de Gibbs.

6. — En résumé, les notations de Gibbs sont en contradiction avec les lois fonctionnelles, claires, simples et fécondes de Hamilton ; et les parties utiles et pratiques de sa théorie des transformations linéaires restent cachées sous un symbolisme incommode et incorrect.

Ces défauts arrivent à un maximum dans l'ouvrage de M. Jaumann[1]. Il ne paraît pas que M. Jaumann ait une idée bien claire du signe, =, d'égalité ; car pour exprimer que deux vecteurs, deux dyads, etc., sont égaux, il croit bon de superposer au signe = les nombres 3, 5, 9, ... 27. Par cela il veut signifier que l'équation vectorielle considérée peut être substituée par 3, 5, 9, ... 27 équations algébriques entre les coordonnées ; il fait donc aussi de la tachygraphie cartésienne et non pas du calcul vectoriel.

[1] *Die Grundlagen der Bewegungslehre von einem modernen Standpunkte aus,* Leipzig, Barth, 1905.

La notation ab de Gibbs pour une dyad pouvant se confondre avec celle du bivecteur de Grassmann, M. Jaumann doit s'éloigner des notations de Gibbs; et il écrit a, b pour la dyad. Ainsi la *virgule* a acquis le caractère d'un signe d'opération, ce qui n'est certainement pas convenable.

Mais M. Jaumann trouve aussi nécessaire de considérer deux dyads; la dyad *scalaire* $a \overset{\times}{,} b$, qui est celle de Gibbs et la *dyad de rotation* $a \overset{\wedge}{,} b$. Ne considérons pas le peu de précision des définitions et des notations de M. Jaumann; observons seulement que $a \overset{\wedge}{,} b$ correspond à notre opérateur vectoriel $a \wedge . b \wedge$; c'est-à-dire au produit des deux *homographies axiales* $b \wedge$, $a \wedge$. Mais il est facile de vérifier que

$$a \wedge . b \wedge = H(a , b) - a \times b$$

n'est pas une rotation et, par conséquent, la dénomination de M. Jaumann est inexacte; d'un autre côté $a \overset{\wedge}{,} b$ est un opérateur qui dépend d'autres opérateurs plus simples au moyen d'opérations fonctionnelles bien définies; il ne doit donc être pris comme opérateur primitif!

Le ∇ de Gibbs est pour M. Jaumann une bonne source de nouveaux tachygraphes cartésiens. Pour bien voir leur inopportunité, même comme tachygraphes, il suffit de les confronter avec les formes qu'ils prennent avec notre opérateur *absolu* et bien défini $\frac{d}{dP}$. La *dérivation scalaire* et *sa conjuguée*, que M. Jaumann écrit avec les notations symboliques

$$a \times \nabla \overset{\times}{,} b = (a \times \nabla) b , \quad a \times b \overset{\times}{,} \nabla = \nabla_b a \times b ,$$

correspondent à nos notations *simples* et *absolues* et qui ont une *signification fonctionnelle très précise*[1] :

$$\frac{db}{dP} a , \quad K \frac{db}{dP} a .$$

La *dérivation de rotation et sa conjuguée* sont exprimées par M. Jaumann par

$$a \times b \overset{\wedge}{,} \nabla , \quad (a \wedge \nabla) \wedge b$$

---

[1] Les auteurs allemands font usage de la notation (a grad) b (*Omogr. vett.*, p. 51). Cette notation a beaucoup de défauts. Le vecteur qu'elle représente n'a rien à voir avec *gradient*.

Il parait que ce vecteur est obtenu *en appliquant à* b *un opérateur fonction* de a; tandis que c'est le contraire qui a lieu; c'est-à-dire que ce vecteur s'obtient *en appliquant a* a *un opérateur fonction de* b.

Voilà les erreurs logiques qui dérivent de la formation, par simple analogie, de tachygraphes cartésiens.

a $\wedge \nabla$ est un nouvel *opérateur symbolique!*) : elles correspondent, avec nos notations, aux

$$- \operatorname{div} \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \frac{d\mathbf{b}}{dP}\mathbf{a} , \qquad - \operatorname{div} \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + K\frac{d\mathbf{b}}{dP}\mathbf{a} .$$

Il est bien entendu que M. Jaumann obtient tout cela avec les coordonnées et ensuite ses opérateurs symboliques font ressembler ses formules à de véritables hiéroglyphes égyptiens. Il n'y a rien d'absolu et de concret dans ces opérateurs ; rien qui soit pratique et qui réponde aux idées logiques précises de l'œuvre magistrale de Hamilton.

Ces opérateurs symboliques, semblables à ceux dont Gibbs et ses élèves font un si large usage, sont donc inutiles et ils ont beaucoup retardé le développement logique du calcul vectoriel. Nous espérons l'avoir démontré, d'après ce que nous avons dit.

C. Burali-Forti (Turin) et R. Marcolongo (Naples).

DÉFINITION DES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES PAR LEUR THÉORÈME D'ADDITION

M. Osgood, dans son livre sur la Théorie des fonctions[1], démontre que toutes les fonctions, possédant un théorème d'addition analogue à celui du sin, et cos, sont, au fond, identiques à ces fonctions. La démonstration d'Osgood n'est pas très simple et conduit finalement à l'équation différentielle $y'' + y = 0$. La démonstration peut être simplifiée et comme l'exposé suivant ne suppose rien de l'analyse supérieure, cette détermination des fonctions trigonométriques par une équation fonctionnelle pourrait être accessible à l'enseignement secondaire (dans un exposé un peu serré).

Osgood établit d'une façon élémentaire, au début de son exposé, que la continuité en un point entraîne la continuité en tout point. Nous ferons donc à priori les hypothèses suivantes, qui n'impliquent aucune restriction.

---

[1] *Lehrbuch der Funktionentheorie*, tome I, page 510 et suivantes.

Soient $S(x)$ et $C(x)$ 2 fonctions définies et continues, satisfaisant aux équations fonctionnelles :

$$(1)\qquad \begin{cases} S(x+y) = S(x) \,.\, C(y) + C(x) \,.\, S(y) \\ C(x+y) = C(x) \,.\, C(y) - S(x) \,.\, S(y) \end{cases}$$

$$(2)\qquad S(-x) = -S(x) \;, \qquad C(-x) = C(x) \;.$$

De (2) résulte pour $x = 0$

$$(3)\qquad S(0) = 0 \;.$$

D'où, d'après (1)

$$C(0) = C^2(0) \;;$$

on aura donc soit

$$C(0) = 0 \qquad \text{ou} \qquad C(0) = 1 \;.$$

La 1re valeur donne, en faisant $y = 0$ dans (1) comme solution du problème

$$S(x) = 0 \;, \qquad C(x) = 0 \;.$$

Nous ne considérerons donc dans la suite que le cas

$$(4)\qquad C(0) = 1 \;.$$

De la 2me équation (1) résulte, pour $y = -x$, et d'après (2)

$$(5)\qquad 1 = C^2(x) + S^2(x) \;.$$

Les valeurs des fonctions sont donc comprises entre -1 et $+1$.

On déduit, ensuite, exactement comme en trigonométrie les formules

$$(6)\qquad 2C^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 + C(x) \qquad \text{et} \qquad 2S^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - C(x) \;.$$

Si $x = p$ est un zéro de $S(x)$, $x = np$ est aussi un zéro ; car de (1) résulte pour $y = p$ et $x = p, 2p, 3p, \ldots$ successivement :

$$S(2p) = 0 \qquad S(3p) = 0 \,, \ldots \qquad S(np) = 0 \,, \ldots$$

On peut donc déterminer un intervalle $0 < x \leqq \varepsilon$, ne renfermant aucun zéro ; car, sinon, ε étant pris aussi petit qu'on le désire, les zéros de $S(x)$ s'accumuleraient partout et $S(x)$ serait identiquement 0[1].

[1] La marche suivie jusqu'ici est aussi celle d'Osgood.

A cause de la continuité, le signe de $S(x)$ reste constant dans l'intervalle.

De plus, à cause de (4) et de la continuité de $C(x)$, on peut choisir ε suffisamment petit pour que $C(x)$ reste toujours positif dans l'intervalle.

Soit a un point quelconque de l'intervalle $S(a)$ la valeur correspondante de $S(x)$.

Puisque $|S(a)| < 1$, on peut déterminer un angle α, $-\frac{\pi}{2} < \alpha < +\frac{\pi}{2}$, tel que

$$S(a) = \sin \alpha .$$

D'après (5), et puisque $C(a) > 0$,

$$C(a) = + \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \cos \alpha .$$

De (6) résulte, puisque $S(x)$ conserve dans tout l'intervalle le signe de $\sin \alpha$ et que $C(x)$ reste positif,

$$S\left(\frac{a}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} = + \sin \frac{\alpha}{2} ,$$

et, par répétition, pour un entier positif

$$S\left(\frac{a}{2^m}\right) = \sin\left(\frac{\alpha}{2^m}\right) \quad \text{et également} \quad C\left(\frac{a}{2^m}\right) = \cos\left(\frac{\alpha}{2^m}\right) .$$

Si l'on emploie successivement les équations (1) pour

$$y = \frac{a}{2^m} , \quad x = \frac{a}{2^m} , \quad \frac{2a}{2^m} , \ \ldots \quad \frac{(n-1)\, a}{2^m} ,$$

on obtient

$$S\left(\frac{n}{2^m}\, a\right) = \sin\left(\frac{n}{2^m}\, \alpha\right) \quad C\left(\frac{n}{2^m}\, a\right) = \cos\left(\frac{n}{2^m}\, \alpha\right)$$

Les points $\frac{n}{2^m}$ sont partout denses. A cause de la continuité, on a donc pour tout p positif,

$$S(p \,.\, a) = \sin(p \,.\, \alpha) , \qquad C(p \,.\, a) = \cos(p\, \alpha) ,$$

et comme les fonctions $S(x)$ et $\sin(x)$, $C(x)$ et $\cos(x)$ sont en même temps paires ou impaires, les relations sont vraies encore si p est négatif.

En faisant enfin

$$pa = x \ , \qquad \frac{\alpha}{a} = \mu$$

on a, pour tout x,

(7) $$S(x) = \sin(\mu x) \qquad C(x) = \cos(\mu x) \ .$$

Une vérification montre que cette forme des fonctions cherchées est non seulement nécessaire, mais encore que toute valeur de μ fournit une solution.

La méthode s'applique aussi à la fonction tg (x).

H. SCHUEPP (Zurich).

(Traduction de M. F. LÉVY, Genève.)

NOUVEAU PROCÉDÉ
POUR LE
DÉVELOPPEMENT DES FRACTIONS DÉCIMALES PÉRIODIQUES SIMPLES

1. — On sait qu'une fraction proprement dite $\frac{R_0}{N}$ à dénominateur N premier relativement à 10, fournit un développement décimal purement périodique. On l'obtient par division décimale de R_0 par N. Nous indiquons, dans ce qui suit, un procédé beaucoup plus simple, qui n'a pas été signalé jusqu'ici, bien qu'il soit élémentaire. Il s'appuie uniquement sur l'addition et la multiplication, il est donc, quant au degré des opérations utilisées, plus simple que le procédé habituel.

Nous supposons le dénominateur N de la forme $10m - 1$, ceci sans nuire à la généralité, car dans les 3 autres possibilités $10m + 1$, $10m + 3$, $10m - 3$, on peut passer à la forme choisie, en multipliant haut et bas par 9, 3 ou 7.

Les équations suivantes traduisent le procédé usité par division :

(1) $$\begin{cases} 10R_0 = N \cdot y_1 + R_1 \ , \\ 10R_1 = N \cdot y_2 + R_2 \ , \\ \dots\dots\dots\dots \\ 10R_{k-1} = N \cdot y_k + R_k \ . \end{cases} \qquad (k = 1, 2, 3 \dots)$$

où R_1, R_2... sont les restes des divisions successives et $y_1\ y_2$... les chiffres du développement cherché.

Avec ces équations on peut montrer, sous l'hypothèse faite, N premier relativement à 10, que le développement est purement périodique; et aussi que R_k est en même temps reste de la division $10^k\ R_0 : N$.

Si R_t est le premier reste égal à R_0, t est la longueur de la période, dont les chiffres sont $y_1\ y_2 \cdots y_t$.

Décomposons R_k en la somme de ses dizaines et de ses unités:

$$R_k = 10z_k + e_k\ .$$

On déduit de (1), en faisant $N = 10m - 1$,

$$10R_{k-1} = (10m - 1)y_k + 10z_k + e_k = 10(my_k + z_k) + e_k - y_k\ .$$

Il en résulte que $e_k - y_k$ est divisible par 10, ce qui ne peut être que si

$$(3) \qquad e_k = y_k\ , \qquad \text{puisque} \qquad e_k \text{ et } y_k \leq 9\ .$$

D'où réduction de l'équation ci-dessus à

$$(4) \qquad R_{k-1} = my_k + z_k\ , \qquad \text{ou} \qquad R_{k-1} = me_k + z_k\ .$$

On a donc le *théorème:* Si le dénominateur de la fraction $\frac{R_0}{N}$ a la forme $10m - 1$, la suite des chiffres de la période de son développement décimal est la même que celle des unités des restes successifs. En particulier, de $R_t = R_0$ résulte que le dernier chiffre de la période est le chiffre des unités du numérateur $R_0 = 10z_0 + e_0$. Pour le procédé habituel, cette propriété reste sans emploi, puique les e_k se déduisent immédiatement après les y_k.

Mais la formule récurrente (4) permet de calculer en sens contraire la suite des restes, d'où se déduira la période renversée.

D'abord nous avons de $R_0 = R_t$ la valeur e_t. De (4) résulte e_{t-1} et ainsi de suite. Le calcul se termine sitôt qu'est obtenu un reste égal à R_0.

La simplicité de ce procédé ressort des *exemples suivants:*

1° Développer $\frac{34}{39}$;

$$m = 4 \qquad R_0 = R_t = 34 \qquad e_t = 4 \qquad z_t = 3\ .$$

L'on peut disposer le calcul d'après le schéma suivant :

e_k	8	7	1	7	9	4
z_k	2	0	3	3	1	3
me_k	32	28	4	28	36	16
R_{k-1}	34	28	7	31	37	19

D'où $\frac{34}{39} = 0,\overline{871794}$.

2° Soit la fraction $\frac{2}{7}$. Pour donner au dénominateur la forme voulue, multiplier haut et bas par 7. Alors $m = 5$ et l'on obtient

$$\frac{2}{7} = \frac{14}{49} = 0,\overline{285714} .$$

Les opérations, effectuées de tête, sont

$R_0 = 14$	Chiffre 4
$5 . 4 + 1 = 21$	» 1
$5 . 1 + 2 = 7$	» 7
$5 . 7 + 0 = 35$	» 5
$5 . 5 + 3 = 28$	» 8
$5 . 8 + 2 = 42$	» 2
$5 . 2 + 4 = 14 = R_0$	

II. — Après avoir exposé très élémentairement le procédé donnons encore une deuxième démonstration moins simple, mais qui fait apparaître la dépendance de la suite des restes de la forme du dénominateur, et enlève à la première démonstration ce que son début a d'arbitraire.

Lorsque

$$ab \equiv 1 \pmod{N} ,$$

où a et b sont relativement premiers à N, les nombres a et b appartiennent au même exposant t Euler appelle a et b, nombres associés ; Kronecker, diviseurs conjugués de l'unité . Ces nombres satisfont aux congruences :

$$a^s \equiv b^{t-s} \pmod{N}$$

c'est-à-dire que les puissances croissantes de a

$$a^0 a^1 a^2 \dots a^t$$

donnent les mêmes restes que les puissances décroissantes du nombre associé b,

$$b^t\, b^{t-1} \ldots b^1\, b^0 .$$

La justesse de cette propriété, qui est parfois utile lors de la détermination de racines primitives, se vérifie en élevant à la puissance s, la congruence

$$ab \equiv 1 \pmod{N} .$$

D'où, après multiplication par b^{t-s}.

$$a^s \equiv b^{t-s} \pmod{N} .$$

Mais 10 et m sont associés d'après

$$10m \equiv 1 \,(\text{mod } N = 10m - 1) .$$

Donc les restes de

$$10^0,\ 10^1,\ 10^2, \ldots\ 10^t$$

sont identiques à ceux de

$$m^t\ ,\quad m^{t-1}\ ,\quad m^{t-2}\ , \ldots\ m^0 .$$

Par exemple, par suite de $10 . 4 \equiv 1 \pmod{39}$, les puissances

	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
restes :	1	10	22	25	16	4	1

et les puissances :

	4^0	4^1	4^2	4^3	4^4	4^5	4^6
restes	1	4	16	25	22	10	1

donnent les mêmes restes en sens contraire.

De même, en général, les restes de

$$10^0 R_0 \quad 10^1 R_0 \quad 10^2 R_0 \quad 10^k R_0 \quad 10^{t-1} R_0 \quad 10^t R_0$$

et de

$$m^0 R_0 \quad m^1 R_0 \quad m^2 R_0 \quad m^k R_0 \quad m^{t-1} R_0 \quad m^t R_0$$

sont les mêmes, en ordre renversé.

Soit donc, $R_k = 10z_k + e_k$, le reste de $10^k R_0$, ou, d'après ce qui précède, de $m^{t-k} R_0$. Alors on a, pour le module, $N = 10m - 1$,

$$R_{k-1} \equiv m^{t-k+1} R_0 \equiv m R_k \equiv m(10z_k + e_k)$$
$$\equiv (10m - 1) z_k + (me_k + z_k) .$$

D'où

$$R_{k-1} \equiv me_k + z_k (\text{mod } N) .$$

De $R_k < N$, ou $10z_k + e_k < 10m - 1$, résulte $z_k < m - 1$. En tenant compte, en plus, de $e_k \leq 9$, on a $me_k + z_k < 10m - 1$ et

$$R_{k-1} = me_k + z_k ,$$

ce qui est la formule récurrente, retrouvée à nouveau.

Le $k^{ième}$ chiffre de la période, se déduit comme nombre entier de $\frac{10R_{k-1}}{10m - 1}$ et comme

$$10R_{k-1} = 10(me_k + z_k) = (10m - 1)e_k + 10z_k + e_k$$

on voit de suite qu'il est justement e_k.

La première démonstration, plus immédiate de la formule récurrente, est due à mon fils P. Pasternak, ingénieur à Zurich.

Mai 1911. Léon Pasternak (Zurich).

(Traduction de M. F. Lévy, Genève.)

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Sur l'axiome planaire de M. Peano.

Parmi les axiomes adoptés par M. Peano pour le fondement de la Géométrie figure une proposition que l'on peut exprimer de la manière suivante :

A, B, C *désignant trois points qui n'appartiennent pas à une même droite,* D *désignant un point du segment* BC, *et* E *un point du segment* $\overline{AD}$; *la droite* BE *contient un point* F *de la droite* AC ; *ce point appartient au segment* $\overline{AC}$, *et le point* E *appartient au segment* $\overline{BF}$.

Je sépare, pour les distinguer, les trois propriétés ainsi postulées et dont la première seule est proprement projective, tandis que les deux autres sont visiblement des propriétés de *connexion.*

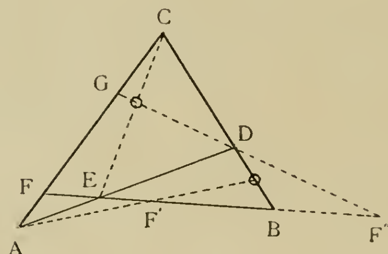
On sait qu'un second axiome planaire de M. Peano a été signalé

par M. Moore[1] comme superflu et est, en effet, une conséquence du précédent. Il est facile de reconnaître que la troisième des propriétés exprimées ci-dessus est aussi une conséquence des deux premières, et c'est sa démonstration qui fait l'objet de cette Note. Il est d'ailleurs manifeste que l'axiome ainsi réduit ne saurait l'être davantage, car la première propriété constitue la condition évidemment indispensable de l'existence du plan et la seconde définit sa connexion, soit : *le plan est une surface.*

On sait que l'une des propriétés de l'ordre linéaire ouvert peut, appliquée à la droite, être exprimée de la manière suivante :

Parmi trois points d'une droite, il y en a toujours un, et un seulement, qui appartient au segment défini par les deux autres.

Il suffit donc d'établir que F ne peut pas appartenir au segment $\overline{BE}$ ni B au segment $\overline{EF}$.



Le point D appartenant au segment $\overline{BC}$, C ne peut appartenir au segment $\overline{BD}$ (propriété de l'ordre linéaire ouvert), et, par suite, aucune droite contenant A et un point de ce segment ne pourra contenir aucun point de la droite AC distinct de A, deux droites ne pouvant avoir plus d'un point commun. En conséquence, F′ désignant un point quelconque du segment $\overline{BE}$, la droite $\overline{AF'}$, devant contenir un point du segment $\overline{BD}$ (axiome réduit), ne pourra contenir aucun point de la droite AC distinct de A, et, par suite, F′, c'est-à-dire un point quelconque du segment $\overline{BE}$, ne peut appartenir à la droite AC.

Si F″ désigne un point quelconque du prolongement du segment $\overline{EB}$, c'est-à-dire si le point B appartient au segment $\overline{F''E}$, la droite F″D devra contenir un point du segment $\overline{CE}$ (axiome réduit) et devra aussi, par suite, E appartenant par hypothèse au segment $\overline{DA}$, contenir un point G du segment $\overline{CA}$ (axiome réduit). La droite AC ne pouvant ainsi avoir avec la droite GD aucun point

[1] E. H. Moore. On the projective axiomes of geometry, *Trans. of the Amer. Math. Soc.*, vol 3 (1907), p. 147. — Cf. Schur, *Grundlagen der Geometrie*, Teubner, Leipzig, 1909, p. 7-9.

commun distinct de G, ne peut, en particulier, contenir F″, c'est-à-dire un point quelconque du prolongement du segment $\overline{EB}$.

La troisième des propriétés exprimées dans l'axiome planaire de M. Peano est donc bien démontrée en fonction des deux premières et de celles qui sont exprimées par l'axiome d'ordre rappelé plus haut et par l'axiome d'après lequel *une droite est définie par deux quelconques de ses points.*

G. Combebiac (Limoges).

Sur la topologie des courbes interscendantes.

Extrait d'une lettre de M. G. Loria à Gènes,
à propos d'une Note de M. Turrière (Poitiers).

...Les remarques très sensées de M. Turrière sur les « courbes transcendantes et interscendantes » (*L'Enseignement mathématique,* T. XIV, p. 209) m'entraînent de nouveau dans un champ de recherche où je me suis tenu pendant longtemps et dans lequel je reviens toujours avec plaisir. « J'y suis, j'y reste » pour observer qu'une phrase écrite par ce géomètre a besoin, si je ne me trompe, d'un commentaire pour être comprise à sa juste valeur.

En effet, M. Turrière dit que les paraboles $y = x^m$, m étant un nombre rationnel, s'approchent de plus en plus de la courbe $y = x^{\sqrt{2}}$; or je dis qu'il faut se restreindre à ce qui arrive dans l'angle des coordonnées positives. Pour le prouver, il faut et il suffit de considérer ce qui suit :

1° Suivant que le nombre positif $m \gtrless 1$, et suivant la forme arithmétique de son expression réduite à ses termes moindres, les paraboles $y = x^m$ se présentent sous une des SIX formes données par les figures ci-jointes :

2° Si on développe 2 en fractions continues on trouve

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dots}}}\;.$$

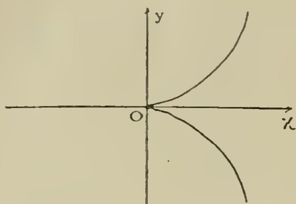
Les premières réduites sont 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{17}{12}$ et les réduites suivantes ont alternativement les formes

$$\frac{2h+1}{2k+1} \qquad \text{et} \qquad \frac{2h+1}{2k}$$

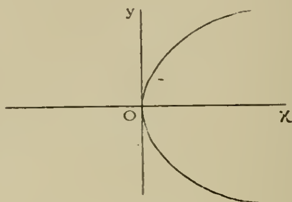
comme il s'ensuit de la loi de formation des réduites.

Si donc on s'arrête à une réduite de rang impair on a comme « courbe approchante » de la courbe $y = x^{\sqrt{2}}$ une courbe qui a la

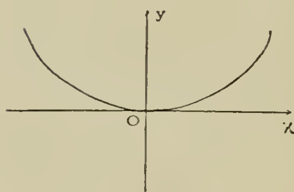
forme donnée par la fig. 6 ; si au contraire on s'arrête à une réduite de rang pair on trouve que la « courbe approchante » a la forme donnée par la fig. 4. Ces deux formes coïncident dans l'angle $\overset{+}{X}O\overset{+}{Y}$, mais sont tout à fait différentes dans les autres régions du plan, de manière qu'on ne peut parler de limite de ces



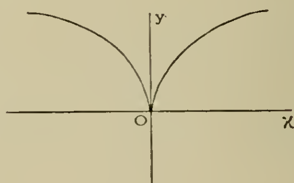
(Fig. 1) : $m = \dfrac{2h}{2k+1} < 1$.



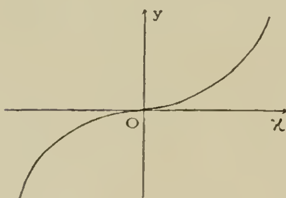
(Fig. 2) : $m = \dfrac{2h}{2k+1} > 1$.



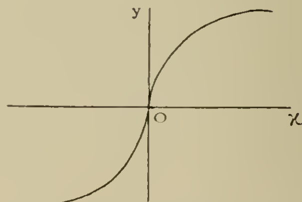
(Fig. 3) : $m = \dfrac{2h+1}{2k} < 1$.



(Fig. 4) : $m = \dfrac{2h+1}{2k} > 1$.



(Fig. 5) : $m = \dfrac{2h+1}{2k+1} < 1$.



(Fig. 6) $m = \dfrac{2h+1}{2k+1} > 1$.

courbes que dans l'angle de coordonnées positives. On peut généraliser ce résultat à toutes les courbes $y = x^m$ en remarquant que x^m, lorsque m est un nombre irrationnel, est une « fonction bien définie » seulement pour les valeurs positives de x. Cela prouve que la topologie des paraboles interscendantes est bien différente de celle des paraboles algébriques, car celles-là, à dif-

férence de celles-ci, présentent à l'origine un *point d'arrêt*. Je crois que des phénomènes analogues, mais plus compliqués, se présenteront en d'autres courbes interscendantes, par exemple dans la courbe

$$y = \frac{x}{2\sqrt{2}}\left(ax^{\sqrt{2}} - \frac{1}{ax^{\sqrt{2}}}\right).$$

rappelée par M. Turrière et qui serait digne d'une étude détaillée au point de vue de la forme. On peut dire même en général que, si les courbes interscendantes ont été peu considérées, leur topologie est toute à faire...

G. Loria (Gênes).

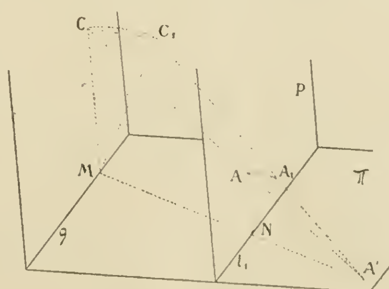
Une démonstration élémentaire du théorème fondamental de la collinéation centrale.

A propos d'un article de M. L. Crelier (Bienne).

Dans un article intitulé Les figures collinéaires (*L'Enseignement mathématique*, XIVe année, p. 121), M. Crelier publie un chapitre de géométrie élémentaire avec le but de présenter la collinéation centrale d'une manière élémentaire. Dans ce qui suit, j'exposerai une démonstration élémentaire du théorème fondamental de la collinéation centrale, que M. Crelier avait aussi touché.

Le théorème est le suivant :

Deux figures collinéaires restent collinéaires si l'on fait tourner d'un angle quelconque le plan de l'une autour de l'intersection des deux plans. Le centre tourne en même temps et en même sens du même angle autour du premier axe secondaire.



Soit (fig.) le point A' du plan π comme projection centrale du point A situé dans le plan P, relativement au centre C. Faisons tourner P d'un angle φ autour de t_1 et en même temps et dans le

même sens du même angle le centre C autour de q ; t_1 — l'axe de collinéation — étant l'intersection de P et π ; q — le premier axe secondaire — étant l'intersection de π avec le plan mené par C parallèlement à P. Supposons que, par le mouvement de rotation, A soit venu en A_1 et C en C_1.

En désignant par M le centre de la circonférence décrite par C et par N celui de la circonférence décrite par A, nous constatons que les triangles CMC_1 et ANA_1 sont semblables, parce que tous les deux sont isoscèles et par condition $\sphericalangle CMC_1 = \sphericalangle ANA_1$. Et comme les triangles sont aussi semblablement situés, on a :

$$CC_1 \parallel AA_1, \tag{1}$$

De la similitude des triangles A'NA et A'MC on a :

$$A'A : A'C = NA : MC. \tag{α}$$

De même de la similitude des triangles ANA_1 et CMC_1 on a :

$$NA : MC = AA_1 : CC_1. \tag{β}$$

De (α) et (β) on obtient :

$$A'A : A'C = AA_1 : CC_1, \tag{2}$$

La relation (2) avec le résultat (1) dit que la ligne de jonction des points A_1 et C_1 passe par A'. Le théorème est donc démontré.

L. Hantos (Kecskemét, Hongrie).

Sur un certain développement en fraction continue.

A propos d'une communication de M. Baatard.

Au cours d'une communication présentée à Soleure (*Ens. math.*, 1912, p. 31-37), M. Baatard a signalé une propriété curieuse d'une famille de fractions continues qu'il ne serait peut-être pas inutile de mettre en lumière.

Soient a_0 le terme initial et $a_1, a_2, \dots a_m$ les quotients incomplets d'une période dans le développement en fraction continue de $\sqrt{A}$; je rappelle que $a_m = 2a_0$.

A ce terme initial et à la suite infinie des quotients incomplets répondent les réduites $\frac{p_1}{q_1} = \frac{a_0}{1}$, $\frac{p_2}{q_2}$, ... , $\frac{p_{m+1}}{q_{m+1}}$, etc., qui convergent de plus en plus vers $\sqrt{A}$.

Appliquons à l'une des réduites $\frac{p_n}{q_n}$ le procédé (ω') de M. Baatard[1].

Nous aurons une nouvelle valeur approchée b de $\sqrt{A}$ qui s'exprime ainsi

$$b = \frac{p_n^2 + Aq_n^2}{2p_n q_n}.$$

Or, dans les exemples choisis par M. Baatard, on a, quel que soit n, $b = \frac{p_{2n}}{q_{2n}}$; en d'autres termes, on a la relation

$$(1) \qquad \frac{p_{2n}}{q_{2n}} = \frac{p_n^2 + Aq_n^2}{2p_n q_n}.$$

M. Baatard fait remarquer avec raison que ce fait ne se présente pas toujours.

Une question se pose alors : quels sont les nombres A dont les développements en fraction continue fournissent des réduites vérifiant la condition (1) ?

Je rappellerai d'abord que la relation (1) a lieu pour tout A, lorsque l'indice n est un multiple de m, m étant le nombre des termes de la période.

On a, en effet, quel que soit i,

$$(2) \qquad p_{im} - q_{im}\sqrt{A} = (p_m - q_m\sqrt{A})^i,$$

d'où

$$p_{2im} - q_{2im}\sqrt{A} = (p_m - q_m\sqrt{A})^{2i},$$

et par conséquent (Cf. *Serret*, Cours d'alg. sup., 5e édit., t. I,

---

[1] Dans le cas général d'une racine quelconque $\sqrt[n]{A}$, ce procédé consiste à remplacer une première valeur *approchée* a de $\sqrt[n]{A}$ par la valeur

$$b = \frac{p' + (n-1)a}{n}, \qquad \text{où} \qquad p' = \frac{A}{a^{n-1}}$$

c'est-à-dire par

$$a - \frac{a^n - A}{na^{n-1}} = a - \frac{f(a)}{f'(a)},$$

en posant $x^n - A = f(x)$. On voit donc que le procédé (ω') revient à celui de Newton appliqué à l'équation $x^n - A = 0$. (Cf. Encycl. des Sciences math., Tome I, art. 23, p. 282, et Tome II, art. 26, p. 58.)

p. 76 et 77)

$$(3) \qquad p_{2im} - q_{2im}\sqrt{A} = (p_{im} - q_{im}\sqrt{A})^2 ,$$

ce qui donne bien

$$\frac{p_{2im}}{q_{2im}} = \frac{p_{im}^2 + Aq_{im}^2}{2p_{im}q_{im}} .$$

Mais la relation (1) n'a pas lieu pour tout A, lorsque l'indice n n'est pas un multiple de m. Soit, par exemple, $A = 7$. Ici $a_0 = 2$, la période contient quatre termes 1, 1, 1, 4. En appliquant (ω') à $\frac{p_1}{q_1} = \frac{2}{1}$, on a $b = \frac{11}{4}$ et comme $\frac{p_2}{q_2} = 3$, on voit que $b \neq \frac{p_2}{q_2}$.

Je dis que les nombres A qui vérifient la relation (1) sont *caractérisés* par la condition :

(4) $\qquad 2a_0$ est divisible par $A - a_0^2$.

Cette condition est nécessaire et suffisante. *Elle est nécessaire.* En effet, la relation (1) étant supposée vraie pour tout n, on doit avoir en particulier

$$\frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1^2 + Aq_1^2}{2p_1q_1} = \frac{a_0^2 + A}{2a_0} ,$$

et comme

$$\frac{p_2}{q_2} = \frac{a_0a_1 + 1}{a_1} ,$$

on en tire

$$2a_0 = a_1(A - a_0^2) .$$

Donc $2a_0$ est divisible par $A - a_0^2$ et le quotient de la division est précisément égal à a_1.

La condition (4) *est suffisante.* Supposons que $2a_0$ soit divisible par $A - a_0^2$ et posons

$$\frac{2a_0}{A - a_0^2} = d .$$

En formant les quotients *complets* x_1, x_2, on trouve

$$x_1 = \frac{a_0 + \sqrt{A}}{A - a_0^2} = \frac{2a_0 + \frac{1}{x_1}}{A - a_0^2} = d + \frac{1}{x_1(A - a_0^2)} .$$

Donc $a_1 = d$ et comme $x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2}$, on en tire

$$x_2 = x_1(A - a_0^2) = 2a_0 + \frac{1}{x_1} .$$

Par conséquent $a_2 = 2a_0$ et $x_3 = x_1$.

La période se compose donc de deux termes :

$$a_1 = \frac{2a_0}{A - a_0^2} \qquad \text{et} \qquad a_2 = 2a_0 ,$$

ou du seul terme $2a_0$, lorsque $A - a_0^2 = 1$.

Si donc la condition (4) est vérifiée, la relation (1) a lieu, en vertu de (3) en posant $m = 2$, pour toutes les réduites de rangs pairs. Il nous reste à la démontrer pour les réduites de rangs impairs.

Or

$$\frac{p_2}{q_2} = a_0 + \frac{A - a_0^2}{2a_0} = \frac{a_0^2 + A}{2a_0} = \frac{p_1^2 + Aq_1^2}{2p_1 q_1} .$$

La relation (1) a donc lieu pour $n = 1$ et on peut écrire dans ce cas particulier

$$(5) \qquad p_2 - q_2\sqrt{A} = \frac{1}{A - a_0^2}(p_1 - q_1\sqrt{A})^2 .$$

Considérons maintenant une réduite quelconque $\frac{p_{2i-1}}{q_{2i-1}}$ de rang impair. Soit

$$\frac{\alpha}{\beta} = a_1 + \frac{1}{2a_0} = \frac{2a_0 a_1 + 1}{2a_0} .$$

On a, comme on sait (*Serret*, p. 62),

$$p_{2i-1} - q_{2i-1}\sqrt{A} = (p_1 - q_1\sqrt{A})(\alpha - \beta x_1)^{i-1} ,$$

et comme $\alpha - \beta x_1 = p_2 - q_2\sqrt{A}$, il vient

$$p_{2i-1} - q_{2i-1}\sqrt{A} = (p_1 - q_1\sqrt{A})(p_2 - q_2\sqrt{A})^{i-1}$$

d'où, en vertu de (2) et de (5),

$$p_{2(2i-1)} - q_{2(2i-1)}\sqrt{A} = \frac{1}{A - a_0^2}(p_{2i-1} - q_{2i-1}\sqrt{A})^2$$

ce qui conduit à la relation (1) pour n impair. Si donc la condition (4) est vérifiée, la relation (1) a lieu quel que soit n. C.Q.F.D.

Il résulte de là que les nombres A vérifiant la relation (1) sont de la forme

$$a_0^2 + \frac{2a_0}{a_1} ,$$

a_0 étant un nombre entier quelconque et a_1 un diviseur quelconque de $2a_0$. Le nombre des nombres A compris entre a_0^2 et $(a_0 + 1)^2$ est donc égal au nombre des différents diviseurs de $2a_0$.

Pour $a_0 = 1$, le diviseur $a_1 = 2$ ou 1, d'où $A = 2$ et 3.

Pour $a_0 = 2$, le diviseur $a_1 = 4, 2, 1$, d'où $A = 5, 6, 8$.

J'ajouterai que les nombres-A ont déjà été rencontrés par Euler (Cf. l'article de M. Aubry, *Ens. math.*, 1912, p. 204, exerc. 24).

Bien que ces résultats se déduisent très simplement des propriétés classiques des fractions continues, j'ai pensé qu'il y avait quelque intérêt à les rappeler, d'autant plus qu'ils se rattachent au travail de M. Aubry que je viens de citer.

D. Mirimanoff (Genève).

CHRONIQUE

Commission internationale de l'Enseignement mathématique.

I. — Réunion de Cambridge. 21-28 août 1912.

Programme général.

Mercredi 21 août, 9 h. du matin : Séance du Comité central.

3 h. de l'après-midi : *Séance des délégués*. Elle aura lieu dans l'une des salles du Laboratoire des ingénieurs, au siège du Congrès.

Jeudi 22 août, 10 h. du matin. *Séance d'ouverture* du 5e Congrès international des mathématiciens. Sir George Greenhill, Vice-président de la Commission, parlera des travaux de la Commission.

Vendredi 23 août, 9 h. du matin, 1re séance, en commun avec la section d'enseignement du Congrès : *Présentation des travaux des*

sous-commissions nationales. Pour chaque pays le délégué déposera un court rapport écrit destiné à faire ressortir les points caractéristiques des travaux de sa sous-commission. L'exposé oral, limité à cinq minutes, sera un résumé de ce rapport.

Lundi 26 août, à 3 h. de l'après-midi, 2[me] SÉANCE : *The mathematical Education of the Physicist in the University (La préparation mathématique des physiciens à l'Université).* Rapport de M. le Prof. C. RUNGE (Gœttingue). — Discussion.

Mardi 27 août, à 9 h. du matin. 3[me] SÉANCE : I. *Intuition and Experiment in the mathematical Teaching in the secondary School. (L'intuition et l'expérience dans l'enseignement mathématique des Ecoles moyennes.)* Rapport de M. le Prof. Dav.-Eug. SMITH (New-York). — Discussion.

II. *Remarks on a Bibliography on the Teaching of Mathematics,* par M. le D[r] C. GOLDZIHER (Budapest).

III. Les travaux de la Commission durant la prochaine période.

Ces trois séances auront lieu dans la Salle de dessin du Laboratoire des Ingénieurs *(Drawing Office, Engineering Laboratory),* qui a été réservée aux séances de la section d'enseignement du Congrès.

Les changements éventuels seront annoncés par le *Bulletin quotidien du Congrès.*

Le **Secrétariat de la Commission** sera installé, dès le 20 août, dans les salles B et C du Laboratoire des ingénieurs. MM. les délégués et les représentants des sous-commissions nationales sont priés de déposer leur adresse dès leur arrivée à Cambridge.

II. — SOUS-COMMISSIONS NATIONALES.

Autriche. — La Sous-commission autrichienne vient de publier le 12[e] et dernier fascicule de ses rapports. C'est celui de M. A. HŒFLER sur la préparation des maitres des écoles moyennes. L'ensemble des rapports forme un volume de XXXV-785 p. in-8°.

Heft 12 der *Berichte über den mathem. Unterricht in Oesterreich : Die neuesten Einrichtungen in Oesterreich für die Vorbildung der Mittelschullehrer in Mathematik, Philosophie u. Pädagogik,* von Dr. Al. HÖFLER, Wien, (103 p. ; 2 Mk., Hölder, Vienne.)

Iles Britanniques. — Trois nouveaux fascicules viennent de paraître ; ils traitent des objets suivants : les mathématiques dans les écoles écossaises (n° 19) ; Le premier enseignement du Calcul différentiel et intégral (n° 20) ; Les mathématiques et la

science de l'ingénieur (n° 21). En outre cinq fascicules sont sous presse.

N° 19. — *Mathematics in Scotch Schools*. By Prof. George A. Gibson, Glascow. (49 p., 3 d.; Wyman & Sons, Londres.)

N° 20. — *The Calculus as a School Subject*. By M. C. S Jackson, Londres (18 p.; 1 1/2 d.)

N° 21. — *The Relation of Mathematics to Engineering at Cambridge*, by Mr. B. Hopkinson, Cambridge. (13 p.; 1 1/2 d.)

Sous presse :

N° 22. — *The Teaching of Algebra in Schools*. By Mr. S. Barnard.

N° 23. — *Research and Advanced Study as a Training for Mathematical Teachers*. By prof. G.-H. Bryan.

N° 24. — *The Teaching of Mathematics in Evening Technical Institutions*. By Dr W.-E. Sumpner.

N° 25. — *The Undergraduate Course in Pass Mathematics Generally, and in relation and Economics and Statistics*. By Prof. A.-L. Bowley.

N° 26. — *The Preliminary Mathematical Training of Technical Students*. By Mr. P. Abbott.

Italie. — La Sous-commission italienne a chargé M. Padoa (Gènes) de réunir en un rapport les principales observations et propositions concernant l'enseignement mathématique dans les écoles élémentaires, les écoles moyennes et la préparation des maîtres. Ce fascicule est publié sous le titre :

Osservazioni e proposte circa l'insegnamento della matematica nelle scuole elementari, medie e di magistero. Relazione di A. Padoa, Gênes (22 p.).

Japon. — Nous venons de recevoir les rapports sur l'enseignement mathématique au Japon. Ils forment deux volumes intitulés :

Report on the Teaching of Mathematics in Japan, prepared by the International Commission on the Teaching of Mathematics (Tokio).

Summary Report on the Teaching of Mathematics in Japan. By R. Fujisawa (Tokio).

Le premier volume, qui comprend 550 pages, renferme les rapports spéciaux, au nombre de quinze, concernant les divers types d'établissements depuis l'enseignement primaire jusqu'aux écoles supérieures, universitaires et techniques. Le second volume (238 pages) a été rédigé par M. Fujisawa, délégué du Japon. Il donne un aperçu général de l'enseignement mathématique au Japon. Nous reviendrons sur ces rapports dans les comptes rendus.

Roumanie. — La Sous-commission roumaine consacre un fascicule aux *mathématiques dans l'enseignement secondaire*, par M. G. Tzitzeica, professeur à la Faculté des Sciences de Bucarest, délégué (16 p.).

5e Congrès international des mathématiciens.

Cambridge, du 22 au 28 août 1912.

PROGRAMME GÉNÉRAL.

Mercredi 21, soir, 9 h. 30. Réception des congressistes par Sir G.-H. DARWIN, président de la Société de philosophie de Cambridge; et présentation à Mr. R.-F. SCOTT, vice-chancelier de l'Université. Grande salle de St-John's College.

Jeudi 22, matin, 10 h. Séance d'ouverture, dans la Salle d'examens (Examination Hall).

Soir, 2 h. 30. 1re séance générale. Election du Bureau. 3 h. 30, 1re conférence; 5 h., 2e conférence.

Vendredi 23, matin, 9 h. 30. Séances de sections.

Soir, 3 h., 2e séance générale, 3e et 4e conférences.

9 h. Réception au Musée Fitzwilliam par Lord RAYLEIGH, chancelier de l'Université.

Samedi 24, matin, 9 h. Séances de sections.

Soir, 3 h. 3e séance générale, 5e et 6e conférences.

Dimanche 25, soir, 3 h. Réception dans les jardins de Christ's College, par le Président du Congrès.

9 h. Récital d'orgue, dans la chapelle de King's College.

Lundi 26, matin, 9 h. 30. Séances de sections.

Soir. Excursion à Ely (cathédrale, etc.). Visite des divers collèges.

9 h. Réception à Trinity College, par le Master et les Fellows du Collège.

Mardi 27, matin, 9 h. 30. Séances de sections.

Soir, 3 h. 4e séance générale, 7e et 8e conférences.

9 h. Séance de clôture. Fixation des lieu et date du 6e Congrès international.

Mercredi 28. Excursion à Oxford et excursions diverses.

Les CONFÉRENCES qui seront présentées aux quatre séances générales sont au nombre de huit, 5 en anglais, 1 en allemand, 1 en français et 1 en italien. En voici les titres, par ordre alphabétique :

M. BÔCHER (Harvard). *Boundary problems in one dimension.*

E. BOREL (Paris). *Définition et domaine d'existence des fonctions monogènes uniformes.*

E.-W. BROWN (Yale). *Periodicity in the solar system.*

F. ENRIQUES (Bologna). *I problemi relativi ai principii della Geometria.*

Prince B. GALITZIN (St-Pétersbourg). *The principles of instrumental seismology.*

E. LANDAU (Göttingen). *Gelöste und ungelöste Probleme aus der Theorie der Primzahlverteilung und der Riemannschen Zetafunktion.*

Sir J. LARMOR (Cambridge). *The Dynamics of Radiation.*

Sir W. H. WHITE, K.C.B. (formerly Director of Naval Construction). *The place of Mathematics in Engineering Practice.*

Le Congrès sera divisé en quatre sections, subdivisées elles-mêmes en autant de sous-sections que le nombre des communications l'exigera.

I. *Arithmétique, Algèbre, Analyse.* — II. *Géométrie.* — III. *Mécanique, Physique mathématique, Mathématiques appliquées.* — IV. *Questions philosophiques, historiques et pédagogiques.*

En ce qui concerne cette dernière section, trois séances seront spécialement consacrées à la Commission internationale de l'enseignement mathématique. Le programme de ces séances a été publié dans la *revue* du 15 janvier et du 15 mars. (Voir ci-dessus).

Lieu de réunion du Congrès. Toutes les séances auront lieu dans les salles d'examen et les salles de conférences attenantes. (Entrées: Benet Street, Free School Lane et Downing Street.) Le bureau du Secrétaire se trouvera dans le même bâtiment.

Facilités de voyage en chemin de fer. Des billets aller et retour pour Cambridge seront délivrés aux congressistes par les principales compagnies de chemin de fer de Grande-Bretagne, sur présentation d'une carte justificative signée du Secrétaire-général. Ces billets, calculés à raison des $^4/_3$ du billet simple ordinaire, seront valables du 20 au 29 août inclusivement.

Des billets d'aller et retour spéciaux à prix réduits[1] de Paris à Londres seront délivrés sur présentation de la carte de membre du Congrès.

Exposition. La *Mathematical Association* organise une exposition de livres, dessins et modèles mathématiques.

Un *Comité de Dames* se tiendra à la disposition des congressistes dames pour leur donner tous les renseignements désirables.

Il sera publié un *bulletin quotidien* du Congrès contenant les procès-verbaux des séances jour par jour, le programme du lendemain, les renseignements sur les réceptions, excursions, etc.

Les *Rapports et communications* faits au Congrès seront imprimés dans le volume de procès-verbaux publié par les secrétaires, à la Cambridge University Press. Les auteurs de communications sont priés de faire parvenir leurs manuscrits le 27 août au plus tard. Les mémoires en français, en allemand ou en italien devront

[1] Voir le programme général du Congres.

être dactylographiées (à l'exception des formules). Il serait à souhaiter que les clichés des diagrammes accompagnassent les manuscrits. Les auteurs ont droit à 100 exemplaires tirés à part de leurs rapports ou communications.

Les *droits d'inscription* en qualité de membre du Congrès sont de *une livre* (25 francs) par personne, payable à Sir J. Larmor, Trésorier du Congrès, à St-Johns College, Cambridge (Angleterre). Moyennant une cotisation de 12 shillings (15 fr.), toute personne de la famille d'un des membres a droit aux mêmes privilèges que celui-ci, à l'exception de l'envoi d'un exemplaire des rapports et procès-verbaux.

Les membres du Congrès sont priés d'informer les secrétaires de leur adresse, dès leur arrivée à Cambridge.

Pour tous renseignements concernant le Congrès, s'adresser au Secrétaire-général, Prof. E.-W. Hobson, Christ's College, Cambridge, Angleterre.

A propos des congrès internationaux des mathématiciens.

Au moment où les mathématiciens s'apprêtent à participer à leur 5me Congrès international, il peut être intéressant de reproduire ici quelques documents et chiffres concernant les précédentes réunions et de rappeler quelques critiques qui ont été faites quant à l'organisation des congrès.

Fondation. — On sait que la question des Congrès internationaux des mathématiciens a été mise à l'ordre du jour par MM. Laisant et Lemoine (Paris) dans l'*Intermédiaire des mathématiciens* (Tome I, 1894, p. 113), qui en propagea l'idée au cours des années 1894-1896. A peu près simultanément M. Georges Cantor, le créateur de la Théorie des ensembles, en conçut l'idée de son côté. Grâce aux bonnes volontés qui s'associèrent à leur initiative, le premier Congrès pût avoir lieu à Zurich, en 1897, sous la présidence de M. le Prof. C. Geiser.

But des Congrès. — Le Comité international chargé de l'organisation du premier Congrès a établi comme suit le but des Congrès internationaux des mathématiciens :

Art. 1. Le Congrès a pour but :

a) De provoquer des relations personnelles entre les mathématiciens des différents pays.

b) De donner, dans des rapports ou des conférences, un aperçu de l'état actuel de diverses branches des mathématiques et d'offrir l'occasion de traiter certaines questions d'importance reconnue.

c) De délibérer sur les problèmes et l'organisation des Congrès futurs.

d) De traiter les questions de bibliographie, de terminologie,

etc., au sujet desquelles une entente internationale paraît nécessaire.

Organisation des Congrès. — Résolutions adoptées par le premier Congrès :

1. A l'avenir les Congrès internationaux des mathématiciens succéderont à des intervalles de 3 à 5 ans. Il sera tenu compte, dans le choix du siège, des vœux légitimes des différents pays.

2. On choisira, à la fin de chaque Congrès, la date et le siège du Congrès suivant, ainsi que les organes ou les associations chargés de le préparer et de l'organiser.

3. Si, par suite de circonstances imprévues, un Congrès ne pouvait siéger à la date et au lieu choisis, le Comité du dernier Congrès aurait la faculté de prendre les dispositions nécessaires à la convocation d'un Congrès nouveau. A cet effet il s'entendra avec les organes mentionnés à l'article 2.

4. Chaque Congrès peut, lorsqu'il le juge utile pour l'étude de certaines questions de nature internationale, nommer des commissions permanentes dont le mandat dure d'un Congrès au Congrès suivant. Les compétences et les attributions de ces commissions sont fixées lors de leur nomination.

Statistique. — Les quatre premiers Congrès ont eu lieu comme suit :

1er : Zurich	1897	C. F. Geiser, Président. F. Rudio, Secrét. général.
2me : Paris	1900	H. Poincaré, Président. E. Duporcq, Secrét. général.
3me : Heidelberg	1904	H. Weber (Strasbourg), Président. A. Krazer (Carlsruhe), Secrét. gén.
4me : Rome	1908	P. Blaserna, Président. G. Castelnuovo, Secrét. général.

Nous avons réuni dans un même tableau les chiffres concernant la participation aux 4 Congrès, et le nombre des travaux présentés.

	Zurich 1897	Paris 1900	Heidelberg 1904	Rome 1908
Membres effectifs	204	262	336	535
Pays représentés	16	27	21	23
Conférences générales	4	5	5	10
Communications	30	32	78	125
Comptes rendus	314 p.	454 p.	766 p.	1122 p.
Expositions :				
a) librairie	—	—	59 exposants	—
b) modèles, instruments	—	—	24 exposants	—

Remarques. — Tandis que le nombre des membres effectifs a plus que doublé, celui des communications a quadruplé depuis le second Congrès. Ceux qui ont suivi les quatre Congrès ont en effet constaté que tandis qu'il était relativement facile d'assister aux séances de sections à Zurich et à Paris, cela n'était plus possible à Heidelberg ni à Rome.

Cette augmentation du nombre des communications a amené une dispersion très grande dans les travaux des Congrès. Les critiques, dans ce sens, ont déjà été faites non seulement à propos des deux précédents[1] Congrès, mais à propos de la plupart des Congrès[2] qui sont organisés sur des bases analogues. On ne pourrait donc y remédier qu'en modifiant l'organisation des Congrès. En effet, malgré tout l'intérêt que présentent les communications individuelles sur des sujets particuliers, il est indispensable, pour le succès même des futurs Congrès, d'accorder plus de temps aux rapports et aux discussions sur des questions d'intérêt général et sur des sujets pour lesquels une entente internationale paraît désirable.

Nous signalerons à titre de point de comparaison le Congrès international de l'Enseignement mathématique tenu à Milan en septembre 1911[3]). Pour chaque séance un objet déterminé longtemps à l'avance avait été mis à l'ordre du jour et les rapporteurs ainsi que les principaux orateurs avaient été désignés par le Comité central. De cette manière la discussion a pu être limitée à des points bien déterminés. C'est sur ces mêmes bases que seront organisées les séances que la dite Commission tiendra à Cambridge.

On a pu constater également un certain *manque de suite* dans les travaux d'un Congrès au suivant. Certaines questions mises à l'ordre du jour du Congrès ne sont pas reprises par le nouveau Comité. Afin de remédier à cette dispersion et à cette stérilité relative, il conviendrait d'instituer un *Comité général permanent* qui serait chargé de veiller tout particulièrement à la coordination et à la continuation des travaux entrepris par les Congrès. De cette manière la valeur scientifique et intellectuelle des Congrès ne ferait qu'augmenter.

Jusqu'à ce jour les Congrès ont désigné, non pas des Commissions permanentes, mais deux commissions chargées de rapporter d'un Congrès à un autre ; elles ont été nommées toutes les deux à Rome. L'une a été chargée d'étudier la question d'unification des notations vectorielles, tandis que l'autre a été instituée pour étudier les questions concernant l'enseignement mathématique ; ces deux Commissions rapporteront sans doute à Cambridge.

---

[1] Voir l'*Enseignement mathématique* du 15 sept. 1904, p. 400 et du 15 mai 1908, p. 264-265.

[2] Voir par exemple le compte rendu des Congrès de Philosophie, Genève, 1905, p. 111, Heidelberg, 1908, Revue de Methaph. et de Morale, 1908, p. 928 et suiv.

[3] Voir l'*Enseignement mathématique*, n° du 15 nov. 1911.

Pour ce qui concerne la Commission internationale de l'enseignement mathématique, elle présentera un ensemble d'au moins 150 rapports sur des questions d'enseignement mathématique dans les principaux pays.

Quant au Congrès qui va s'ouvrir, il semble que le nombre des communications dans les séances de sections sera relativement limité. Tenant compte des critiques relatives à la surabondance des travaux, le Comité d'organisation n'a pas fait mention dans ses circulaires d'une invitation générale à présenter des travaux. Les introducteurs des différentes sections se sont adressés individuellement à un certain nombre de savants. On ne saurait trop féliciter le Comité de Cambridge de son initiative tendant à limiter le nombre des communications. Les participants pourront ainsi suivre plus facilement et avec plus de profit les travaux du Congrès.

H. Fehr (Genève).

Société suisse des professeurs de mathématiques.

Réunion de Zurich, 19 mai 1912.

La Société suisse des professeurs de mathématiques s'est réunie à Zurich le 19 mai 1912 en une séance qui était spécialement consacrée à une discussion sur la préparation pédagogique des professeurs de mathématiques. Après le discours d'ouverture du président M. le professeur Dr C. Brandenberger (Zurich), les rapporteurs M. le professeur K. Matter (Frauenfeld) et M. le recteur R. Flatt (Bâle) ont introduit la question par des exposés très documentés sur ce qui se fait actuellement dans les pays voisins et sur ce qu'il y aurait lieu de faire en Suisse. Leurs études étaient basées sur les rapports rédigés pour la Sous-commission suisse de l'enseignement mathématique par M. Brandenberger (gymnase et école réale) et M. Grossmann (Ecole polytechnique fédérale).

En Suisse la préparation pédagogique des professeurs de l'enseignement moyen est actuellement à peu près nulle. Il n'existe guère d'enseignement officiel donné dans ce but[1].

Il ressort du rapport de M. Brandenberger que la plupart des maîtres de mathématiques regrettent l'absence d'une préparation pratique bien appropriée.

M. Matter indique brièvement ce qui se fait dans ce domaine dans quelques pays en utilisant les documents si précieux réunis

[1] A l'Université de Bâle M. le Dr R. Flatt fait un séminaire pédagogique pour les étudiants en sciences mathématiques et naturelles. A l'Université de Genève M. le prof. H. Fehr consacre depuis plusieurs années, sous le titre de *séminaire de mathématiques élémentaires*, une heure par semaine aux questions d'enseignement. Elles sont suivies par les candidats au certificat d'aptitude à l'enseignement des sciences.

par la Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique.

M. le recteur Flatt fait ressortir à son tour les inconvénients que présente actuellement l'absence presque totale d'une préparation rationnelle des candidats à l'enseignement moyen. Il fait une série de propositions qui servent de base à la discussion à laquelle ont pris part MM. H. Fehr (Genève), Laemmel (Zurich), Crelier (Bienne), Fiedler (Zurich), Grossmann (Zurich), Jaccottet (Lausanne), ainsi que le président et les rapporteurs.

Tous les orateurs ont insisté sur la nécessité d'obtenir une meilleure organisation dans la préparation pédagogique. Ils ont entièrement appuyé les conclusions des rapporteurs tendant à inviter les autorités à prêter une attention toute spéciale à la préparation pédagogique et pratique des professeurs de l'enseignement moyen.

L'assemblée a elle-même adopté à l'unanimité une résolution qui a été transmise au Conseil de l'Ecole polytechnique et aux Gouvernements des cantons universitaires.

Nous pouvons ajouter que ces vœux ont trouvé le meilleur accueil à l'Ecole polytechnique. Le Conseil de l'Ecole a en effet décidé d'organiser, à titre d'essai, dès l'hiver prochain, un cours de méthodologie mathématique pratique. Les conférences seront faites par un professeur de l'enseignement moyen et elles seront accompagnées de leçons faites par les participants devant les élèves du gymnase et de l'école réale supérieure.

C'est là un premier résultat des travaux de la Sous-commission suisse qui, dès le début, a rencontré une collaboration active au sein de la Société suisse des professeurs de mathématiques.

Association allemande pour l'avancement de l'enseignement des sciences mathématiques et naturelles.

La XXI[e] assemblée générale de l'Association allemande pour l'avancement de l'enseignement des sciences mathématiques et naturelles a été tenue à Halle, du 27 au 30 mai, sous la présidence de M. le Prof. Thaer (Hambourg). MM. Wangerin, professeur à l'Université, et Schotten, directeur de l'Ecole réale supérieure, s'étaient chargés de l'organisation des séances. Elles ont eu lieu dans le bâtiment de l'Université et ont été suivies par environ 200 personnes.

Parmi les rapports et discussions, au nombre de 20, nous signalerons les suivants concernant les mathématiques :

M. Schotten, directeur à Halle : Sur les publications de la Commission internationale de l'enseignement mathématique.

M. Möhle, directeur à Hagen : L'enseignement mathématique dans les écoles supérieures de jeunes filles. Le conférencier dé-

plore le nombre trop restreint des heures accordées à cet enseignement.)

M. BUNGERS, Obl., Halle : De la réforme de l'enseignement du calcul.

M. MÜNCH, Dr., Darmstadt : De l'emploi du cinématographe dans l'enseignement de la géométrie. Signalons les objets suivants : le théorème de Pythagore, du pôle et de la polaire par rapport au cercle ; les lieux géométriques dans le problème d'Apollonius, les rapports des diverses courbes passant par 9 points, etc.

M. SCHRADER, professeur à Halle : Géométrie synthétique et analytique des sections coniques.

Dr. KLUGE, Lissa : Equations de Diophante du 2e degré.

W. LIETZMANN, Barmen : De l'unification des notations en mathématiques élémentaires.

Une commission a été instituée à cet effet par la Commission allemande de l'enseignement scientifique D. A. M. N. U. . Cette commission s'est réunie à Halle à l'issue de la réunion, sous la présidence de M. le prof. TIMERDING, Braunschweig.

La prochaine assemblée annuelle aura lieu à Munich, à Pentecôte 1913.

Machine à écrire pour mathématiciens et ingénieurs.

A l'occasion de la réunion ci-dessus, la maison Adler-Werke vorm. Heinrich KLEYER à Francfort s. M. avait exposé et fait fonctionner une machine à écrire, d'un modèle spécial, permettant d'écrire aussi les formules de mathématiques, de chimie, de physique, etc.

Cette nouvelle machine Adler permet d'écrire 138 signes dont un grand nombre de symboles mathématiques. Elle sera sans doute bien accueillie non seulement des mathématiciens, des physiciens et des ingénieurs, mais aussi dans les séminaires de mathématiques.

On trouvera, encarté dans ce fascicule, un spécimen de quelques formules écrites à l'aide de cette machine.

Nouvelles diverses. — Nominations et distinctions.

Allemagne. — M. R. GANS, privat-docent à l'Université de Strasbourg, est nommé professeur de Physique à l'Université de La Plata.

Angleterre. — *Université de Londres.* — M. Henri POINCARÉ, membre de l'Institut de France, a fait au mois de mai dernier une série de conférences sur la Philosophie des Mathématiques. La

leçon d'ouverture avait pour objet « la logique de l'Infini ». L'ambassadeur de France et de nombreux savants étaient venus entendre l'éminent mathématicien français.

— M. le Dr W.-H. ECCLES est nommé au nouveau titre d'« University Readership in Graphics » à l'University College de Londres.

— M. M. POWER, « lecturer » en mathématiques à l'University College de Dublin, est nommé professeur de Mathématiques à l'University College de Galway.

Autriche. — M. Ph. FÜRTWÄNGLER, professeur à l'Académie d'agriculture de Bonn-Poppelsdorf, est nommé professeur à l'Université de Vienne.

M. G. KOHN, professeur extraordinaire à l'Université de Vienne, est promu au titre de professeur ordinaire.

M. J. KOUNOWSKY est admis en qualité de privat-docent pour la géométrie descriptive et la géométrie projective à l'Ecole technique supérieure de Prague.

M. RYCHLIK est admis en qualité de privat-docent de Mathématiques à l'Université bohème de Prague.

Belgique. — M. M. STUYVAERT est chargé de faire à l'Université de Gand le cours de Méthodologie mathématique ainsi qu'un cours facultatif sur la théorie des grandeurs algébriques.

M. J. THIERRY est nommé répétiteur à l'Université de Gand.

France. — *Académie des Sciences.* Prix Poncelet (2000 fr.; mathématiques pures). Le prix a été attribué à M. Ed. MAILLET, professeur à l'Ecole des Ponts et Chaussées, pour ses travaux mathématiques.

Le Prix Francœur (1000 fr.) a été attribué à l'œuvre de feu LEMOINE pour l'ensemble de ses travaux mathématiques : le montant a été versé à la veuve de ce savant.

Ecole polytechnique. M. BOULANGER est nommé examinateur de mathématiques ; M. M. HAMY, répétiteur titulaire et M. le capitaine NOIREL répétiteur adjoint d'astronomie.

L'*Association française pour l'Avancement des Sciences* tiendra son Congrès annuel à Nîmes, du 1er au 7 août. Les sections 1 et 2 (mathématiques, astronomie, géodésie et mécanique) sont présidées par M. Ernest LEBON (Paris).

Italie. — M. E. ALMANSI (Florence), ancien professeur de Physique mathématique à l'Université de Pavie, vient d'être appelé à la chaire de Mécanique rationnelle de l'Université de Rome. Il lui a été décerné la médaille de la Société italienne des Sciences (dite des XL) pour l'ensemble de ses travaux de Mécanique et de Physique mathématique.

M. G. SCORZA, privat-docent à l'Université de Palerme, a été nommé professeur extraordinaire de Géométrie projective et descriptive à l'Université de Cagliari.

K. von der Mühll.

Les mathématiciens suisses viennent d'être douloureusement éprouvés par la mort de M. K. von der Mühll-His, professeur à l'Université de Bâle. Né dans cette ville en 1841, il étudia successivement à Bâle, à Göttingue et à Königsberg où il prit le grade de docteur en 1866. Professeur à l'Université de Leipzig de 1868-88, il fut appelé en 1889 à la chaire de Physique mathématique à l'Université de Bâle à laquelle il consacra jusqu'à sa mort le meilleur de ses forces et de son esprit. Il remplit les charges de recteur en 1895 et en 1910, lors du centenaire de l'Université.

Membre et à diverses reprises président de la Société bâloise et de la Société helvétique des Sciences naturelles, il s'était acquis un renom universel par ses travaux scientifiques épars dans des revues spéciales : sur la réflexion et la réfraction de la lumière à la limite de milieux cristallins, sur l'état de température stationnaire, etc. Il publia, en les mettant au point et en les complétant par ses propres travaux, les cours de son ancien professeur de Königsberg, F.-E. Neumann. Il fut enfin la cheville ouvrière de la commission qui a rendu possible la publication des œuvres d'Euler et présida en 1907 à sa fête commémorative.

Nécrologie.

Ch. André. — M. Ch. André, professeur d'Astronomie à la Faculté des Sciences de Lyon, est mort le 6 juin dernier. Né à Chauny (Aisne) le 14 mai 1841, il était ancien élève de l'Ecole normale supérieure. Il fut chargé en 1876, du cours d'astronomie à la Faculté des Sciences de Lyon et nommé, en 1879, le premier directeur de l'Observatoire dont il fut en même temps le fondateur.

M. E. Fagnart, professeur de Méthodologie mathématique à l'Université de Gand, est décédé à l'âge de 46 ans.

M. Frédéric Weber, professeur de Physique à l'Ecole polytechnique fédérale de Zurich, est décédé à l'âge de 69 ans. Il appartenait au corps enseignant de cet établissement depuis 1875.

NOTES ET DOCUMENTS

Commission internationale de l'enseignement mathématique.

Compte rendu des travaux des sous-commissions nationales.
(8e article.)

AUTRICHE

Les mathématiques dans l'enseignement de la Physique des Ecoles moyennes.

Die Mathematik im Physikunterricht der österreichischen Mittelschulen [1], von Schulrat Dr A. Lanner. — Cet opuscule forme le 11me fascicule des rapports sur l'enseignement mathématique en Autriche. Il débute par une introduction de 10 pages où l'auteur reproduit en partie les instructions officielles autrichiennes relatives à l'emploi des mathématiques dans l'enseignement de la physique. Celles-ci réduisent l'usage des mathématiques à celui d'une branche accessoire, destinée à abréger certains raisonnements et à formuler d'une façon particulièrement brève tout un ensemble de résultats. Ce n'est pas la démonstration mathématique qui doit prendre le pas dans l'enseignement de la physique, mais bien la compréhension des phénomènes. Les problèmes posés doivent exiger, non pas des artifices de calcul, mais l'emploi raisonné des principes généraux enseignés au cours.

Les 28 pages suivantes sont consacrées à une quinzaine de paragraphes traitant chacun un des chapitres de la physique, en indiquant les notions mathématiques qu'ils mettent en application, ainsi que les problèmes qu'ils suscitent. Comme le dit l'auteur dans sa conclusion (p. 39) il a voulu grouper et préciser les sujets pour lesquels, à côté de l'enseignement expérimental, il convient d'admettre des démonstrations ou des exercices d'ordre mathématique. Cette partie de l'ouvrage est tout particulièrement intéressante pour le professeur de physique.

Le fascicule se termine par les plans d'études physiques des gymnases et des écoles réales en Autriche.

E. Steinmann (Genève).

ÉTATS-UNIS D'AMÉRIQUE

Les mathématiques dans les Ecoles secondaires [2].

L'enseignement mathématique dans les écoles secondaires publiques et privées, fait l'objet de deux rapports de 111 et 58 pages réunis en un même

[1] *Berichte über den mathem. Unterricht in Oesterreich*, Heft 11, 1 fasc. in-8°, 56 p., A. Holder, Vienne.

[2] « Mathematics in the public and private Secondary Schools of the United States », publié par les soins du « United States Bureau of Education », Washington.

fascicule. Le premier de ces rapports (comité III) concerne les écoles publiques et le second (comité IV) les écoles privées. Il y est adjoint en appendice des renseignements relatifs à quelques écoles qui sans être des écoles secondaires se rattachent pourtant à l'instruction secondaire.

De même que pour les écoles élémentaires[1] l'intérêt principal de cette étude réside dans les détails qu'ils fournissent sur les programmes suivis, sur les méthodes d'enseignement adoptées, les lacunes et les succès qu'elles accusent. Ceci ne pouvant guère être résumé nous nous bornons à indiquer en quelque mesure l'organisation générale de l'enseignement mathématique secondaire des Etats-Unis ainsi que le champ mathématique parcouru.

Rapport du comité III. — Ce rapport débute par un exposé général de l'organisation, du programme mathématique, des méthodes employées et du but à atteindre.

Les écoles secondaires publiques des Etats-Unis appelées écoles supérieures « high schools », font suite aux écoles élémentaires, elles reçoivent par conséquent les élèves depuis l'âge de 14 ans. Les études y sont en moyenne de 4 ans. Le but poursuivi est double dans la majorité des cas : préparer les élèves pour le collège (université) et donner une instruction générale suffisante à ceux qui ne pousseront pas plus loin des études régulières.

Il y a actuellement un mouvement tendant à porter le nombre des années d'études secondaires à 6 en ajoutant 2 années inférieures qui remplaceraient les 7me et 8me degrés de l'école élémentaire. Cela permettrait une corrélation plus complète entre l'arithmétique et l'algèbre ainsi que l'introduction de la géométrie intuitive à l'âge qu'il convient.

L'organisation des diverses écoles supérieures présente une variété considérable car elle est souvent laissée dans une grande mesure à l'initiative personnelle du principal de l'école Dans quelques-unes on applique le système du choix libre soit pour certains cours, soit pour des groupes de cours.

La préparation des maîtres de mathématiques est, règle générale, très insuffisante, ils ont. pour la plupart, à peine les notions mathématiques correspondant à celles d'un cours d'une année de calcul différentiel.

Les écoles supérieures des Etats du Sud n'admettant pas les nègres dans les mêmes établissements que les blancs, certaines localités ont des écoles qui leur sont spécialement destinées, mais les études y sont la plupart du temps notablement inférieures.

Les plans d'études mathématiques sont conçus en accord avec les conditions d'admission des collèges. Ils contiennent toujours de l'algèbre élémentaire et de la géométrie. Très souvent on y fait aussi de la géométrie dans l'espace. de la trigonométrie et de « l'algèbre avancée », c'est-à-dire entre autres la représentation graphique des solutions des équations du 2me degré ou de degrés supérieurs et les déterminants. Le programme ordinaire d'algèbre comporte les équations numériques et littérales et les problèmes à plusieurs inconnues du 1er degré, les opérations algébriques, carrés et cubes de polynômes, radicaux, équations du 1er degré avec radicaux, la théorie des exposants, les équations du 2me degré à 1 inconnue et à plusieurs inconnues dans des cas simples, les progressions arithmétiques et géomé-

[1] Voir L'*Ens. math.* du 15 mai 1912, p. 237-240.

triques, le binôme. En géométrie plane l'ordre suivi est l'ordre ordinaire de Legendre. Pour la géométrie dans l'espace on traite les propriétés d'égalité, de similitude, d'équivalence des divers solides et la mesure de leurs volumes et surfaces. En trigonométrie on applique la représentation des fonctions au moyen du cercle unité. Les calculs logarithmiques sont introduits, ainsi que l'application au calcul des triangles quelconques. Quelques écoles supérieures ont un cours d'un semestre d'arithmétique soit au commencement, soit à la fin du cycle scolaire, la portée n'en est guère différente de celle des cours d'écoles élémentaires.

Le rapport donne une étude comparative de l'enseignement d'il y a 60 ans et de l'enseignement actuel en prenant comme base les conditions d'admission au collège Harvard alors et maintenant. Il en découle qu'il a été fait des progrès considérables pour les mathématiques ; c'est en géométrie que les changements sont les moins conséquents.

Au sortir de certaines écoles supérieures dont les plans d'étude et les méthodes d'enseignement ont été officiellement agréées par une université les élèves sont admis à l'université sans examen. Cette faveur n'est continuée à chaque école que tant que ses élèves se montrent suffisamment préparés dans leurs études subséquentes.

Le but de l'instruction des écoles supérieures est, soit la culture générale, soit la préparation au collège et il semble généralement admis par les comités chargés de la direction des écoles que le même plan d'études doit satisfaire aux deux buts; il n'est pourtant pas évident que les programmes soient conçus de façon à satisfaire l'un et l'autre ou même l'un ou l'autre.

Viennent ensuite les rapports des 9 sous-comités chargés d'étudier plus particulièrement les divers sujets.

Le sous-comité I traite des *écoles supérieures de jeunes gens,* leur organisation, leurs plans d'études mathématiques, les examens, les méthodes d'enseignement et le but poursuivi par l'instruction mathématique.

Le sous-comité II considère les mêmes questions pour les *écoles supérieures de jeunes filles*. Leur but est aussi la culture générale et pour un certain nombre d'entre elles la préparation partielle ou complète pour le collège et parfois pour les écoles techniques et normales.

Le sous-comité III étudie les *écoles supérieures coéducatives de l'Est.* Les élèves se préparant au collège ont en 4me année un cours d'algèbre dont le programme comporte entre autres sujets les permutations et les combinaisons, de la théorie des équations de la trigonométrie et l'usage des tables et logarithmes.

Le sous-comité IV rapporte sur les *écoles supérieures coéducatives du Middle West.* Les branches mathématiques qui y sont enseignées sont l'arithmétique, l'algèbre et la géométrie; quelques-unes y adjoignent la trigonométrie et de « l'algèbre avancée ». Les desiderata de l'université ont une grande influence sur la détermination des plans d'études. Le rapport indique la notion de fonctions comme un sujet qui devrait être introduit dans le champ des études.

L'enseignement mathématique dans les *écoles supérieures coéducatives du Sud* fait l'objet du rapport du sous-comité V et cela aux mêmes points de vue que les précédents. Sur les écoles ayant répondu au questionnaire envoyé, 58 % enseignent la trigonométrie plane, une d'entre elles mentionne l'arpentage, trois la trigonométrie sphérique et une la géométrie analytique.

La physique y est fréquemment considérée comme du domaine des mathématiques.

Des associations de maîtres de mathématiques permettent à ceux-ci de se rendre compte des réformes à apporter à l'enseignement mathématique et des meilleures méthodes pour les réaliser.

Le sous-comité VI rapporte sur les *écoles supérieures coéducatives des côtes du Pacifique*. L'unité y est relativement grande. Le programme mathématique est basé sur les exigences de l'université de l'Etat.

Le sous-comité VII expose la question de la *préparation des maîtres de mathématiques des écoles supérieures publiques*. On tend de plus en plus à améliorer l'enseignement en exigeant des maîtres une meilleure préparation. Actuellement le baccalauréat est presque toujours demandé. Plusieurs universités ont créé des « collèges pour maîtres » et des « écoles pour la préparation des maîtres ».

Le sous-comité VIII examine les *écoles supérieures ayant 6 années d'étude*, c'est-à-dire prenant les élèves à leur sortie du 6me degré élémentaire. Le champ d'études parcouru est sensiblement le même que celui des autres écoles supérieures.

Le sous-comité IX expose les *défauts de la technique de l'enseignement mathématique secondaire* et les moyens d'y remédier.

Rapport du comité IV. — Il est intitulé « Les mathématiques dans les écoles secondaires privées des Etats-Unis ». Comme pour les précédents, des sous-comités ont rapporté sur chaque sujet et le rapport qui nous occupe est un résumé de leurs travaux. Etant donné l'indépendance de ces écoles entre elles les résultats obtenus accusent de fortes différences. Les écoles secondaires privées peuvent cependant être réparties en :

I. Académies ou écoles du même genre, comprenant aussi des écoles à organisation religieuse. Ces écoles donnent une instruction générale assez étendue ; l'écolage y est très faible ou même nul.

II. Ecoles privées à écolage élevé, généralement pour un seul sexe, ce sont des externats dans les villes et des internats dans les petites villes et la campagne.

III. Division préparatoire des collèges.

IV. Division secondaire des écoles élémentaires y compris plusieurs écoles catholiques romaines pour jeunes filles. Il y a également quelques grandes écoles coéducatives en relation avec les plus importantes des universités.

Parmi les écoles privées secondaires 21 % sont pour jeunes gens seulement, 28 % pour jeunes filles seulement et 51 % pour les deux sexes.

Parmi les divisions préparatoires au collège (celles qui dépendent de l'Etat exclues) 21 % sont pour jeunes gens, 21 % pour jeunes filles et 58 % sont coéducatives.

Au sujet des plans d'études remarquons que l'algèbre élémentaire et la géométrie plane sont obligatoires presque partout. La géométrie dans l'espace est enseignée dans 80 % des écoles de jeunes gens, 40 % des écoles de jeunes filles et 65 % des écoles coéducatives. La trigonométrie plane respectivement dans 75 %, 18 % et 35 % L'algèbre supérieure est enseignée dans environ la moitié des écoles de jeunes gens, rarement dans les autres. La géométrie dans l'espace, la trigonométrie et l'algèbre supérieure sont fréquemment des études facultatives. Quelques écoles donnent des cours sur la trigonométrie sphérique, la géométrie analytique et le calcul

différentiel. Le plan d'étude est au reste déterminé assez exactement par les connaissances exigées pour l'admission dans les collèges.

L'enquête faite au sujet de la séparation des sexes donne en résumé ceci : La majorité des maîtres est d'accord pour trouver qu'il existe une différence dans les aptitudes mathématiques des jeunes gens et des jeunes filles, ils estiment pourtant que ces différences ne sont pas suffisantes en général pour nécessiter une instruction séparée.

L'unification des divers éléments des cours et l'application des principes mathématiques à la vie de tous les jours font partie des idées directrices d'un certain nombre d'écoles.

A ce sujet le rapport reproduit 5 exposés donnant des renseignements tirés de l'étude d'un établissement déterminé pris comme exemple. En voici les titres :

1. Les principes à la base des cours de mathématique. (Ecole privée de jeunes filles de Détroit Mich.).

2. Unification des mathématiques élémentaires. (Internat pour jeunes gens, Morris Heights School, Providence R. I.).

3. Plan d'étude. (Etude expérimentale dans l'école supérieure de l'université de Chicago. Ill.).

4. La géométrie plane dans l'école préparatoire polytechnique de Brooklyn N. Y.

5. Problèmes à applications réelles. (Francis W. Parker School, Chicago).

6. Un club mathématique d'une école secondaire. (Shattuck School, Faribault, Minn.).

Les sujets traités dans l'appendice sont :

A. L'instruction mathématique dans les écoles techniques du soir.

B. L'Enseignement des mathématiques dans les écoles privées, par correspondance.

C. L'enseignement des mathématiques dans les écoles et collèges pour nègres.

R. Masson (Genève).

FRANCE

Sur l'ensemble des établissements dans lesquels se donne, en France, un enseignement mathématique.

La Sous-commission française a fait précéder les rapports spéciaux, consacrés à l'exposé des programmes et des méthodes, d'une énumération rapide des divers types d'établissements dans lesquels se donne en France un enseignement mathématique. Ce tableau[1], que nous reproduisons in extenso, a été établi par M. Ch. Bioche, d'après les renseignements fournis par M. H. Vuibert.

Enseignement primaire.

Enseignement primaire élémentaire et moyen. — Le premier enseignement des mathématiques est donné aux enfants jusqu'à l'âge de 11 ans

[1] Extrait du vol. I, *Enseignement primaire*, publié sous la direction de M. Ch. Bioche. 1 vol. — in-8°, 85 p., 3 fr. 50 ; librairie Hachette, Paris.

environ, soit dans les *écoles primaires*, publiques ou privées, soit dans les *classes élémentaires* des lycées, des collèges et des établissements libres d'enseignement secondaire.

Les enfants qui poursuivent leurs études entrent ensuite, soit dans l'enseignement primaire supérieur, puis quelquefois dans les écoles professionnelles techniques ou pratiques, soit dans les établissements d'enseignement secondaire.

Enseignement primaire supérieur. — Les écoles primaires comportent un cours supérieur que les élèves doivent suivre au moins un an avant d'être admis dans les *cours complémentaires* (un an d'études) ou dans les *écoles primaires supérieures* (au moins 2 ans d'études, normalement 3 et quelquefois 4).

La plupart des écoles primaires supérieures et un assez grand nombre de cours complémentaires ont un internat, de façon que les élèves dont les parents n'habitent pas la localité correspondante puissent bénéficier de l'enseignement donné dans ces cours ou ces écoles. « L'enseignement primaire supérieur, dit une circulaire de 1893, doit avoir un caractère franchement pratique et utilitaire ; en ce sens général il est professionnel. Mais il n'en reste pas moins un enseignement véritable, il ne se confond pas avec l'apprentissage. »

Après la première année d'enseignement primaire supérieur, les élèves se divisent en deux sections ; pour les garçons : *section industrielle* où on enseigne la mécanique avec travaux d'atelier, et *section commerciale* où on enseigne la comptabilité ; pour les filles : *section commerciale* et *section ménagère*.

On peut rattacher à l'enseignement primaire supérieur des cours, dits cours d'adultes, faits dans diverses écoles, ou organisés en dehors des écoles par des sociétés privées, des syndicats professionnels ou des municipalités. Les programmes sont très variables, ainsi que le niveau de l'enseignement ; car on peut trouver toute la gamme depuis l'enseignement le plus modeste jusqu'à celui qui est donné au *Conservatoire des Arts et Métiers*, véritable université d'enseignement technique comptant parmi ses professeurs des membres de l'Institut et nombre de savants distingués.

Sans entrer dans l'énumération des écoles primaires supérieures il semble, à propos de mentionner parmi celles-ci les *écoles primaires supérieures professionnelles*, les *écoles pratiques d'industrie et de commerce* et les *écoles d'enseignement technique* non classées quant à présent parmi les écoles manuelles d'apprentissage ou les écoles pratiques de commerce et d'industrie[1].

Enseignement secondaire.

L'enseignement secondaire est donné dans les lycées et collèges de garçons ou de filles, et dans divers établissements libres analogues. Certains de ces établissements particulièrement intéressants parce qu'ils se différencient notablement des lycées et collèges seront l'objet d'une monographie spéciale[2]. Nous nous en tiendrons donc ici à ce qui est relatif aux lycées et collèges.

---

[1] On trouvera des détails sur ces diverses écoles dans les rapports spéciaux, et pour ce qui comporte leur organisation, on trouvera des renseignements très complets dans *l'Annuaire de la jeunesse*, de M. Vuibert.

[2] Voir rapport (H) dans le volume II.

Pour caractériser l'enseignement donné actuellement dans ces établissements, nous reproduirons quelques articles du décret du 31 mai 1902.

« L'enseignement secondaire est coordonné à l'enseignement primaire de manière à faire suite à un cours d'études primaires d'une durée normale de quatre années. »

L'enseignement secondaire est constitué par un cours d'études d'une durée de sept ans, et comprend deux cycles : l'un d'une durée de quatre ans, l'autre d'une durée de trois ans ; l'âge normal des élèves est de 11 à 14 ans pour le 1er cycle, de 14 à 17 pour le second.

Dans le premier cycle les élèves ont le choix entre deux sections.

Dans l'une sont enseignés, indépendamment des matières communes aux deux sections, le latin à titre obligatoire dès la première année (classe de 6e) ; le grec à titre facultatif à partir de la troisième année (classe de 4e).

Dans l'autre, qui ne comporte pas l'enseignement du latin et du grec, plus de développement est donné à l'enseignement des sciences, du dessin, etc.

Dans les deux sections les programmes sont organisés de telle sorte que l'élève se trouve, à l'issue du premier cycle, en possession d'un ensemble de connaissances formant un tout et pouvant se suffire à lui-même.

Dans le second cycle, quatre groupements de cours principaux sont offerts à l'option des élèves :

1o Le latin avec le grec (section A) ;

2o Le latin avec une étude plus développée des langues vivantes (section B) ;

3o Le latin avec une étude plus complète des sciences (section C) ;

4o L'étude des langues vivantes unie à celle des sciences sans cours de latin (section D).

Cette dernière section, destinée normalement aux élèves qui n'ont pas fait de latin dans le premier cycle, est ouverte aussi à ceux qui, ayant suivi les cours de latin dans le premier cycle ne continuent pas cette étude dans le second.

Ajoutons que la 2e section du premier cycle et la 4e section du second cycle reçoivent des élèves ayant fait des études dans les établissements d'enseignement primaire supérieur.

Les classes terminales du cours normal des études secondaires sont la classe de philosophie et la classe de mathématiques dans lesquelles entrent les élèves après avoir passé la première partie du baccalauréat à l'issue de la classe de 1re. Ces classes constituent la 3e année du second cycle.

Dans un assez grand nombre de lycées, il y a, outre les classes mentionnées ci-dessus, des classes dites de mathématiques spéciales dans lesquelles se donne un enseignement mathématique supérieur comportant des cours d'algèbre supérieure, de géométrie analytique de calcul différentiel et intégral, de mécanique rationnelle ; un rapport particulier[1] est consacré à ces classes.

Ecoles primaires supérieures de la ville de Paris. — Il importe de faire une mention spéciale de divers établissements, existant à Paris, qui sont classés officiellement comme dépendant de l'enseignement primaire, mais qui ont un caractère à part et comportent des classes analogues à certaines classes de lycées, avec un personnel pourvu des mêmes titres ou grades que le personnel des lycées. Ce sont :

---

[1] Voir le rapport (B) volume II.

1° Les écoles Turgot, Lavoisier, Colbert, Arago, J.-B. Say pour les garçons ;

2° Les écoles Sophie Germain et Edgar Quinet pour les jeunes filles ;

3° Le collège Chaptal.

Ces établissements reçoivent des élèves sélectionnés dans l'enseignement primaire, qui se destinent aux carrières n'exigeant pas d'études classiques. Les écoles de garçons ci-dessus mentionnées préparent aussi leurs élèves au baccalauréat, série D (sciences, langues), à l'école Centrale, aux cours préparatoires de l'Ecoles des Mines et de l'Ecole des Ponts et Chaussées et aux divers emplois de la banque, de la finance, du commerce et de l'industrie. Le collège Chaptal a des classes préparant à toutes les grandes écoles scientifiques y compris l'Ecole Polytechnique et l'Ecole Normale supérieure (section des sciences).

Ecoles techniques. — Les écoles techniques présentent une grande variété tant au point de vue de l'organisation qu'à celui du but à atteindre. Les unes dépendent de l'Etat ; d'autres des départements et des communes ; d'autres enfin de particuliers.

Certaines de ces écoles préparent leurs élèves à entrer, dès la sortie de l'école, dans l'exercice d'une profession très définie ; d'autres donnent une préparation plus générale à diverses carrières industrielles ou commerciales. C'est d'après ce dernier point de vue que nous avons classé les écoles en question.

Ecoles préparant a une profession déterminée.

1° *Ecoles dépendant des différents ministères :*

Ecoles nationales professionnelles (Armentières, Nantes, Vierzon, Voiron), formant des ouvriers instruits susceptibles de devenir contre-maîtres ou chefs d'ateliers.

Institut agronomique.

Ecoles nationales d'agriculture (Grignon, Montpellier, Rennes) et écoles pratiques d'agriculture (42 écoles, sans compter les fermes-écoles et divers établissements libres).

Ecoles vétérinaires (Alfort, Lyon, Toulouse).

Ecoles des mécaniciens de la marine (Toulon, Brest, Lorient),

Ecoles d'horlogerie (Besançon, Cluses).

Ecoles d'hydrographie et navigation (16 écoles de l'Etat) formant des officiers pour la marine marchande.

Ecole navale et Ecoles spéciales militaires.

2° *Ecoles privées :*

Ecole spéciale d'architecture de Paris.

Ecoles d'horlogerie de Paris et d'Anet (Eure-et-Loir).

Ecole de papeterie de Grenoble.

Ecole d'apprentis mécaniciens du Havre.

Ecoles d'hydrographie et de navigation organisées par des chambres de commerce (7 écoles),

Ecoles préparant aux carrières d'ingénieurs.

1° *Ecoles dépendant des différents ministères :*

Ecoles des Arts et Métiers (Aix, Angers, Châlons, Cluny, Lille, Paris).

Ecole centrale des Arts et Manufactures.

École des Mines de Saint-Étienne.
École des Ponts et Chaussées.
École des Postes et Télégraphes.
École du génie maritime.
Instituts techniques dépendant de diverses facultés
École Polytechnique.
2° *Écoles privées :*
École spéciale de travaux publics.
École Centrale Lyonnaise.
Institut industriel de Lille.
École d'ingénieurs de Marseille.
École pratique d'électricité industrielle, rue Belliard (Paris).
École théorique et pratique d'électricité, rue Falguière (Paris).
École supérieure d'électricité.
École de physique et chimie de Paris.
École d'aéronautique.

Écoles préparant au professorat.

Pour exercer les fonctions de professeur dans un établissement d'enseignement public il faut avoir obtenu certains diplômes, dont la nature dépend des fonctions à exercer. Il n'est pas nécessaire pour obtenir ce diplôme de passer par une des écoles qui vont être mentionnées; celles-ci ne font que préparer leurs élèves aux examens permettant d'obtenir les diplômes en question.

Écoles normales d'instituteurs : âge d'entrée, 16 à 18 ans; temps des études, 3 ans.

Écoles normales d'institutrices : mêmes conditions.

Sections normales annexées à des écoles d'arts et métiers ou à des écoles de commerce et d'industrie préparant au professorat dans les écoles de ce genre; âge d'entrée 19 à 26 ans; temps des études : 2 ans.

Écoles normales primaires supérieures de Saint-Cloud (garçons) et de Fontenay-aux-Roses (filles) préparant des professeurs pour les écoles normales primaires; âge d'entrée de 19 à 25 ans; temps d'études : 2 ans à Saint-Cloud et 3 à Fontenay.

École normale supérieure (45, rue d'Ulm), préparant des professeurs pour l'enseignement secondaire et l'enseignement supérieur; âge d'entrée de 18 à 24 ans, temps d'études 3 ou 4 ans. Les candidats admissibles à l'École normale qui ne sont pas reçus définitivement ont droit à des bourses de licence leur permettant de suivre les cours des *Facultés.* Reçus licenciés ils peuvent obtenir des bourses d'agrégation; le titre d'agrégé étant celui qui est requis pour être titularisé dans les fonctions de professeur de lycée (des professeurs non agrégés peuvent être titularisés au bout d'un certain temps d'exercice).

École normale supérieure de Sèvres : préparant des professeurs femmes pour les lycées et collèges de jeunes filles : âge d'entrée de 18 à 24 ans; temps d'études 3 ans.

Enseignement supérieur.

L'enseignement supérieur des mathématiques est donné dans les Facultés des Sciences des diverses Universités. L'étendue des matières enseignées

est très variable d'une Université à l'autre. Certaines de ces universités ont organisé des instituts techniques dont l'organisation sera exposée dans un rapport spécial[1].

Dans quelques villes qui n'ont pas d'Université, il existe des Écoles préparatoires à l'enseignemeat supérieur des Sciences où se font des cours analogues aux cours des Facultés.

Il faut mentionner enfin les cours de mathématiques faits au Collège de France, et faire observer que certaines grandes écoles que nous avons déjà citées, l'École Polytechnique par exemple, auraient pu être classées parmi les établissements d'enseignement supérieur.

En terminant ce rapide exposé il est peut-être à propos de faire remarquer que l'enseignement des mathématiques en France présente, surtout depuis les derniers temps, une variété de types de programmes et de méthodes beaucoup plus grande qu'on ne le croit communément.

Enseignement primaire.

Les rapports consacrés à l'enseignement primaire[2] français sont les suivants :

Les écoles primaires élémentaires, par M. J. Lefebvre.

Les écoles primaires supérieures, par M. G. Tallent.

Les écoles normales primaires d'instituteurs, par M. A. Vareil.

L'Ecole normale supérieure d'enseignement primaire de St-Cloud, par M. Goursat.

Écoles primaires élémentaires (p. 9 à 15). — L'organisation des écoles primaires est fixée par l'arrêté du 18 janvier 1887. La durée des études se divise comme suit :

Section enfantinè : enfants de 5 et 6 ans.

Cours élémentaire : deux ans, de 7 à 9 sans.

Cours moyen : deux ans, de 9 à 11 ans.

Cours supérieur : deux ans, de 11 à 13 ans. En réalité ce cours n'existe pas dans toutes les écoles et la majorité des élèves ne suit que le cours moyen.

La sanction des études consiste dans l'examen du certificat d'études primaires que les candidats peuvent subir dès l'âge de 12 ans.

Le programme de mathématiques est reproduit entièrement dans le rapport de M. Lefebvre ; il est accompagné de quelques problèmes posés à l'examen du Certificat d'études.

Écoles primaires supérieures (p. 17 à 50). — L'instruction primaire supérieure est donnée dans les classes dites *Cours complémentaires* et dans les *Ecoles primaires supérieures.*

L'école primaire supérieure se distingue du cours complémentaire en ce qu'elle est, en général, distincte de l'école élémentaire et placée sous une direction différente, tandis que le cours complémentaire est annexé à une école primaire élémentaire et placé sous la même direction. D'autre part,

---

[1] Voir (D). volume III.

[2] Vol. I, p. 9-85. Librairie Hachette, Paris.

tandis que la durée des études est d'un an dans les cours complémentaires, elle est de deux ans au moins dans les écoles primaires supérieures, qui sont dites de *plein exercice* quand la durée des études est de trois ans ou plus.

L'enseignement est commun à tous les élèves en première année. Cet enseignement commun a surtout pour but de coordonner, de mettre au point et de compléter les connaissances acquises au cours supérieur des écoles primaires.

Dans les écoles de plein exercice, les élèves sont, dès le début de la deuxième année, répartis en *sections* différentes, selon la profession qu'ils ont choisie, ce choix étant déterminé par les aptitudes manifestées par chaque élève dans le cours de la première année, et par les désirs exprimés par leurs familles.

La *section d'enseignement général* comprend les candidats aux divers examens du degré primaire, c'est-à-dire n'exigeant pas un baccalauréat (écoles normales, écoles d'arts et métiers, postes et télégraphes, voirie, ponts et chaussées, chemins de fer, contributions, douanes, marine); en outre, les jeunes gens désireux et capables de poursuivre leurs études dans un collège ou un lycée (2e cycle D).

Les *sections spéciales*, dont la création est autorisée par le Ministre de l'Instruction publique, sont : la *section agricole*, la *section industrielle*, la *section commerciale* et la *section maritime*.

Les programmes de l'enseignement scientifique dans les écoles primaires supérieures sont précédés des *directions générales* suivantes :

« Les programmes doivent être considérés comme des tables de matière à enseigner dans les différentes classes ; toute latitude est laissée au professeur pour adopter tel ordre qu'il lui conviendra, pour employer les méthodes qui lui paraîtront les plus profitables aux élèves qu'il dirige.

« Le professeur ne devra pas perdre de vue le caractère de l'enseignement primaire supérieur, l'âge et la destination des élèves. Les exercices pratiques devront être multiples et porter sur des données réelles et non factices ; les théories seront réduites à des explications portant le plus souvent sur des exemples concrets. Ce qu'il convient surtout d'assurer, c'est la précision dans les connaissances acquises ; assez souvent une vérification expérimentale sera substituée à une démonstration rigoureuse ; il suffira que l'élève distingue bien ce qu'il admet de ce qu'il établit à l'aide du raisonnement.

« Les élèves seront, à toute occasion, exercés à la pratique du calcul mental.

« Le professeur fera fréquemment appel à l'emploi de graphiques. Ce procédé rend de précieux services aussi bien dans l'étude des problèmes de physique que dans celle de nombreux problèmes d'arithmétique, celui des courriers par exemple, et il importe de familiariser les élèves avec un mode de représentation très général et de plus en plus répandu de deux grandeurs qui sont *fonction* l'une de l'autre. »

Les *notions d'algèbre* proprement dite se bornent à des notions de calcul algébrique permettant de résoudre des problèmes simples, à l'étude de la résolution des équations du premier degré et de l'équation du second degré à une inconnue. Toutefois il est permis au professeur de s'affranchir de cette réserve dans les applications, pour certaines discussions très simples, s'il y trouve un réel avantage.

« *L'enseignement de la géométrie* doit être essentiellement concret : il a

pour but de classer et de préciser des notions acquises par l'observation, d'en déduire d'autres et de montrer leurs applications à des problèmes qui se posent dans la pratique. Une grande liberté est donc laissée aux professeurs dans le choix des méthodes et même dans l'ordre de succession des chapitres à exposer ».

La méthode euclidienne est abandonnée dans un certain nombre d'écoles primaires supérieures où l'on enseigne la géométrie d'après la méthode Méray. Telles sont les écoles de Dijon, de Lyon (rue Neyret), de Montbard, de Montceau-les-Mines, de Châlon-sur-Saône, de Charmes, etc.

Beaucoup de vérités géométriques importantes peuvent aussi être mises en évidence au moyen des exercices de « géométrie expérimentale » figurant au programme des travaux manuels. La démonstration rigoureuse des théorèmes qui traduisent ces vérités se trouve fort simplifiée.

« Il est recommandé aux maîtres de relier entre eux les enseignements de la géométrie, du dessin et des travaux manuels. »

Les élèves des écoles primaires supérieures ayant accompli les trois années de cours peuvent obtenir après examen le certificat d'études supérieures.

A Paris, l'enseignement primaire supérieur est donné dans les *écoles municipales* qui sont, pour les garçons, les Ecoles Arago, Colbert, Lavoisier, J.-B. Say et Turgot.

Ces écoles diffèrent notablement des écoles primaires supérieures de province. Elles comprennent toutes *quatre années d'études*, ce qui est l'exception dans les écoles primaires supérieures de province. Elles donnent des connaissances générales plus étendues en même temps que des connaissances plus spéciales.

Ecoles normales primaires d'instituteurs (p. 51-75). — L'enseignement comporte trois années d'études. L'instruction générale occupe plus spécialement les deux premières années et l'instruction pratique et professionnelle la troisième année. Les candidats doivent avoir seize ans au moins et dix-huit ans au plus et être pourvus du brevet élémentaire. L'enseignement est fixé par un arrêté du 4 août 1905. Le rapport de M. Vareil reproduit le passage concernant les mathématiques. On y trouvera d'intéressantes remarques relatives à l'enseignement de la géométrie. Les programmes de 1905 abandonnent l'ancienne division de Legendre. Un des principaux avantages de cette modification est de faciliter l'application du programme de dessin géométrique qui comprend des notions sommaires sur les projections.

Les directions officielles sont muettes sur les méthodes nouvelles qui mettent la notion de mouvement à la base de la géométrie, bien que, depuis 1901, un certain nombre de professeurs d'école normale aient adopté les idées de M. Méray et obtenu des résultats encourageants.

Chaque professeur peut choisir en toute liberté et sous sa propre responsabilité les livres qu'il met entre les mains de ses élèves. Avec raison les cours dictés sont formellement interdits parce qu'« une classe où l'on dicte le cours est mortellement ennuyeuse et sans utilité ». Le maître doit se borner à mettre en relief les points essentiels de la leçon et à en développer les parties les plus difficiles ; le livre donnera des détails complémentaires.

Ecole normale supérieure d'enseignement primaire de St-Cloud (p. 77-79). — Cette école est actuellement dans une période de transition, par suite de la création d'une nouvelle section, dite industrielle, dont les élèves

se destinent plus spécialement à l'enseignement des branches industrielles dans les écoles primaires supérieures. Pour ce qui est des mathématiques, l'enseignement consiste surtout en une revision méthodique du programme des établissements primaires supérieurs.

Appendice. — Le volume se termine par une liste des principaux ouvrages employés dans les enseignements primaire et primaire supérieur (année 1910-1911).

Enseignement technique.

Les rapports consacrés à l'enseignement technique[1] ont été publiés sous la direction de M. P. Rollet, directeur de l'Ecole municipale professionnelle Diderot à Paris. Ils fournissent une représentation très complète de l'enseignement mathématique dans les écoles techniques[2]. Celles-ci ont été réparties comme suit :

Ecoles pratiques de commerce et d'industrie (Rapports de MM. Harang et Lagneaux).

Ecoles nationales professionnelles (MM. Larivière et Tripard).

Ecoles nationales d'Arts et Métiers (MM. J. Roumajon, Bezine et Bazard).

Ecoles de Commerce (M. P. Mineur).

Conservatoire national d'Arts et Métiers (M. C. Bourlet).

Ecole centrale des Arts et Manufactures (M. P. Appell).

Pour les trois premières catégories d'écoles les rapports sont précédés des programmes officiels et des instructions pédagogiques qui les accompagnent. Les programmes de mathématiques sont suivis des programmes de dessin industriel, car ces deux enseignements doivent nécessairement se pénétrer et se compléter dans l'enseignement professionnel.

Afin de faciliter la lecture de ces rapports, M. Rollet donne dans l'introduction quelques renseignements sur l'organisation générale de l'enseignement technique et sur l'esprit dans lequel les mathématiques y sont présentées. Nous en donnerons quelques extraits :

« L'enseignement technique industriel et commercial est donné dans des établissements appartenant soit à l'Etat, aux départements ou aux municipalités, soit aux Chambres de Commerce, à des syndicats ou à des sociétés privées. Tous ces établissements sont rattachés à des titres divers à l'action du Ministre du Commerce et de l'Industrie.

« Le premier groupe des établissements appartenant à l'Etat, et relevant par suite de la direction du Ministère du Commerce, comprend les soixante-huit Ecoles pratiques de Commerce et d'Industrie, les quatre Ecoles nationales professionnelles, les Ecoles d'Horlogerie de Cluses et de Besançon, les cinq Ecoles nationales d'Arts et Métiers, l'Ecole Centrale des Arts et Manufactures, le Conservatoire des Arts et Métiers.

« Le second groupe, sur lequel le Ministère exerce une simple action de contrôle et de surveillance, comprend les diverses Ecoles de Commerce ap-

---

[1] Vol. IV des Rapports de la Sous-commission française : *Enseignement technique*. — 1 vol. in-8°, 212 p.; prix : 5 fr.; librairie Hachette, Paris.

[2] Pour ce qui concerne l'enseignement professionnel élémentaire, on consultera dans le tome I, *Enseignement primaire*, le rapport consacré aux Ecoles primaires supérieures. Tandis que pour l'enseignement technique supérieur certains établissements ont été étudiés dans le tome III, *Enseignement supérieur*.

partenant aux Chambres de Commerce à Paris et dans les grandes villes de province, l'Ecole de Physique et Chimie à Paris, les Ecoles professionnelles de la Ville de Paris, dont certaines ont un caractère à la fois industriel et artistique, l'Ecole Centrale de Lyon, l'Ecole d'ingénieurs de Marseille, l'Institut industriel du Nord, les Ecoles appartenant aux municipalités ou à des sociétés privées telles que l'Ecole supérieure d'Electricité, l'Ecole Bréguet, deux Ecoles de Mécanique et Electricité à Paris, l'Ecole professionnelle de l'Est, l'Ecole La Martinière de Lyon, de nombreux cours organisés par les municipalités, les syndicats ou sociétés à l'intention des ouvriers des diverses professions.

« Dans leur ensemble, ces cours et établissements correspondent aux trois ordres d'enseignement technique primaire, secondaire et supérieur ; ils s'adressent à tous ceux qui se destinent à une profession relevant du commerce ou de l'industrie, depuis l'ouvrier ou l'employé de commerce jusqu'au futur ingénieur ou directeur d'une exploitation industrielle ou commerciale. Un tel ensemble est toujours perfectible et sans cesse il se transforme ; mais même dans l'état présent il rend des services réels et de plus en plus appréciés. Le rôle de la Commission n'est pas d'étudier le fonctionnement de cette organisation dans ses détails et même, en se bornant au seul point de vue mathématique, le nombre et la variété des établissements ne permettent pas des études individuelles qui amèneraient le plus souvent à des répétitions de peu d'intérêt. Les rapports publiés sont relatifs à un certain nombre d'établissements généraux et leur lecture suffira pour indiquer les conceptions actuelles de l'enseignement technique et le but poursuivi sous l'influence de l'Administration du Ministère du Commerce et de l'Industrie.

« L'enseignement mathématique dans des établissements techniques, surtout dans ceux d'ordre primaire et même secondaire, ne saurait être ce qu'il est dans un lycée ou un collège, les mathématiques n'étant pas une fin ni le but, il y a lieu d'écarter toutes méthodes et toutes démonstrations qui ne concourent pas à la fin cherchée ou au but poursuivi, c'est-à-dire à la formation de l'ouvrier, du contremaître ou de l'ingénieur.

« Sans entrer dans des développements qui sont du domaine des cours techniques spéciaux, le professeur doit, chaque fois qu'il en a l'occasion, assurer la pénétration des divers enseignements en signalant les applications immédiates et utilisables des théories exposées. Elles sont nombreuses ces applications et, s'il en est de généralement connues comme celles offertes par la géométrie descriptive dans la coupe des pierres et la charpente, ou bien les questions de mécanique appliquée, il en est d'autres pouvant encore intéresser même des mathématiciens non prévenus ; la chaudronnerie fournit en géométrie descriptive un nombre inépuisable d'exemples d'intersections et de raccordements de surfaces ; il n'est pas jusqu'aux théories d'arithmétique, d'apparence abstraite, qui ne soient susceptibles d'être appliquées et utilisées et ce n'est peut-être pas sans surprise que certains des meilleurs élèves des lycées et collèges verraient des ouvriers tourneurs manier avec aisance les nombres premiers, les fractions génératrices des fractions décimales périodiques et s'efforcer de trouver une valeur approchée d'une fraction donnée par la méthode des fractions continues, et la détermination des réduites. Les procédés graphiques fournissent aussi des solutions élégantes de problèmes parfois délicats aussi bien dans l'enseignement industriel que dans celui qui se rattache aux questions commer-

ciales. Enfin l'usage constant et régulier de la règle à calcul permet d'obtenir pratiquement des résultats précieux.

« Les maîtres enseignant les mathématiques dans les écoles techniques ont des origines très diverses; malgré cette variété, et peut-être même à cause de cette variété, l'ensemble donne toute satisfaction; dévoué à sa tâche, le corps des professeurs est pénétré des nécessités de sa mission. Acceptant l'influence du milieu technique dans lequel ils vivent, les professeurs de mathématiques ont su caractériser nettement leur enseignement et lui donner son adaptation pratique, tout en ne perdant pas de vue le rôle éducatif qui reste le propre des mathématiques.

« Les résultats obtenus par les écoles techniques sont tels que de nouveaux besoins se font sentir chaque jour; aussi le Ministre du Commerce et de l'Industrie, d'accord avec le Parlement, étudie-t-il en ce moment les moyens les plus propres à favoriser et améliorer encore la préparation des professeurs. La mise à exécution du projet d'ouverture prochaine d'une Ecole Normale technique à Paris permettra de grouper et de centraliser les efforts sous une même direction et dans un milieu éminemment favorable à la formation des jeunes maîtres; ceux-ci auront alors et sans peine à leur disposition tous les moyens d'études qu'il est parfois plus difficile d'assurer dans les sections normales actuelles, ils bénéficieront des ressources variées et multiples que Paris leur offrira pour assurer leur préparation et encourager leur initiative. »

HOLLANDE

Les rapports sur l'enseignement mathématique en Hollande ont été publiés en un volume[1] de 155 p., sous la direction de M. le prof. J. Cardinaal, avec la collaboration de MM. J.-A. Barrau, J. Campert, D. Cœlingh, R.-H. van Dorsten, H.-J. de Groot, N.-C. Grotendorst, Th. Lancée, C.-J. Vinkesteyn, P. Zeeman.

Ils fournissent un aperçu très clair de l'organisation de l'instruction publique en Hollande et de la place qu'y occupent les mathématiques.

Voici la liste des établissements qui ont été pris en considération.

Ecoles primaires; « Burger avondscholen », écoles professionnelles, écoles de dessin, écoles professionnelles pour filles et écoles techniques; écoles de marine; écoles moyennes à 3 années d'études; écoles moyennes à 5 années d'études; écoles moyennes pour jeunes filles; gymnases; universités; académie technique, instituts militaires de l'armée de terre dans les Pays-Bas; écoles de machinistes pour la marine à Hellevœtsluis; institut Royal de marine Willemsoord.

Il n'est guère possible de résumer encore ces rapports déjà très condensés. Nous nous arrêterons plus particulièrement aux gymnases et aux établissements d'enseignement supérieur.

L'école moyenne à 3 années d'études a pour but de fournir à ses élèves les connaissances générales nécessaires dans le commerce, dans l'administration, dans l'exercice d'une profession, et dans les divers emplois de la vie sociale à notre époque. Il est donné dans chaque classe 6 heures de leçons de mathématiques par semaine; 2 h. d'arithmétique, 2 h. d'algèbre et 2 h. de géométrie.

[1] Librairie J. Waltman, Delft; prix: 3 fr.

L'*école moyenne à 5 années d'études* prépare plus spécialement à l'Académie technique, à l'Académie Royale militaire, à l'Institut Royal de marine, à l'étude des sciences médicales.

L'âge d'entrée est de 12 à 13 ans. Le programme mathématique comprend l'arithmétique, l'algèbre, la planimétrie, la stéréométrie, la goniométrie, la trigonométrie et la géométrie descriptive.

En Hollande il n'y a pas d'écoles moyennes officielles pour *jeunes filles*. Le pays tout entier ne compte que 11 écoles communales et quelques écoles particulières ; par contre tous les gymnases officiels ainsi que les gymnases protestants et la plupart des calvinistes admettent les élèves féminins.

Les *gymnases* sont des établissements conduisant aux études universitaires. La durée des études y est de 6 années ; les 2 dernières années sont divisées en 2 sections, l'une prépare aux facultés de théologie, de droit, de philosophie et de lettres, l'autre, aux facultés de médecine et de sciences physiques et mathématiques.

Les élèves qui le désirent doivent pouvoir suivre les 2 sections à la fois. Le nombre d'heures consacré aux mathématiques est de 4 dans la 1re classe, 3 dans les 3 suivantes et 2 ou 5 dans les 2 dernières suivant les sections. Le rapport indique les modifications reconnues désirables à la suite d'une enquête. En général on souhaite une diminution du nombre des heures attribuées aux mathématiques dans la section α (littéraire). La réduction pourrait porter principalement sur la géométrie dans l'espace, les exposants fractionnaires et négatifs, les quantités irrationnelles. Par contre, actuellement, on considère la connaissance de la représentation graphique comme nécessaire. Il est de même utile au futur avocat d'étudier les progressions, les intérêts composés et les logarithmes.

Pour la section β (scientifique) il serait bon d'introduire l'enseignement de la géométrie descriptive, surtout que depuis quelques années cette section permet d'entrer à l'Académie technique, autrefois Ecole polytechnique de Delft.

De l'avis de quelques-uns, ces adjonctions pourraient se faire sans augmenter le nombre des heures, en supprimant seulement la trigonométrie sphérique dont l'utilité n'est guère apparente que pour l'étudiant en astronomie.

L'enquête relative à la question de l'opportunité d'enseigner le calcul différentiel et intégral au gymnase, a été en majorité positive.

Ce calcul permettrait en effet de traiter simplement bien des questions de mécanique et de physique qui semblent autrement, compliquées et peu naturelles.

Les Pays-Bas ont trois *universités* de L'Etat, à Leyde, Utrecht et Groningue, une université communale à Amsterdam et une Université Libre ; cette dernière ne possède pas encore de Faculté des Sciences mathématiques et physiques.

L'organisation générale est sensiblement la même dans toutes. Le programme d'algèbre comprend pour les 2 premières années de l'algèbre supérieure, du calcul différentiel et intégral, de la géométrie analytique dans le plan et dans l'espace et de la géométrie descriptive. Pour les années suivantes les principaux cours, dont quelques-uns sont traités à tour de rôle, comprennent le calcul intégral, les équations différentielles, la théorie des fonctions, la théorie générale des courbes et surfaces algébriques, la

géométrie différentielle, le calcul des probabilités, le calcul des variations, la mécanique théorique et la physique mathématique.

L'*Académie technique* qui a remplacé l'ancienne Ecole polytechnique, elle-même précédée de l'Académie Royale, prépare les ingénieurs des diverses sections : ponts et chaussées ; architecture ; mécanique, constructions navales et électrotechniques ; technologie chimique et des mines ; sciences générales. Les études y sont de 5 ans. Le rapport concernant l'Académie technique consacre une 2me partie aux « idées modernes en matière d'enseignement mathématique ». Il existe de grandes divergences d'opinion au sujet de l'étendue du rôle que les mathématiques ont à remplir dans les études techniques supérieures.

Cependant l'extension prodigieuse de la technique depuis la 2me partie du XIXe siècle a été accompagnée d'un progrès considérable dans les sciences physiques lui-même inséparable du développement des mathématiques et de la mécanique. Cela demande par conséquent pour l'ingénieur des connaissances mathématiques plus étendues qu'autrefois. L'enseignement mathématique à l'Académie technique devra donc satisfaire à diverses conditions : Etre scientifique ; initier les auditeurs aux méthodes de la haute science afin d'élargir leurs vues et développer leur intérêt pour chaque science. Il ne doit cependant pas perdre de vue les applications techniques, soit dans le choix des sujets, soit dans celui des problèmes. Les applications géométriques du calcul différentiel et intégral, la résolution de problèmes de géométrie analytique et descriptive, le tracé personnel des constructions doivent avoir pour but de développer l'imagination.

La Commission d'Etat pour la réorganisation de l'enseignement, créée en 1903, n'ayant publié ses résultats qu'après ceux de la Sous-commission nationale, il a été adjoint à la fin de ce volume un rapport complémentaire sur ce sujet.

La Commission d'Etat avait surtout pour mission d'obtenir un « meilleur enchaînement » des divers degrés de l'enseignement. La Sous-commission donne un aperçu des réformes proposées par la Commission d'Etat.

Entre les six doctorats de la Faculté des Sciences physiques et mathématiques deux seulement donnent complètement le droit d'enseigner les mathématiques dans les lycées, ce sont celui des Sciences mathématiques et astronomiques et celui des Sciences mathématiques et physiques. Aux autres, doit être adjoint, soit une autorisation d'enseigner les mathématiques, soit un certificat de capacité des Sciences mathématico-astronomiques ou des Sciences mathématico-physiques.

L'intuition et l'expérience dans l'enseignement mathématique des écoles moyennes hollandaises.

A propos du Congrès de Milan.

L'intéressant rapport présenté par M. Castelnuovo au Congrès de Milan sur la question de la rigueur, identique au fond à celle du rôle d'intuition et expérimentation, donne lieu, en ce qui concerne les Ecoles moyennes néerlandaises, aux remarques suivantes que nous adressent MM. Cardinaal et Barrow :

« La méthode d'enseignement en mathématiques est généralement celle

indiquée par B_B dans le rapport de M. Castelnuovo, comme est déjà constaté brièvement dans notre rapport (p. 50). En effet, tous nos manuels sont écrits dans cet esprit et on doit admettre que les professeurs suivent la méthode du manuel choisi de plein gré, rien ne les empêchant d'en écrire d'autres. Il existe actuellement une production abondante de manuels nouveaux, mais ils ne diffèrent point par la question de la rigueur. Tous partent d'un système d'axiomes, mis plus ou moins en relief, de fondement empirique et quasi-complet (B_B) et en développent les conséquences par enchaînement logique.

« On pourrait même dire que l'opinion publique attend de l'enseignement mathématique qu'il apprenne en premier lieu à « raisonner juste ».

« Tel qui, entré en carrière, a peut-être oublié tous ses théorèmes et à fortiori leurs démonstrations, s'imagine pourtant que, des mathématiques faites en classe, il lui reste le sentiment de « ce que c'est qu'une preuve rigoureuse », et ces heures de géométrie ne lui semblent pas perdues.

« Certes il voit bien que quelques-uns de ses camarades de classe, toujours faibles en géométrie, sont pourtant devenus des gens très raisonnés et très raisonnables, ou bien que d'autres, forts résolveurs de problèmes, ne valent pas autant devant les problèmes de la vie. Mais ces observations n'ébranlent pas sa conviction que, généralement, l'enseignement mathématique développe les facultés logiques de l'élève. Et, pour lui, c'est là la seule et suffisante raison d'être de cet enseignement pour tous ceux qui, comme lui, n'auront pas ultérieurement à appliquer les théorèmes appris et, par suite, les oublieront. Et il semble que c'est bien précisément la méthode B_B (ou tout au plus B) qui convient au représentant de l'opinion commune que nous avons indiquée plus haut. La méthode A — ou déjà B_A — lui semblerait bonne et nécessaire pour les futurs professionnels dès qu'ils se sont spécialisés comme tels, mais trop argutieuse et trop prolixe pour l'élève ordinaire de l'école moyenne. Les méthodes C et D — quoique comptant dans le corps des professeurs quelques adhérents isolés qui n'ont pourtant jusqu'à présent pas fait école — lui arracheraient sans doute cette critique « les sujets sont mathématiques, la méthode ne l'est pas ».

« Et puisque, selon l'avis du rapporteur, l'école moyenne, tout comme l'école primaire, doit bien se garder de vouloir trop différer en tonalité scientifique du « milieu ambiant », afin de ne perdre la confiance publique dont elle a besoin avant tout, il en résulte que, chez nous, il serait indésirable et de mauvaise stratégie pédagogique d'imposer des réformes dans un sens ou dans un autre.

« Cela ne veut pas dire que l'intuition et la tentative d'expérimentation ne joueraient pas de rôle dans l'enseignement ! Surtout en géométrie les professeurs font leur possible non seulement pour donner l'énoncé correct des théorèmes, mais surtout pour les rendre vivants, palpables, familiers. Et ceux qui y réussissent le mieux, sont réputés les meilleurs.

« Récemment dans le domaine de la stéréométrie, une réaction s'est faite contre les problèmes de cubature : volumes de prismes et pyramides tronqués, secteurs et calottes sphériques ; on ne voulait plus de positions de droites et plans, constructions d'angles trièdres, propriétés de tétraèdres, afin de développer la faculté de voir dans l'espace. Aussi un certain nombre de traités ont paru, préconisant plus qu'auparavant, ces matières. Mais pas un n'a quitté le point de vue qu'un théorème conçu par voie intuitive ou par vision directe n'est pas vraiment théorème avant d'être dûment prouvé

par voie déductive. Et — ce qui est l'âme de la question — *l'élève* aussi est pénétré du même esprit. Si, par exemple, il *voit* que dans un problème la droite *l* est perpendiculaire au plan *v*, il a pleine conscience qu'il s'agit maintenant de découvrir dans *v* deux lignes non parallèles dont il peut prouver la perpendicularité à *l*. S'il n'y réussit pas, il ne se sent pas sûr que la perpendicularité perçue ne soit pas due au choix particulier de la figure qu'il a devant les yeux.

« Si donc, en concluant, nous exprimons les deux vœux suivants, nous constatons en même temps que pour les écoles moyennes néerlandaises ces vœux sont généralement exaucés.

« 1. Les programmes prescrivant les matières mathématiques à traiter dans les diverses classes des Ecoles moyennes doivent laisser aux professeurs pleine liberté de choisir la méthode d'enseignement qu'ils jugent convenable.

« 2. Il est désirable que le professeur d'école moyenne, tout en choisissant la méthode d'enseignement mathématique qui satisfait le mieux possible ses préférences individuelles et les exigences de sa conscience scientifique, se garde de forcer trop la capacité logique et la disposition générale normale et naturelle du milieu d'où proviennent les élèves.

J. Cardinaal, président. Barrow, secrétaire.

ILES BRITANNIQUES

N° 10. — Les examens.

Examinations from the School point of View[1], by Mr. Cecil Hawkins, late Senior Mathematical Master at Haileybury College. — Dans les grandes écoles publiques d'Angleterre et dans d'autres établissements de renom, les élèves qui s'approchent de la fin de leur carrière scolaire et qui ne pensent pas pousser plus loin leurs études, se contentent souvent de passer leurs examens scolaires proprement dits sans se présenter à d'autres examens spéciaux en vue d'obtenir un certificat d'études. Le rang qu'ils occupent à l'école leur est une garantie suffisante. Ceux, par contre, qui ont l'intention de continuer leurs études à l'université ou d'embrasser une profession libérale, sont tenus de passer un examen préliminaire comme garantie d'études générales suffisantes.

Dans tous ces examens préliminaires, les mathématiques figurent comme branche obligatoire. Dans certains, on trouve les mathématiques plus avancées (More advanced Mathematics) comme l'un des sujets spéciaux pouvant être choisis par le candidat. L'arithmétique est toujours exigée, ainsi qu'un peu d'algèbre et de géométrie, exception faite cependant pour l'université d'Oxford où le candidat doit choisir entre l'algèbre et la géométrie.

En Angleterre, le nombre des examens auxquels peuvent se présenter les candidats ayant quitté ou quittant les écoles secondaires est considérable. L'auteur les divise en quatre classes suivant les exigences mathématiques.

---

[1] 104 p. : Price nine pence ; Wyman & Sons, Londres.

1. *Oxford Higher Locals, Cambridge Higher Locals* et *Preliminary Examination of the Institute of Civil Engineeres.*

2. Les *Oxford Senior Locals, Cambridge Senior Locals, Cambridge Previous*, différents *Matriculation Examinations*, quelques *Preliminary Examinations* parmi les plus difficiles, le *College of Preceptors* de Ire Classe et les examens pour *School Certificats, Higher School Certificates, Senior School Certificates* et *School Leaving Certificates.*

3. Les *Junior Locals, Junior School Certificates, College of Preceptors* IIme Classe et les autres *Preliminary Examinations.*

4. *Oxford Responsions.*

Il n'est pas possible ici d'entrer dans les détails concernant tous ces examens. D'une façon générale, ils sont à peu près du même type, ils diffèrent cependant par certains de leurs détails et leur organisation est telle que la réussite de l'un d'eux dispense le candidat des autres examens de la même catégorie.

Les certificats qui sont délivrés en cas de succès sont suffisamment explicites pour qu'on puisse se rendre compte du degré de capacité correspondant. Malheureusement il semble que bien peu de personnes se font une juste idée de la valeur respective de ces différents examens; on exagère parfois l'importance de certains certificats qui ne représentent en somme que des connaissances très restreintes.

Citons comme exemple la *London University Matriculation.* Les mathématiques élémentaires, qui constituent un sujet obligatoire, y figurent sous la forme de deux épreuves, l'une d'arithmétique et d'algèbre, l'autre de géométrie. L'algèbre comprend les trois progressions, mais exclut les racines et puissances, rapports, proportions et variations. En géométrie, Euclide de I à IV, avec déductions simples, lieux géométriques faciles, aires de triangles et parallélogrammes (on n'insiste pas sur les démonstrations d'Euclide). Les mathématiques (plus avancées) y figurent comme l'un des dix-huit sujets non obligatoires; le candidat doit en choisir deux. L'épreuve comprend l'algèbre (puissances, logarithmes et binôme à exposant positif) la géométrie (figures semblables, mesure du cercle et géométrie analytique élémentaire de la droite et du cercle) et la trigonométrie, y compris la résolution des triangles. En tenant compte du fait qu'une très faible proportion de candidats choisissent cette branche, on voit que 95 % environ des *London Matriculation certificates* ne représentent, en ce qui concerne les mathématiques, que les deux branches de mathématiques élémentaires citées plus haut; ce qui est évidemment insuffisant dans le cas où le candidat se destine à l'enseignement ou à une profession quelconque dans laquelle les mathématiques jouent un rôle important.

Un autre inconvénient concernant les examens de cette catégorie, c'est qu'il est presque inutile d'y envoyer un candidat sans préparation spéciale. Il doit consacrer des mois, quelquefois plus d'une année à cette préparation artificielle n'ayant pour but que de l'habituer au genre de questions qui pourraient lui être proposées à l'examen, et cela au moment même où il serait beaucoup plus important pour lui d'avancer ses études et spécialement les mathématiques.

Dans le système actuel des examens, un grand nombre d'entre eux sont organisés de façon à éliminer environ 50 % des candidats. Or, les examens peuvent être divisés grossièrement en trois catégories :

1. Concours en vue de l'obtention de certains postes et rendant possible le choix des meilleurs candidats.

2. Examens permettant la sélection de candidats qui sont vraiment au-dessus de la moyenne pour une certaine branche ou pour certains sujets.

3. Examens destinés à garantir la bonne éducation générale des candidats et à exclure ceux qui sont décidément incapables.

On conçoit bien que la ligne de démarcation entre les candidats qui pourront être acceptés et ceux qui devront être refusés doit dépendre de la catégorie d'examens considérée. Les conditions ne sont pas les mêmes quand il s'agit de choisir les meilleurs ou d'éliminer les plus mauvais. On devrait donc en tenir compte d'une façon plus sensible dans les questions d'examens. L'auteur estime que dans le cas de la troisième catégorie 70 à 80 % des candidats devraient réussir. Par contre, quand il s'agit d'une sélection des candidats les plus capables, ce pour-cent devrait être beaucoup plus faible, 25 % par exemple. Des statistiques et des diagrammes viennent à l'appui de ces propositions.

L'auteur s'occupe plus spécialement des examens concernant le service militaire et le service civil (*Army and Civil Service*). Les autorités se plaignent constamment de ce que leurs candidats ne possèdent pas toute l'éducation voulue. S'il en est ainsi, c'est en grande partie parce que les places de ce genre sont insuffisamment rétribuées si l'on tient compte du genre de vie qu'elles exigent.

Les examens de Woolwich et de Sandhurst ont été continuellement transformés quant à leur organisation et les derniers règlements ne leur sont guère favorables. Ces examens sont d'un type beaucoup trop spécial et les différents sujets beaucoup trop nombreux. Ici encore le candidat est obligé de consacrer un temps précieux à leur préparation exclusive, ce qui nuit considérablement à son développement général.

L'auteur critique encore bien des points qu'il n'est pas possible de signaler dans ce bref résumé. De nombreuses remarques seraient à faire concernant les questions mêmes d'examen qui souvent s'écartent par trop des programmes, manquent de clarté et de simplicité et dont la solution exige parfois de fastidieux artifices. Il ne faut pas oublier que les examens ont pour but d'éprouver la solidité des connaissances du candidat, de se rendre compte s'il est vraiment capable de se tirer d'affaire en présence de certains problèmes qu'il pourra rencontrer plus tard. Lorsque les examinateurs sauront mieux se conformer à cette façon de voir, il est certain que le système entier des examens s'améliorera d'une manière sensible.

A la suite du rapport on trouve la reproduction des questions d'examens proposées en 1910 dans plusieurs des établissements cités. Dans certains cas, celles de 1900 ont été également reproduites à titre de comparaison.

J.-P. Dumur (Genève).

Cours universitaires.

Année 1912-1913.

ÉTATS-UNIS

Columbia University (New-York). — Prof. C. J. Keyser : Modern theories in geometry, 3. History and significance of central mathematical concepts, 3. — Prof. T. S. Fiske : Introduction to the theory of functions of a real

variable, 3 ; Functions defined by linear differential equations, 3. — Prof. F. N. Cole : Introduction to the theory of functions, 3 ; Theory of plane curves, 3. — Prof. James Maclay : Theory of numbers, 3, first half-year ; Differential equations, 3, second half-year. — Prof. D. E. Smith : History of mathematics, 3. — Prof. Edward Kesner : Integral equations, 2 ; Seminar in differential geometry, 3. — Prof. W. B. Fite : Calculus of variations, 3. — Prof. H. E. Hawkes : Modern higher algebra, 3, second half-year. — Dr H. W. Reddick : Differential equations, 3, first half-year. — Dr N. J. Lennes : Projective geometry, 3. — The mathematical colloquium will meet at intervals of about two weeks.

Cornell University (Ithaca). — Prof. J. Mc Mahon : Theory of probabilities, 2 ; Vector analysis, 2. — Prof. J. I. Hutchinson : Linear differential equations, 2 ; Elliptic integrals, 2, (first term). — Prof. V. Snyder : Analytic geometry of space, 3, (second term). Prof. F. R. Sharpe : Introduction to mathematical physics, 3 ; Prof. W. B. Carver : Theory of equation, 2 ; Descriptive geometry, 3, (first term). — Prof. A. Ranum : Differential geometry, 2. — Prof. D. C. Gillespie : Principales of mechanics, 3. — Dr C. F. Craig : Elementary differential equations, 2. — Dr F. W. Owens : Projective geometry, 3. — Dr J. V. Mc Kelvey : Algebraic curves, 3. — Dr L. L. Silverman : Advanced calculus, 3. — Dr W. A. Hurwitz : Theory of functions of a complex variable, 3.

University of Chicago. — Prof. E. H. Moore : Integral equations in general analysis ; General seminar on mechanical quadrature, continued fractions, and boundary problems (throughout the year). — Prof. G. W. Myers : History of mathematics (winter). — Prof. L. E. Dickson ; Theory of invariants (autumn and winter) ; Theory of numbers (winter) ; Theory of equations and linear algebras (spring). — Prof. J. W. A. Young : Limits and series (winter). — Prof. H. E. Slaught : Differential equations (autumn). — Prof. G. A. Bliss : Theory of functions (autumn) ; Definite integrals and abelian (winter), Hyperelliptic functions (spring). — Prof. E. J. Wilczynski : Selected topics in geometry (autumn and winter) ; Projective differential geometry (spring). — Prof. A. C. Lunn : Graphical analysis and theory of attraction and potential (autumn) ; Fourier series and Bessel's functions and vector analysis (spring).

Clark University (Worcester, Mass.). — Prof. W. E. Story : Analytic geometry of higher plane curves, higher surfaces, and twisted curves, 3 ; Calculus of operations and finite differences, 3 ; Theory of errors, (3 hours first half-year) ; Infinitesimal geometry (3 h. second half-year) ; Seminar. Prof. Taber : Theory of functions, 5 ; Integral equations (2,I) ; Hypercomplex number systems (2 h. II), Seminar. — M. de Perrot : Theory of numbers (2 h. first half-year) ; abelian integrals (2 h. second half-year).

Harvard University (Cambridge Mass.). — Prof. W.-E. Byely : Advanced calculus, 3 ; Dynamics of a rigid body, 3 ; Trigonometric series, introduction to spherical harmonics and the potential function., 3 with Prof. B. O. Peirce. — Prof. W. F. Osgood : Advanced algebra, 3 (second half year) ; Theory of functions, II, 3. — Prof. M. Bôcher : Ordinary linear differential equations, 3. — Prof. C. L. Bouton : Elementary theory of differential equations, 3 (first half year) ; Geometric transformations, 3. — Prof. E. V. Huntington : Fundamental concepts of mathematics, 3 (second half year). — Prof. J. L. Coolidge :

Introduction to modern geometry and modern algebra, 3; Geometry of the circle, 3. — Prof. G. D. Birkhoff : Theory of functions, first course, 3; Calculus of variations, 3 (first half year). — Dr D. Jackson : Infinite serie and products, 3 (first half year); Definite integrals, 3 (second half year). — Various courses in reading and research are also offered on special topics, and Prof. Osgood and Birkhoff will conduct a fortnightly seminar in the theory of functions.

University of Illinois (Urbana, Ill.). Prof. E. J. Townsend : Complex variables, 3. — Prof. G. A. Miller : Elementary group theory, 3. — Prof. H. L. Rietz : Actuarial theory, 3 hours (first term). — Prof. C. H. Sisam : Differential geometry, 3. — Prof. J. B. Shaw : Fourier series, 3. — Prof. A. Emch : Elliptic functions, 3. — Dr A. R. Crathorne : Linear differential equations, 3. — Dr R. L. Börger . Modern algebra, 3. — Dr E. B. Lytle : History of mathematics, 3.

Indiana University (Bloomington). — Prof. S. C. Davisson : Ordinary differential equations (a, w), 3; Fourier's series (s), 3; Theory of functions (a, w, s), 2. — Prof. D. A. Rothrock : Advanced calculus (a, w, s), 3; Higher geometry (a, w), 3. — Prof. U. S. Hanna : Theory of errors (a), 3; Substitution groups and Galois theory (w, s), 3. — Prof. R. D. Carmichæl : Functions of an infinite number of variables (a, w), 3; Partial differential equations (a, w), 3; Theory of numbers (s), 5; Seminar in difference equations (a, w, s), 2. (a, w, s = autumn, winter, spring quarters).

Johns Hopkins University (Baltimore). — Prof. F. Morley : Higher geometry, 2; Dynamics, 2 (second term); Seminar 2. — Prof. A. B. Coble : Theory of correspondences, 2; Theory of probabilities, 2 (second term). — Prof. A. Cohen : Theory of functions, 2; Differential equations, 2 (first term); Theory of numbers, 2 (second term). — M. H. Bateman : Integral equations, 2.

Princeton University (Princeton N.-J.). — Prof. H.-D. Thompson : Analytic geometry 3; Infinitesimal geometry, 3. — Prof. L.-P. Eisenhart : Differential geometry, 3; Mechanics, 3. — Prof. O. Veblen; Algebra, 3; Seminar, 3. — Prof. J.-G. Hun : Analytic projective geometry (second term) 3. — Prof. E. Swift : Calculus of variations (second term), 3. Prof. J.-H. McL. Wedderburn : Theory of functions of a complex variable, I (first term), 3.

ITALIE[1]

Bologna; *Università.* — Burgatti : Moto perturbato dei pianeti : teorie classiche e teorie moderne, 3. — Donati : Termodinamica nelle sue attinenze coll' elettromagnetismo, 3. — Enriques . Funzioni algebriche, 3. — Pincherle : Complementi di analisi infinitesimale ; Teoria elementare delle equazioni integrali, 3.

Catania; *Università.* — De Franchis : Superficie iperellittiche, 4. — Lauricella : Funzioni ortogonali ; Sviluppi in serie di funzioni ortogonali ; Applicazione alle equazioni integrali, 3. — Pennacchietti : Teoria delle

[1] Les cours fondamentaux, ayant programme nécessairement fixe, ou presque fixe, ne figurent pas dans la liste. Ce sont les cours d'Analyse algébrique et infinitésimale, de géométrie analytique, projective, descriptive, de mécanique rationnelle et de géodésie.

funzioni ellittiche con particolare riguardo alle applicazioni alla meccanica, 4. — SEVERINI : Equazioni integrali, 4.

Genova ; *Università.* — LEVI : Equazioni differenziali, 4. — LORIA : Geometria differenziale delle curve e delle superficie, 3. — TEDONE : Acustica, 3.

Napoli ; *Università.* — AMODEO : Storia delle matematiche : Da Galilei a Newton, 3. — DEL RE : Analisi generale di Grassmann ad *n* dimensioni con applicazioni alla geometria ed alla meccanica degli spazi a curvatura costante (II parte), 4 1/2. — GALLUCCI : Teoria delle configurazioni, 2. — MARCOLONGO : Teoria dell'elasticità ; Vibrazioni dei corpi elastici ; Membrane elastiche, 3. — MONTESANO : Teoria generale delle superficie ; Superficie di 3° ordine, 4 1/2. — La geometria degli elementi immaginari, 3. — PASCAL : Le superficie di Riemann e le funzioni su di esse, 3. — PINTO : Teoria di propagazione del calore, 4 1/2.

Padova ; *Università.* — D'ARCAIS : Funzioni di variabile complessa ; Applicazioni classiche, 4. — CISOTTI : Teoria matematica dell'elasticità con applicazioni tecniche, 3. — GAZZANIGA : Teoria dei numeri, 3. — LEVI-CIVITA : Meccanica analitica con applicazioni alla termodinamica e alle teorie del moto sorte dalla relatività elettromagnetica, 4 1/2. — RICCI : Teoria del potenziale con applicazioni, 4. — SEVERI ; Geometria non euclidea, 4. — VERONESE : Principi della geometria, 3.

Palermo ; *Università.* — BAGNERA : Teoria delle equazioni integrali e le loro applicazioni in analisi, 3. — GEBBIA : Teoria dei campi vettoriali ; Teoria dell'elettricità e del magnetismo, 4 1/2. — GUCCIA : Teoria generale delle curve e delle superficie algebriche, 4 1/2. — VENTURI : Movimenti di traslazione e di rotazione dei pianeti ; Perturbazioni generali e speciali ; Ciclo euleriano e movimenti del polo terrestre, 3.

Pavia ; *Università.* — BERZOLARI : Geometria differenziale, 3. — GERBALDI : Funzioni di variabile complessa ; Funzioni ellittiche, 3. — VIVANTI : Teoria delle trasformazioni di contatto, 3. — N. N. : Fisica matematica, 3.

Pisa ; *Università.* — BERTINI : Geometria proiettiva degli iperspazi, 3. — BIANCHI : Funzioni di variabile complessa ; Funzioni ellittiche, 4 1/2. — DINI : Serie di Fourier ; Sviluppi delle funzioni di una variabile reale, date arbitrariamente, in serie d'integali di equazioni differenziali lineari del 2° ordine, 4 1/2. — MAGGI : Principi della dinamica analitica ; Teoria elettronica del campo elettromagnetico, 4 1/2. — PIZZETTI : Nozioni generali di astronomia sferica ; Principi del metodo di determinazione delle orbite ; Teoria generale delle perturbazionni, 4 1/2.

Roma ; *Università.* — BISCONCINI : Applicazioni geometriche del calcolo differenziale e integrale, 3. — CASTELNUOVO : Geometria differenziale, 3. — VOLTERRA : Equazioni differenziali della fisica matematica, 3. — Funzioni dipendenti da altre funzioni ed applicazioni alla meccanica, 3. — N. N. Analisi superiore, 3.

Torino ; *Università.* — BOGGIO : Idrodinamica, 3. — FUBINI : Geometria euclidea e non euclidea ; Divisione del piano e dello spazio, euclideo o no, in parti congruenti ; Funzioni di variabile complessa ; Funzioni automorfe, 3. — SANNIA : Geometria differenziale, 2. — SEGRE : Enti geometrici legati ai sistemi lineari di curve e superficie di 2° ordine, 3. — SOMIGLIANA : Teoria dell'elasticità con applicazioni, 3.

BIBLIOGRAPHIE

Catalogue international de la littérature scientifique, publié par une Commission internationale sous la direction de H. Forster Morley. A. *Mathématiques,* vol. 8. — 1 vol. in-8°, 240 p.; 18,50 fr.; Gauthier-Villars, Paris; Harrison & Sons, Londres.

La présente publication est une table par noms d'auteurs et par sujets de la littérature scientifique publiée depuis le 1er janvier 1901. Chaque pays a entrepris la table de sa littérature: les matériaux ainsi réunis sont envoyés au Bureau central de Londres qui est organisé pour publier des volumes annuels contenant les documents fournis par les différents pays.

Une explication de la classification et de la table est jointe à chaque volume, en allemand, en anglais, en français, en italien. Ces langues, ainsi que le latin, sont les seules employées pour les traductions, mais dans le catalogue par noms d'auteurs le titre de chaque publication est donné dans la langue originale.

Le prix de chaque publication annuelle complète est de 450 fr. Chaque année comprend 17 volumes. Un nombre limité de volumes ont été imprimés sur papier mince et sur un seul côté de la feuille. Ces volumes sont destinés à ceux qui veulent préparer des catalogues sur fiches. Le supplément pour ces volumes est de 2 fr., mais il est nécessaire de s'informer auparavant pour le cas où ils seraient épuisés.

Le Volume contenant les titres des journaux dépouillés pour la préparation du Catalogue est aussi publié. Cette Liste des Journaux sera d'un grand secours aux bibliothécaires et bibliographes qui ont souvent de la difficulté à trouver le titre exact des périodiques qui ne sont pas dans les bibliothèques.

Le présent volume donne les fiches réunies de mai 1908 à avril 1909 pour les sciences mathématiques.

Mathematische Bibliothek. Gemeinverständliche Darstellungen aus der Elementar-Mathematik für Schule und Leben, herausgegeben von Dr W. Lietzmann und Dr A. Witting. Petits volumes cartonnés de 70 à 90 p., à M. 0,80; B. G. Teubner, Leipzig.

1. E. Löffler, *Ziffern und Ziffernsysteme der Kulturvölker in alter und neuer Zeit.*

2. H. Wieleitner, *der begriff der Zahl in seiner logischen und historischen Entwicklung.*

3. W. Lietzmann, *der pythagoreische Lehrsatz mit einem Ausblick auf das Fermatsche Problem.*

4. O. Meissner, *Wahrscheinlichkeitsrechnung, nebst Anwendungen.*

Pendant longtemps les mathématiques ont eu la réputation de science très sèche, faisant il est vrai appel au développement du raisonnement, mais ne pouvant par elle-même intéresser qu'un cercle très restreint de spécialistes.

Actuellement, elles tendent de plus à plus de prendre leur rang comme science à la base des sciences exactes et de la technique.

La *Mathematische Biblothek* vient à propos pour répondre au besoin nouveau qui se développe dans le cercle toujours croissant des gens cultivés.

Elle présente sous une forme compréhensible dans de petits volumes de 80 Pfennig des problèmes détachés et des aperçus sur quelques domaines des mathématiques; les uns ayant pour but la culture générale, d'autres ayant une importance mathématique spéciale. Le lecteur est ainsi mis à même de s'instruire en dehors du domaine généralement réservé à l'école.

Le premier de ces petits livres est *Ziffern und Ziffernsysteme der Kulturvölker in alter und neuer Zeit*, par E. Löffler. Il traite des chiffres, indispensables aux mathématiques, en les plaçant au centre de considérations intellectuelles et historiques, non seulement pour leur forme et leur représentation extérieure, mais surtout, en considérant les principes qui ont contribué chez les différents peuples au développement de la représentation des nombres par les chiffres et à la formation d'un système de chiffres. Il montre que les chiffres et leurs systèmes sont en corrélation étroite avec le développement intellectuel d'un peuple, et constituent un des liens entre les divers peuples et les diverses époques.

Le second volume *Der Begriff der Zahl in seiner logischen und historischen Entwicklung*, par H. Wieleitner, expose le développement de la notion de nombre, depuis le nombre entier absolu, jusqu'aux nombres complexes habituels. Le côté historique de ce sujet est traité simultanément avec le développement logique de l'extention de la notion de nombre.

Dans le troisième volume *Der pythagoreische Lehrsatz mit einem Ausblick auf das Fermatsche Problem*, M. W. Lietzmann n'a pas l'intention de faire un exposé complet des démonstrations du théorème de Pythagore. Il veut surtout montrer quel nombre considérable de relations il existe entre les divers domaines des mathématiques et qu'en réalité les faits mathématiques, pour employer une figure, forment un filet et non une chaîne. Il choisit pour cela cet exemple soit en raison de son importance au point de vue historique et au point de vue de l'enseignement, soit en raison de son caractère élémentaire. Il cherche dans la mesure du possible avec un cadre aussi étroit à amener le lecteur à la réflexion mathématique personnelle. Ce but pénètre tout l'ouvrage, il est encore accentué par l'introduction, dans le cours de l'exposition, d'un grand nombre de questions connexes.

Le quatrième volume donne les notions du *calcul des probabilités* et de la théorie des erreurs, par M. O. Meissner (Potsdam).

G.-W. Evans. — **The Teaching of High School Mathematics** (Riverside Educational Monographs). — 1 vol. in-16; X-94 p., Houghton Mifflin Company, Boston, New-York, Chicago.

Le but de ce petit volume est de servir de guide dans le chaos amené, dans l'enseignement mathématique en Amérique, par les discussions des dix dernières années; il donne pour cela des indications sommaires sur les matières et les méthodes à employer.

L'organisation scolaire est actuellement en transformation. Le point de

vue pratique a influé sur le but et le point de vue psychologique sur les méthodes de l'enseignement. Il y a maintenant une tendance marquée à accorder plus d'importance au développement de la maîtrise des facultés qu'à l'emmagasinement de connaissances toutes faites.

M. Evans considère dans un premier chapitre le point de vue moderne. Les réformes apportées à l'enseignement ont eu pour but de faciliter l'application immédiate des connaissances acquises, de manière à rendre utile même une instruction non terminée; ce qui est d'autant plus nécessaire que la majorité des élèves ne poussent pas leurs études très loin.

L'auteur donne un aperçu historique de l'origine et des modifications des termes et des symboles mathématiques et de leurs définitions.

Le second chapitre traite de l'ordre à suivre dans l'enseignement des mathématiques avec, à titre d'exemple, un programme pour la 1re année d'études secondaires.

Les chapitres suivants contiennent des considérations sur la manière de présenter les équations et de mettre en lumière, dès le début, leur utilité, ainsi que des remarques sur les méthodes d'approximation dans diverses opérations, divisions, extractions de racines.

Au sujet de l'application de la géométrie à l'algèbre l'auteur insiste sur l'importance d'une bonne notation.

Il consacre ensuite un chapitre à la question de la mesure, dans laquelle il faut faire usage de la démonstration déductive, et des bases sur lesquelles il faut l'appuyer.

A propos de la méthode des limites M. Evans montre comment on peut présenter les quantités incommensurables rencontrées en géométrie en combinant la clarté à la rigueur.

La règle de Simpson fait l'objet d'un chapitre. L'auteur estime qu'il est bon de l'enseigner, car c'est le seul moyen, à la portée de l'élève, qui lui permette d'obtenir l'aire d'une surface plane limitée par une courbe quelconque avec une approximation relativement grande. Elle peut, de plus, servir à la démonstration du principe de Cavalieri sur l'équivalence de deux solides à bases et sections équivalentes. Enfin dans le dernier chapitre M. Evans donne quelques conseils au corps enseignant en lui rappelant que le succès des réformes de l'enseignement quoique pouvant être favorisé par les manuels dépend surtout du maître. R. Masson (Genève).

D. Gautier. — **Mesure des angles.** Hyperboles étoilées et développante. — 1 vol. in-8°, IV-84 p.; 2 fr.; Gauthier-Villars, Paris.

M. le commandant D. Gautier se propose de donner pour la mesure pratique des angles un appareil plus pratique que le rapporteur. Voici sa méthode : construisez en coordonnées rectangulaires la courbe (hyperbole développante) $y = x \cot g\, x$; une droite passant par l'origine et faisant l'angle θ avec oy coupe la courbe en un point dont l'abscisse est θ. La mesure des angles est ainsi ramenée à celle des longueurs. Sans insister plus on voit que pour la mesure des angles l'appareil équivant exactement au rapporteur ordinaire; la division des angles serait un peu simplifiée, au moins théoriquement. L'auteur fait remarquer (mais sa démonstration doit être rendue rigoureuse) que, pour les valeurs de θ inférieures à $\frac{7}{6}$, on peut remplacer pratiquement la courbe par le cercle osculateur, de rayon $\frac{3}{2}$, en son

sommet. Cette propriété assez remarquable pourrait servir de justification à la méthode de l'auteur, dont l'exposition gagnerait certainement à être dégagée de la théorie inutile et peu intéressante des hyperboles étoilées, théorie qui occupe la majeure partie de l'ouvrage.

G. Valiron (Besançon).

E.-E. Whitford. — **The Pell Equation**. — 1 vol. in-8°, 193 p.; chez l'auteur, College of the City of New-York.

L'auteur de cette savante monographie de la célèbre équation en montre les lointaines origines dans les essais faits par les Anciens, en vue de représenter les racines carrées des nombres non carrés. Les tentatives de représentation exacte de ces irrationnelles par des fractions rationnelles ayant échoué, à leur grande surprise, ils auront essayé de déterminer celles de ces fractions qui s'en rapprochaient le plus : soit en effet $b^2 n = a^2 + r$, la fraction $\frac{a}{b}$ représente la valeur de $\sqrt{n}$ avec d'autant plus d'exactitude que r est plus petit. Il était donc naturel de chercher à déterminer a et b de manière que $r = \pm 1$. Les pythagoriciens avaient ainsi déduit de considérations géométriques, les solutions de l'équation $x^2 - 2y^2 = 1$, ce qui les avait conduits aux récurrences arithmo-harmoniques bien connues : les approximations de $\sqrt{2}$, de $\sqrt{3}$ et d'autres racines fournies par Platon, Archimède, Héron et Théon de Smyrne autorisent ces suppositions, admises d'ailleurs aujourd'hui.

Le célèbre *problème des bœufs* d'Archimède et les questions de Diophante seraient les premiers problèmes numériques connus se rattachant, au moins comme forme, à l'équation de Pell ; mais c'est surtout chez les Hindous qu'on en voit étudier les propriétés et les applications : M. Whitford expose avec détails leur *méthode cyclique* de solution, qu'il serait désirable de voir mieux connue.

On voit ensuite les travaux des Arabes et des Italiens relatifs à cette théorie ; puis vient l'énoncé formel de Fermat, qui le premier en a compris l'importance comme clé de la solution de toutes les équations indéterminées du second degré ; les essais de Wallis, qui donne l'algorithme de la solution ; ensuite les nombreuses recherches d'Euler, qui l'expose entièrement ; les démonstrations de Lagrange, qui la généralise de la manière la plus complète ; Gauss, qui en fait voir la haute portée dans la théorie des formes quadratiques ; Lejeune-Dirichlet enfin, qui en démontre la solubilité de la façon la plus élémentaire, l'utilise dans nombres de théories, l'étend aux nombres complexes et — en même temps que Jacobi — apprend à la résoudre à l'aide des fonctions cyclotomiques.

La partie didactique du sujet est suffisamment complète ; mais peut-être, au lieu de l'exposer chronologiquement avec l'histoire, eût-il mieux valu la traiter à part.

La partie bibliographique contient, non une sèche énumération d'articles, mais, quand il y a lieu, un court résumé du contenu.

Quand j'aurai dit que la table des noms d'auteurs en cite 263, on comprendra quelles consciencieuses recherches a dû faire M. Whitford pour réunir les matériaux de cette importante étude, et l'intérêt qu'elle présente pour les arithméticiens et la généralité des amateurs qui, avec raison, veulent connaître ce qui se fait en dehors de leurs études habituelles.

L'ouvrage comprend la solution des équations $x^2 - Ay^2 = \pm 1$ et les quotients de $\sqrt{A}$ pour les valeurs de A comprises entre 1500 et 1700 : on sait qu'elles sont connues jusqu'à $A = 1500$.

Me permettra-t-on de terminer par le regret que l'auteur de cet excellent travail ne l'ait pas intitulé *le problème de Fermat*, au lieu de continuer à appeler cette théorie du nom de celui qui — suivant son expression — en a été l'Americ Vespuce ? A. Aubry (Dijon).

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. Publications périodiques :

Acta Mathematica, dirigé par Mittag-Leffler, Stockholm.

Tome 35, fasc. 4. — Zaremba : Sur le principe de Dirichlet. — Jean Chazy : Sur les équations différentielles du troisième ordre et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes.

Tome 35, fasc. 1 à 3. — H. Poincaré : Rapport sur le Prix Bolyai. — Mittag-Leffler : Zur Biographie von Weierstrass. — L. Fejer : Eine Bemerkung zur Mittag-Leffler'schen Approximation einer beliebigen analytischen Funktion innerhalb des Sterngebietes. — A. Buhl : Sur la représentation des fonctions méromorphes. — C.-W. Oseen : Sur les formules de Green généralisées qui se présentent dans l'hydrodynamique et sur quelques-unes de leurs applications. — C. Posse : Exposé succinct des résultats principaux du mémoire posthume de Korkine, avec une table des racines primitives et des caractères qui s'y rapportent, calculée par lui pour les nombres premiers inférieurs à 4000 et prolongée jusqu'à 5000. — C. Posse : Table des racines primitives et des caractères qui s'y rapportent pour les nombres premiers entre 5000 et 10000. — M. Riesz : Sur la représentation analytique des fonctions définies par des séries de Dirichlet. — E. Landau : Ueber einige Summen die von den Nullstellen der Riemann'schen Zetafunktion abhängen.

Annaes scientificos da Academia polytechnica do Porto, dirigées par Gomez Teixeira. — Vol. VI.

Nos 1 et 2. — Niels Nielsen : Note sur les fonctions de Bernouilli. — L. Godeaux : Sur le lieu des points de contact double des surfaces de deux systèmes linéaires. — G. Pirondini : Essai d'une théorie analytique des lignes non-euclidiennes. — L. Orlando : Quelques observations sur les groupes d'homographies dans un plan. — Lerch : Sur quelques formules concernant les formes quadratiques binaires d'un discriminant négatif. — C. Servais : Propriétés des tangentes communes à deux quadriques homo-

focales — A. Aubry : Sur l'histoire du calcul infinitésimal entre les années 1620 et 1660.

Nos 3 et 4. — E. Landau : Ueber die Zahlen mit einer gegebenen Teileranzahl. — M.-C. Servais : Sur les cubiques gauches. — A. Kempe : Sur l'approximation des racines complexes des équations algébriques. — D.-J. Duran-Loriga : Sobre una curva transcendente, generalizacion de la tractriz de Leibniz. — G. Pirondini : Essai d'une théorie analytique des lignes non-euclidiennes. — M.-L. Orlando : Sur la continuité des séries. — C. Servais : Analogies dans la courbure des courbes et des surfaces du second ordre. — Mlle V. Gradara : Sur les équations à racines réelles.

American Journal of Mathematics, edited by Fr. Morley, Baltimore.

Vol. XXXIII, Nos 3 et 4. — J.-R. Conner : The Rational Plane Quartic as Derived from the Norm-Curve in Four Dimensions by Projection and Section. — W.-H. Young : On the Analytical Basis of Non-Euclidian Geometry. — N.-J. Lennes : Curves in Non-Metrical Analysis Situs with an Application in the Calculus of Variations. — V. Snyder : The Involutorial Birational Transformation of the Plane, of Order 17. — A.-M. Hiltebeitel : On the Problem of Two Fixed Centres and Certain of its Generalizations. — G.-A. Miller : Abstract Definitions of all the Substitution Groups whose Degrees do not exceed Seven. — G. Greenhill : The Attraction of a Homogeneous Spherical Segment.

Annals of Mathematics, Lancaster and Princeton.

A partir de ce fascicule, les *Annals of Mathematics* sont publiés sous les auspices de la Princeton University par MM. Ormond Stone, Maxime Bôcher, G.-D. Birkhoff, L.-P. Eisenhart, Elijah Swift, Oswald Veblen, J.-H.-M. Wedderburn.

Vol. XIII, fasc. 1 et 2. — P.-A. Lambert : A Method of Solving Linear differential Equations. — N.-J. Lennes : Duality in Projective Geometry. — L.-P. Eisenhart : A Fundamental Parametric Representation of Space Curves. — M. Sanderson : Generalization in the Theory of Numbers and Theory of Linear Groups. — W.-C. Brenke : Transformation of Series by Means of Functions admitting a recurrent Relation. — L.-I. Neikirk : A Theorem on (m, n) Correspondences. — W.-R. Longley : Points of Indeterminate Slop on the Discriminant Locus of an Ordinary Differential Equation. — M. Bôcher : Boundary Problems and Green's Functions for Linear Differential and Difference Equations. — C.-L.-E. Moore : Conjugate Directions on a Hypersurface in a Space of Four Dimensions and Some Allied Curves.

Archiv der Mathematik und Physik, herausgegeben von E. Lampe, W. Meyer, E. Jahnke, 19. Band. — B.-G. Teubner, Leipzig und Berlin.

Heft 1. — Th. Reye : Ueber ein Kriterium der gescharten Kollineation. — G. Greenhill : Elliptic Function Path of a Particle sliding on a smooth surface. — H. Burmester : Untersuchung der senkrechten Projektion der Durchdringunskurve zweier Drehflächen zweiter Ordnung mit sich schneidenden Drehachsen auf die Drehachsenebene. — R. Rothe : Ueber die Interferenz reellperiodischer Funktionen. — K. Schwering : Eine Eigenschaft

der Binomialkoeffizienten. — E. Salkowski : Kleine Bemerkungen zur Kurvenlehre. — F. Rogel : Graphostatische Flächenmessung. — H. Berliner ; Ueber das Fermatsche Problem.

Heft 2 u. 3. — R. Sturm : Ueber die gegenseitige Beziehung des Büschels und der Schar, welche durch zwei Kreise oder Kugeln bestimmt werden. — Y. Sawayama : Ueber Kreise, die einen Kreis und zwei ihn durchschneidende Sekanten berühren. — O. Blumenthal : Ueber asymptotische Integration linearer Differentialgleichungen, mit Anwendungen auf eine asymptotische Theorie der Kugelfunktionen. — E. Löffler : Zur Geschichte der indischen Ziffern. — G. Greenhill : Elliptic Function Path of a Particle sliding on a smooth surface. — J. Sommer : Ueber die Definition der Krümmungskreises in einem Punkt einer allgemeinen ebenen Kurve. — D. König : Ueber Ein- und Zweiseitigkeit mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten. — D. Pompeiu : Sur une relation d'inégalité dans la théorie des fonctions holomorphes.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von K. Hensel. Band CXL. — Georg Reimer, Berlin.

Heft 3. — J. Horn : Volterra'sche Integralgleichungen und Summengleichungen. Zweiter Teil : Ueber die Lösungen gewisser Summengleichungen und ihr asymptotisches Verhalten. — R. Neuendorff : Ueber die Kurven auf einer Fläche, deren sphärische Bilder grösste Kreise sind. — E. Hilb : Ueber Reihenentwicklungen, welche aus speziellen Randwertproblemen bei gewöhnlichen linearen inhomogenen Differentialgleichungen entspringen. — P. Kokott : Elementar-geometrische Ableitung der Additionstheoreme der elliptischen Funktionen.

Heft 4. — H. Kober : Beiträge zur Behandlung spezieller Variationsprobleme ; Untersuchung konjugierter kinetischer Brennpunkte. — D. Grave : Démonstration d'un théorème de Tchébychef généralisé. — L. v. Schrutka : Ein Beweis für die Zerlegbarkeit der Primzahlen von der Form $6n + 1$ in ein einfaches und ein dreifaches Quadrat. — E. Jacobsthal : Zur Theorie der Funktionale. — L. v. David : Reihenentwicklungen und Konvergenzuntersuchungen betreffend die Schapira'sche Iteration. — Preisaufgabe der Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft für das Jahr 1913.

Proceedings of the London Mathematical Society. Série 2, vol. 10.

W. H. Young : On the Fundamental Theorem in the Theory of Functions of a Complex Variable. — H. Bateman : The Transformation of a Particular Type of Electromagnetic Field and its Physical Interpretation. - Miss Hilda P. Hudson : On the 3-3 Birational Transformation in three Dimensions. — W. E. H. Berwick : On the Reduction of Arithmetical Binary Cubics which have a Negative Determinant. — G. H. Hardy : Properties of Logarithmico-Exponential Functions. — H. M. Macdonald : The Integration of the Equations of Propagation of Electric Waves. — H. Bateman : On certain Vectors associated with an Electromagnetic Field and the Reflection of a Disturbance at the Surface of a Perfect Conductor. — E. Cunningham : The Application of the Mathematical Theory of Relativity to the Electron Theory of Matter. — G. B. Mathews : On the Reduction and Classification of Binary Cubics which have a Negative Discriminant. — W. F. Sheppard : The Accuracy of Interpolation by Finite Differences (Second Paper).

— G. B. Mathews : A Cartesian Theory of Complex Geometrical Elements of Space. — J. M. Hill : On the Proofs of the Properties of Riemann's Surfaces discovered by Lüroth aud Clebsch. — W. P. Milne : A Symmetrical Method of Apolarly Generating Cubic Curves. — G. W. Watson : The Solution of the Homogeneous Linear Difference Equation of the Second Order. — Lt-Col. Allan Cunningham : Number of Primes of given Linear Forms. — W. H. Young : On the Convergence of a Fourier Series and of its Allied Series. — H. Hilton : On Properties of certain Linear Homogeneous Substitutions. — W. Burnside : The Determination of all Groups of Rational Linear Substitutions of Finite Order which contain the Symmetric Group in the Variables. — G. T. Bennett : Deformable Octahedra. — W. H. Young : On the Nature of the Successions formed by the Coefficients of a Fourier Series. — H. F. Baker : On the Zeros of Jacobian Functions. — Hardy : On the Multiplication of Dirichlet's Series. — J. E. Campbell : The Invariants of the Linéar Partial Differential Equation of the Second Order in two Independent Variables. — H. Hilton : On Invariants of a Canonical Substitution. — W. P. Milne : A Method of Establishing the 27-Line Configuration of a Cubic Surface. — G. H. Hardy : Some Results concerning the Behaviour at Infinity of a Real and Continuous Solution of an Algebraic Differential Equation of the First Order. — W F. Sheppard : Summation of the Coefficients of some Terminating Hypergeometric Series. — G. T. Bennett : The System of Lines of a Cubic Surface. — Index.

American Journal of Mathematics, edited by Fr. Morley, Baltimore.

Vol XXXIV (1912), nº 1. Elisabeth R. Bennett : Primitive Groups with a Determination of the Primitive Groups of Degree 20. — D.-N. Lehmer : On the Arithmetical Theory of Pencils of Birnary Quadratic Forms. — A. Ranum : On the Principale of Duality in the Geometry of the Sphere. — R.-K. Morley : On the Fundamental Postulate of Tamisage. — S. Epsteen : Derivative Domains of Rationality. — E.-W. Sheldon : Critical Revision of de Hann's Tables of Definite Integrals.

Nº 2. — J. Vance McKelvey : Groups of a Birational Tranformations of Algebraic Curves of Genus 5. — R.-D. Carmichæl : The General Theory of Linear q-Difference Equations. — A.-R. Schweitzer : Concerning Linear Projective Order. — F.-R. Moulton : On Certain expansions of Elliptic, Hyperelliptic and Related Periodic Functions. — Hilda-P. Hudson : On Cubic Birational Space Transformations. — O. Veblen : On the Definition of Multiplication Irrational Numbers.

Bibliotheca mathematica. Zeitsch. f. Geschichte der mathem. Wissenschaften herausgegeben von G. Eneström. — 3. Folge, Teubner, Leipzig.

12. Band., 1. Heft. — G. Eneström : Ueber die Bedeutung von Quellenstudien bei mathematischer Geschichtsschreibung. — E. Wiedemann : Die Schrift über den Qarastùn. — L.-C. Karpinski : The algebra of Abu Kamil Shoja' ben Aslam. — A. Witting : Zur Frage der Erfindung des Algorithmus der Newtonschen Fluxionsrechnung. — G. Eneström : Kleine Bemerkungen zur letzten Auflage von Cantors « Vorlesungen über Geschichte der Mathematik »

Heft 2. — A.-A. Björnbo : Die mathematischen S. Marcohandschiften in

Florenz. — F. Cajori: On the Spanish symbol U for « thousands ». — G. Eneström: Zur Geschichte der unendlichen Reihen um die Mitte des siebzehnten Jahrhunderts.

2. Livres nouveaux:

W. M. Baker. — **The Calculus for Beginners.** — 1 vol. in-8°, VIII-166 p.; G. Bell & sons, Londres.

H. Bœttger. — **Physik.** Zum Gebrauch bei physikalischen Vorlesungen in höheren Lehranstalten, sowie zum Selbstunterricht. — I. Band: Mechanik, Wärmelehre, Akustik. — 1 vol. gr. in-8°, XIII-983 p.; 15 M., relié M. 16,50: F. Vieweg & Sohn, Braunschweig.

G. Darboux. — **Eloges académiques et discours.** Volume publié par le Comité du jubilé scientifique de M. G Darboux. — 1 vol. in-16, 525 p. avec un portrait. — 5 fr.: A. Hermann & fils, Paris.

C. Davison. — **Higher Algebra** for Colleges and Secondary Schools. — 1 vol. in-8°, 320 p.; 6 sh.; Cambridge University Press.

A. R. Forsyth. — **Lehrbuch der Differential-Gleichungen,** mit den Auflösungen der Aufgaben von Hermann Maser. 2te autorisierte Auflage, nach der 3ten des englischen Originals besorgt und mit einem Anhang von Zusätzen versehen von Walther Jacobsthal. — 1 vol. gr. in-8°, XXII-921 p.; 20 M., relié 21,50 M.; F. Vieweg & Sohn, Braunschweig.

F. G.-M. — **Compléments des Exercices de Géométrie descriptive,** édition de 1909. — 1 fasc. in-8°, 64 p.; A. Mame & fils, Tours; J. de Gigord, Paris.

C. Godfrey and A. W. Siddons. — **Algebra for Beginners.** — 1 vol. in-16, XII-272 p.; 2 sh., with Answers 2 sh., 6 d.; Cambridge University Press.

M. Grossmann. — **Einführung in die darstellende Geometrie.** — Zweite neu bearbeitete Auflage, mit 80 Uebungsaufgaben und 118 Figuren in besonderem Heft. — 1 vol. in-8°, 92 p.; 2,80 Fr.; Helbing & Lichtenhahn, Bâle.

J. Guiot. — **Le calcul vectoriel et ses applications à la géométrie réglée.** — 1 fasc. in-8°, 128 p.; A. Hermann, Paris.

Willford King. — **The Elements of Statistical Method.** — 1 vol. in-8°, 250 p., 1 doll. 50; the Macmillan Company, New-York.

L. Lewent. — **Konforme Abbildung.** (Mathematisch-physikalische Schriften für Ingenieure und Studierende, Coll. Jahnke.) — 1 vol. in-8°, VI-118 p.; 2 M. 80, relié 3 M. 20; B. G. Teubner, Leipzig.

W. Lietzmann. — **Bericht über die Tätigkeit des deutschen Ausschusses** für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht im Jahre 1911. (Heft No 13). — 1 fasc. in-8°, 34 p.; B. G. Teubner, Leipzig.

H. von Mangoldt. — **Einführung in die höhere Mathematik** für Studierende und zum Selbststudium. Zweiter Band: **Differentialrechnung.** 1 vol. in-8°, XI-566 p.; M. 14,40, relié M. 15,40; S. Hirzel, Leipzig.

J. W. Mercer. — **Numerical Trigonometry.** — 1 vol. in-16, X-157 p.; 2 sh. 6 d.; Cambridge University Press.

J.-J. Milne. — **An Elementary Treatise on Cross-ratio Geometry,** with historical notes. — 1 vol. in-8°, XXIV-288 p.; Cambridge University Press.

A. R. Morejon. — **Casos en que los Conos y Piramides** deben considerarse

Rectos y Oblicuos (thèse). — 1 fasc. in8-°, 27 p. ; Avisador Comercial, Habana.

Niels Nielsen. — **Beretning om den anden skandinaviske Matematiker-kongres** i Kjobenhavn 1911. — 1 vol. in-8°, XVI-192 p. ; 6 Kr. ; Gyldendalske Boghandel, Copenhague et Christiania.

A. Pensa. — **Elementi di Geometria** ad uso delle Scuole Secondarie Inferiori. Prefazione di C. Burali-Forti. — 1 vol. in-8°, 175 p. ; 1.80 L. ; G. B. Petrini di G. Gallizio, Turin.

E. Picard — **Œuvres de Charles Hermite,** publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences. Tome III. — 1 vol. gr. in-8°, VI-524 p., avec un portrait ; 18 fr. ; Gauthier-Villars, Paris.

E. A. Price. — **Examples in Numerical Trigonometry.** — 1 vol. in-16, 90 p. ; 2 sh. ; Cambridge University Press.

R. Suppantschitsch. — **Lehrbuch der Arithmetik und Algebra** für die V. bis VII. Klasse der Realschulen. — 1 vol. in-8°, 368 p ; 5 K. ; F. Tempsky, Vienne.

Paul Tannery. — **Mémoires scientifiques,** publiés par J.-L. Heiberg et H. A. Zeuthen. Tome I, sciences exactes dans l'antiquité. — 1 vol. in-4°, XIV-466 p., avec un portrait ; 15 fr. ; Gauthier-Villars, Paris.

H.-E. Timerding. — **Die Erziehung der Anschauung.** — 1 vol. in-8°, VIII-241 p. ; B. G. Teubner, Leipzig.

H. Weber und J. Wellstein. — **Encyklopädie der Elementar-Mathematik,** ein Handbuch für Lehrer und Studierende. III : **Angewandte Elementar-Mathematik.** 2te Teil : Darstellende Geometrie, Graphische Statik, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Politische Arithmetik und Astronomie von J. Wellstein, H. Weber, H. Bleicher, J. Bauschinger. — 2te Auflage. 1 vol. in-8°, XIV-671 p. ; 14 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

H Wieleitner. — **Die Sieben Rechnungsarten** mit allgemeinen Zahlen. — (Mathematische Bibliothek). 1 vol. in-16, 72 p. ; 0,80 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

E. B. Wilson. — **Advanced Calculus,** a text upon select parts of differential calculus, differential equations, integral calculus, theory of functions, with numerous exercices. — 1 vol. in-8°, IX-566 p., 20 sh. ; Ginn & Co., Boston, New-York, Chicago, Londres.

Catalogue international de la littérature scientifique, publié par une Commission internationale sous la direction de H. Forster Morley. — A. Mathematics. 8me volume (mai 1908-avril 1909). — 1 vol. in-8°, VIII-240 p. ; 15 sh. (18,50 fr.) ; Gauthier-Villars, Paris.

Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées. Edition française dirigée par J. Molk. — *Tome II,* volume 5 : *Développement en séries.* Fasc. 1 : Equations et opérations fonctionnelles ; exposé par S. Pincherle. — Interpolation trigonométrique ; exposé, d'après l'article allemand de H. Burkhardt, par E. Esclangon. — Fonctions sphériques ; exposé, d'après l'article allemand de A. Wangerin, par A. Lambert, avec une note de P. Appell et A. Lambert.

Tome IV, volume 2 : *Mécanique Générale.* Fasc. 1 : Fondements géométriques de la statique ; exposé, d'après l'article allemand de H. E. Timerding, par Lucien Levy. — Géométrie des masses ; exposé, d'après l'article allemand de G. Jung, par E. Carvallo. — Cinématique ; exposé, d'après l'article allemand de A. Schœnflies, par G. Kœnigs.

SUR LES DÉTERMINANTS A PLUSIEURS DIMENSIONS

1. Le jour est proche, semble-t-il, où les déterminants à plusieurs dimensions entreront dans l'enseignement supérieur, les éléments de leur théorie venant légitimement compléter celle des déterminants ordinaires. On commence à s'apercevoir, en effet, de divers côtés, que cette étude aurait une réelle valeur éducative, et cette seule raison serait déjà suffisante; mais il y a cette autre considération à l'appui, que les déterminants de classe supérieure constituent un puissant instrument de recherche, dont le mathématicien, qu'il soit algébriste, analyste ou géomètre, doit pouvoir se servir à l'occasion.

C'est à l'illustre Cayley que revient le mérite d'avoir posé les bases de la théorie: les deux ou trois pages qu'il lui consacre mettent hors de doute son intérêt et sa fécondité. Les complications qui surgissent, quand on passe de 2 à 3 et ensuite à n dimensions, montrent que la généralisation est loin d'être banale, et qu'il en est pour les déterminants tout comme pour la théorie des fonctions ou pour le calcul des variations, par exemple, quand on passe du cas où il n'y a qu'une seule variable à celui où il y en a plusieurs, et comme en mécanique céleste, où le problème des deux corps est puéril à côté de celui des trois corps. Certains théorèmes, extrêmement élémentaires, sur les déterminants ordinaires, peuvent être étendus dans une foule de directions au cas de plusieurs dimensions, et la complexité quasi-inextricable qui en résulte presque toujours, réside le plus souvent, non pas dans les résultats, qui sont des plus élégants dans leur simplicité, mais dans les laborieuses démonstrations qui les fournissent.

Nous voudrions, dans le présent travail, où nous avons cherché à éviter tout ce qui serait de nature à rendre la lecture pénible[1], montrer, au moins dans les grandes lignes, d'où proviennent les difficultés, quels sont les principaux résultats acquis ou à obtenir, et comment s'affirme l'ampleur de cette théorie. Nous n'indiquons

[1] Pour les démonstrations et tout ce qui exige un grand usage de notations spéciales, consulter les Mémoires originaux ou notre ouvrage intitulé *Leçons sur la théorie des déterminants à n dimensions*, Gand, 1910, ou encore notre *Abrégé*, Gand, 1911.

pas les sources[1], ce qui ne serait d'aucune utilité, eu égard au point de vue auquel nous nous plaçons; quant à la terminologie, nous la réduisons au strict nécessaire. Par contre, nous ne pourrons passer sous silence les permanents, dont l'étude est intimement liée à celle des déterminants.

2. Soit un système de p^n éléments représentés par une même lettre affectée de n indices $i_1, \ldots, i_n$ prenant chacun p valeurs entières, par exemple les p premiers nombres. Le nombre k est le *rang* de l'indice i_k. On peut supposer ces éléments placés aux points de coordonnées $i_1, \ldots, i_n$, dans un espace à n dimensions pourvu d'un système d'axes orthogonaux. On a ainsi une matrice de *classe n* et *d'ordre p.*

Lorsque la classe est supérieure à 2 et qu'on désire représenter la matrice en plan, on la décompose en tranches planes que l'on juxtapose convenablement, de manière à obtenir un carré ou un rectangle, suivant que n est pair ou impair. Les matrices cubiques peuvent se représenter en perspective.

L'*axe* est formé de l'ensemble des *vertèbres,* éléments dont toutes les coordonnées sont égales. Des éléments sont dits *transversaux* si l'on ne peut trouver deux d'entre eux dans une même *tranche* à $n - 1$ dimensions). Un espace *orthoaxial* est un espace à $n - 1$ dimensions, perpendiculaire à l'axe et contenant un certain nombre d'éléments. On considère aussi les *files,* qui, pour $n = 2$, se confondent avec les tranches (lignes et colonnes).

Dans la matrice que nous venons de définir, choisissons p éléments transversaux et effectuons le produit de ces éléments. La somme des $p!^{n-1}$ *termes* que l'on peut ainsi former est appelée *permanent* de classe n et d'ordre p. Si, dans chaque produit, on dispose les facteurs par ordre de grandeur croissante des indices (formant une *rangée*) d'un rang déterminé, appelé *rang de l'indice fixe,* et si l'on affecte alors le produit du signe + ou du signe — suivant que la somme des nombres des inversions dans toutes les rangées est paire ou impaire, la somme algébrique des termes obtenus est appelée *déterminant* à n dimensions et d'ordre p.

On peut ramener la recherche du signe d'un terme à la détermination du nombre des intersections se trouvant dans un graphique composé de lignes droites.

Pour simplifier l'énoncé de certains théorèmes, il est utile d'introduire le *grade;* c'est la classe diminuée d'une unité, ou encore l'exposant de la puissance à laquelle il faut élever $p!$ pour avoir le nombre des termes du permanent ou du déterminant.

---

[1] Elles sont toujours indiquées dans les ouvrages cités; voir en particulier la notice historique, de préférence dans l'*Abrégé*. La bibliographie donnée dans ce travail doit être complétée par trois notes qui ont paru récemment dans l'*Intermédiaire des mathématiciens* (1911, p. 283-284) et dans les *Annales de la Société scientifique de Bruxelles* (1911-192, première partie, p. 119-124; seconde partie, p. 286-297).

Rien n'empêche de considérer des permanents ou déterminants de classe ou d'ordre infinis, mais les questions de convergence sont assez épineuses, surtout quand c'est la classe qui tend vers l'infini. Il ne faut pas perdre de vue, toutefois, que les propriétés géométriques des espaces convergent quand le nombre des dimensions s'accroît indéfiniment; on sait, d'ailleurs, qu'on a fait récemment de l'analyse à un infinité dénombrable de variables indépendantes. — Les déterminants *normaux* et *normaloïdes* ordinaires ont été généralisés au cas d'un nombre fini de dimensions.

La méthode symbolique de définition des déterminants ordinaires a été étendue pour n dimensions, en considérant, non plus un seul, mais $n - 1$ systèmes indépendants d'unités alternées d'ordre p. Cette représentation a l'inconvénient d'être indirecte, mais elle se prête admirablement à la démonstration de certains théorèmes. Son avantage dépend de la nature de la question; il est difficile d'énoncer une règle, seule la pratique peut indiquer au chercheur s'il convient d'employer cette méthode dans tel ou tel cas.

3. Examinons quelles sont les propriétés fondamentales des déterminants et des permanents. Les déterminants se divisent, à ce point de vue, en deux catégories bien distinctes : ceux de classe paire et ceux de classe impaire. Les permanents de classe quelconque jouissent de certaines des propriétés des déterminants de classe impaire; par contre, tout permanent, comme tout déterminant de classe paire, « n'a qu'une seule valeur ». C'est ce qui résultera de ce qui va suivre.

Du fait que la parité du nombre total des inversions dans les n rangées d'indices d'une permutation d'éléments à n indices change ou non, lorsqu'on permute deux facteurs entre eux, suivant que n est impair ou pair, il résulte que le choix de l'indice fixe a ou n'a pas d'importance, selon que n est impair ou pair; d'où l'on conclut que, dans les déterminants de classe impaire et dans ceux-là seulement, un rôle spécial est attribué à l'indice fixe, et qu'un déterminant *général* de classe impaire possède autant de valeurs distinctes qu'il y a d'unités dans sa classe.

Appelons *indice régulier* tout indice autre que l'indice fixe d'un déterminant de classe impaire; *files* et *tranches critiques* ou *régulières*, celles qui correspondent respectivement à un indice régulier ou non, les tranches critiques, ou *strates*, étant perpendiculaires aux files critiques. Par définition donc, toutes les files et tranches d'un déterminant de classe paire sont régulières. Un *espace diagonal* est critique ou régulier suivant qu'il contient ou non la *direction* d'une file *critique*. En particulier, dans un déterminant cubique, il y a, passant par l'*élément-origine*, deux *plans diagonaux réguliers* et un *plan diagonal critique* (qu'on appelle parfois plan diagonal principal, plan axial ou plan-permanent).

Tout déterminant change de signe si l'on échange entre elles deux tranches parallèles régulières, tandis que (principe de *commutation*) *la permutation de strates entre elles conserve la valeur avec le signe.* Un déterminant général de classe impaire ayant deux ou plusieurs strates identiques n'est pas nul. Dans les déterminants de classe impaire, toutes les directions ne sont donc pas équivalentes, ce qui justifie les distinctions établies dans les définitions: suivant la direction critique, les déterminants de classe impaire se comportent comme des permanents.

On peut passer d'une valeur d'un déterminant de classe impaire aux autres valeurs, en utilisant la notion de *section*. On appelle ainsi la somme des termes, pris dans le permanent, où les rangs des seules rangées négatives (rangées dont le nombre des inversions est négatif) sont assignées. Il y a une *section permanente,* constituée par la somme des *termes permanents,* dont les n rangées sont positives. Les formules qui expriment les n valeurs du déterminant permettent d'écrire aisément, en fonction des sections (il y en a 2^{n-1}), la *valeur moyenne* du déterminant, moyenne arithmétique de ses n valeurs, et la moyenne géométrique, plus compliquée. Il est assez légitime de considérer cette valeur moyenne dans certains problèmes (notamment dans la recherche de déterminants unisignants) qui cessent d'avoir un sens lorsque la classe est impaire, à moins qu'on ne considère qu'une des valeurs.

4. Il est évident que si les éléments satisfont à des conditions convenables, le nombre des valeurs distinctes du déterminant de classe impaire peut être inférieur à la classe[1]. On voit de suite quel champ fécond et vaste est ainsi offert au chercheur!

Si le déterminant a même valeur ∇ lorsque le rang de l'indice fixe est choisi parmi m nombres distincts, on dit que ∇ est une valeur d'*ordre de multiplicité m;* les m rangs en question, ainsi que les indices occupant ces rangs, sont *équivalents*. Le déterminant est *uniforme*[2] s'il n'a qu'une seule valeur (d'ordre de multiplicité n), tous les indices étant équivalents. L'uniformisation d'un déterminant de classe impaire est l'opération qui consiste à soumettre les éléments à des conditions rendant le déterminant uniforme. Le premier exemple de déterminant uniforme qui se présente à l'esprit est celui qui est troué suivant une tranche; un tel déterminant est *uniformément nul,* c'est-à-dire uniforme et nul. Un exemple de déterminant ayant en général, pour n impair, deux valeurs distinctes, l'une, d'ordre de multiplicité $n - 1$, étant nulle, est

---

[1] Dans notre *Abrégé,* nous disons qu'un déterminant de classe impaire est *holomorphe* ou *méromorphe,* suivant qu'il a ou n'a pas toutes ses valeurs distinctes. Nous y employons diverses autres dénominations qui simplifient singulièrement le langage, mais nous ne pouvons songer à introduire ici tout ce cortège de termes, dont certains peuvent n'être que provisoires.

[2] On pourrait aussi adopter le mot *univoque* qui présenterait peut-être certains avantages.

fourni par la matrice générale ayant au moins deux tranches parallèles identiques.

Les formules qui expriment, en fonction des sections, les diverses valeurs d'un déterminant général de classe impaire, permettent d'écrire les relations existant entre les sections d'un déterminant donné, dont toutes les valeurs ne sont pas distinctes, et notamment d'un déterminant uniforme. Ces relations sont assez simples si le déterminant est uniformément nul; en particulier, pour $n=3$, les quatre sections sont égales entre elles.

Les conditions qui égalisent deux ou plusieurs valeurs peuvent être de diverses natures, mais les deux plus intéressantes consistent à rendre des indices permutables (des éléments devenant ainsi égaux entre eux), ou bien à annuler certains éléments, les autres restant quelconques et sans relation.

5. Entrons dans quelques détails au sujet des *déterminants à indices permutables*. Une matrice ordinaire est dite symétrique quand les deux indices peuvent être rangés par ordre de grandeur croissante, c'est-à-dire quand ils sont *permutables*. Cette notion peut être généralisée de diverses manières pour les matrices de classe supérieure. Dès que n est supérieur à 2, il devient possible de permuter certains indices, tout en en laissant d'autres *immobiles*. Si l'on place entre parenthèses les groupes d'indices non permutables dans le groupe, et entre crochets les indices permutables entre eux, les trois cas les plus typiques peuvent être représentés ainsi :

(I) | ** ... [(*** ...), (*** ...), ...] | .

(II) | ** ... [** ...], [*** ...], ... | .

(III) | ** ... [[*** ...], [*** ...], ...] | .

chaque astérisque représentant un indice, et les points ayant la signification habituelle. Les indices qui ne sont ni entre parenthèses ni entre crochets sont non-permutables ou immobiles. Pour (II), les nombres des indices dans les divers crochets peuvent être inégaux.

Le nombre des valeurs distinctes (la classe étant impaire) est égal au nombre des indices immobiles, augmenté du nombre des indices d'un groupe dans le cas du type (I), de celui des ensembles d'indices permutables dans le type (II), de l'unité dans le type (III). Si donc, dans le troisième cas, il n'y a pas d'indice immobile, le déterminant est uniforme. Quant aux ordres de multiplicité, on voit qu'ils sont égaux : (I) au nombre des ensembles compris entre parenthèses, (II) aux nombres des in-

dices compris entre crochets, III au nombre des indices permutables[1].

Les déterminants I, II, III comprennent tous, comme cas particulier, le déterminant *actinomorphe*[2]

$$| [* * * \cdots] | ,$$

où tous les indices sont permutables entre eux, et, plus généralement, le déterminant

$$\text{(T)} \qquad | * * \cdots [* * * \cdots] | .$$

dit actinomorphe d'*espèce* φ, s'il y a φ indices entre crochets. Si les indices permutables sont tous réguliers, le déterminant est dit *orthoactinomorphe;* si ces indices comprennent l'indice fixe pour n impair, le déterminant est *métactinomorphe*.

Bon nombre de déterminants de classe impaire qui se présentent dans les applications, sont, ou bien actinomorphes, ou bien du type T à un seul indice immobile; dans le premier cas, la nature du problème n'indique pas quel est l'indice fixe et n'a pas à le déterminer; dans le second cas, cet indice est, au contraire, imposé par les conditions mêmes de la question : c'est le plus souvent l'indice immobile. C'est ce qui a lieu, par exemple, pour le déterminant des dérivées d'ordre quelconque d'un système de formes f_a ($a = 1, 2, \ldots$), et, en particulier, pour les déterminants qui représentent les composés de deux formes binaires. Nous y reviendrons.

6. L'étude des déterminants de classe impaire, qui doivent uniquement à des zéros la propriété d'avoir des valeurs multiples, est difficile et très peu avancée. Le problème général à résoudre est de *trouer*, en utilisant le moins de zéros possible, ou en conservant le plus grand nombre de termes, un déterminant de classe impaire, de manière à ce qu'il n'ait plus qu'un nombre donné de valeurs distinctes, et, en particulier, soit uniformisé.

A la dernière question se rattache la représentation de sommes de puissances par des déterminants ou par des permanents; il s'agirait de trouver la plus haute valeur que l'on puisse donner à μ dans l'expression $\sum_{i=1}^{\mu} a_i^p$ de la valeur d'un déterminant à n dimensions et d'ordre p dont les éléments sont nuls ou égaux aux a, et

---

[1] La recherche de tous les déterminants des trois types ayant n dimensions et seulement N valeurs distinctes est un problème purement arithmologique dont la position est très simple, mais dont la solution l'est moins.

[2] Ce terme, qui est emprunté à la Botanique, trouve sa justification dans la manière dont se présentent les figures formées par les éléments conjugués, à un observateur qui serait placé à l'élément-origine et regarderait dans la direction de l'axe de la matrice cubique.

de savoir comment il faut placer les zéros[1]. Il est évident que les a ne peuvent se trouver que sur des *transversales permanentes*[2] sans éléments communs, les a d'une même transversale ayant même indice; le nombre μ est donc égal au nombre de ces transversales. Le déterminant obtenu est uniforme et égal au permanent correspondant.

Signalons quelques autres résultats relatifs à l'uniformité. Étant donnés, dans le plan, trois systèmes de trois points, le déterminant dont les éléments sont les aires des triangles ayant pour sommets un point dans chaque système, est uniformément nul. On peut généraliser au cas de $2r + 1$ systèmes de $2r + 1$ points situés dans un même espace à $2r$ dimensions[3]. Le déterminant en question est donc, comme les déterminants actinomorphes, uniforme quelle que soit la classe.

7. Il n'en est pas toujours ainsi : l'uniformité peut être subordonnée à la classe (on connaît des déterminants dont l'uniformité cesse d'exister pour $n = 3$), à l'ordre, ou simultanément à l'ordre et à la classe (il y a une catégorie de déterminants dont l'uniformité a lieu sauf pour $n = 3$, $p = 2$, auquel cas ils ont leurs trois valeurs distinctes).

Un problème, intéressant mais difficile, serait de trouver et étudier les déterminants dont l'uniformité n'a lieu, ou ne cesse d'exister, que pour des valeurs déterminées de la classe (par exemple pour tous les carrés impairs), ou de l'ordre, ou pour des relations données auxquelles doivent satisfaire l'ordre et la classe, et en particulier pour les solutions, entières et positives, en nombre fini ou infini, d'une équation indéterminée du premier degré, de la forme

$$ap + bn = c .$$

Il faudrait aussi considérer les couples de déterminants ayant même ordre et même classe, et dont l'uniformité est liée aux relations

$$ap + bn = c , \qquad an + bp = c ,$$

a, b, c étant des nombres entiers.

En ce qui concerne les déterminants dont l'uniformité est indé-

[1] Le même problème se pose pour les *superdéterminants*, dont il sera question plus loin.

[2] Une transversale est dite permanente lorsque le terme auquel elle donne lieu est un terme permanent, c'est-à-dire a le signe + quel que soit l'indice fixe. Si les transversales n'étaient pas permanentes, on aurait une somme *algébrique* de puissances, tout au moins pour une des valeurs du déterminant.

[3] Nous avons indiqué ailleurs plusieurs sujets d'étude se rattachant à ce résultat, qui est analogue au suivant : étant donnés, dans l'espace, trois systèmes de trois directions, est uniformément nul le déterminant dont les éléments sont les sinus des angles solides formés par trois droites appartenant aux trois systèmes. Ces relations se démontrent très aisément en utilisant les propriétés fondamentales des déterminants.

pendante de la classe, tout en étant subordonnée à l'ordre, on a le théorème suivant : *si l'élément général d'un déterminant est, par rapport à un seul indice, une fonction rationnelle et entière de degré inférieur à l'ordre diminué d'une unité, le déterminant est nul si la classe est paire; il a deux valeurs, distinctes en général, si* n *est impair, l'une, égale à zéro, est d'ordre de multiplicité* n — 1, *l'autre, simple, est réalisée quand l'indice considéré est l'indice fixe. Si l'élément général est, par rapport à deux indices au moins (considérés séparément), une fonction satisfaisant aux mêmes conditions que plus haut, le déterminant est uniformément nul quelle que soit la classe.* Si l'ordre n'est pas supérieur au degré de la fonction augmenté de l'unité, le déterminant a, dans les deux cas, toutes ses valeurs distinctes. On suppose, bien entendu, que la fonction, considérée par rapport à un quelconque de ses arguments, n'a pas de zéro parmi les p premiers nombres, sinon le déterminant serait toujours uniformément nul.

8. Si l'on *multiplie* tous les éléments d'un déterminant uniforme par une même quantité, l'uniformité est évidemment conservée. Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit de même si la quantité, déterminée ou quelconque, est *additionnée?*

Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour l'uniformité d'un déterminant dont les éléments sont formés par les sommes (ou par les produits) des éléments correspondants de plusieurs déterminants uniformes de même classe et de même ordre?

Enfin, un dernier sujet d'étude que nous tenons à signaler serait celui des systèmes de déterminants de classe impaire ayant tous les mêmes valeurs, mais à des ordres de multiplicité différant d'un déterminant à un autre.

9. Avant de continuer l'étude des déterminants proprement dits, il convient de signaler deux généralisations des notions de permanent et de déterminant. Dans leur définition, on dit qu'il n'y a qu'*un seul élément* (première condition) d'un même terme dans une même *tranche à* n — *1 dimensions* (seconde condition). En modifiant ces deux restrictions, on est conduit à deux extensions.

Nous n'insisterons pas sur la première, qui ne présente que peu d'intérêt : elle consiste, étant donnés des éléments en nombre $p_1 . p_2 ... p_n$ et situés dans un parallélipipède à n dimensions, à prendre plus d'un élément d'un même terme dans une même tranche à n — 1 dimensions. La question du signe est assez compliquée, nous la passerons sous silence.

La seconde généralisation est plus importante. Étant donnés p^n éléments disposés en cube à n dimensions, elle consiste à remplacer par g — 1 le nombre n — 1 intervenant dans la seconde restriction, c'est-à-dire à exiger que tout terme ne puisse avoir qu'un seul élément dans toute tranche à g — 1 dimensions, mais

les éléments d'un terme quelconque devant se trouver dans une même tranche à g dimensions. Tous les produits étant pris avec le signe $+$, on dira qu'on a un *permanent de genre* g; on aura un *déterminant de genre* g *(superdéterminant* pour $g < n$), si l'on donne à chaque terme le signe obtenu en comptant les inversions où il y en a, c'est-à-dire dans les g rangées formées d'indices différents. Si le genre est impair, il faut prendre pour indice fixe un indice dont le rang, compté en faisant abstraction des rangées autres que les g rangées considérées (cette condition est essentielle), a une valeur déterminée; *le nombre des valeurs distinctes d'un superdéterminant de genre impair* g *est* donc *égal à* g. La plus grande valeur du nombre g est évidemment n, cas des permanents et déterminants proprement dits. Quant à la limite inférieure, c'est l'unité, valeur pour laquelle les éléments d'un terme sont pris sur une même file. Dans le cas où $n = 2$, le déterminant n'est distinct du permanent que si le genre est égal à la classe, et, par conséquent, les superdéterminants ont au moins trois dimensions.

La notion de section d'un déterminant, ainsi que l'expression des diverses valeurs à l'aide de ces sections, peuvent être étendues au cas du genre quelconque; mais, dans le cas de déterminants *spéciaux* de genre impair, la recherche du nombre N des valeurs distinctes, et des degrés m de multiplicité de ces valeurs, est beaucoup moins aisée que pour les déterminants proprement dits. Ces nombres N et m dépendent en général du genre, et, en particulier, un superdéterminant peut être uniforme pour certains genres, sans l'être pour les autres. Mais, *si la matrice est actinomorphe, l'uniformité a lieu pour tous les genres, quels que soient l'ordre et la classe;* il y a, dans ce cas, *en tout,* n valeurs, d'ordres de multiplicité $1, 3, \ldots, \nu$, en désignant par ν le plus grand nombre impair compris dans n. Il peut arriver qu'un superdéterminant ne soit uniforme pour tous les genres, que si la classe, ou l'ordre, ou les deux, satisfont à certaines conditions. Ici, plus encore que précédemment, on voit combien est vaste le champ offert au chercheur!

10. Mais revenons aux permanents et déterminants proprement dits. On peut les développer de deux manières : par abaissement de la classe, ou par abaissement de l'ordre.

Voyons la première manière d'opérer. On démontre que *tout permanent de classe* n *et d'ordre* p *est égal à une somme de* $(p!)^{n-\nu}$ *permanents de même ordre* p *et de classe* ν *inférieure à* n; et que *tout déterminant de classe* n *et d'ordre* p *est égal à une somme algébrique de permanents ou de déterminants, ou à une somme de déterminants, de classe* ν *et d'ordre* p, *en nombre* $(p!)^{n-\nu}$. En particulier, *tout déterminant cubique peut se développer en une somme de déterminants ordinaires*, le signe sommatoire s'appli-

quant à l'indice fixe, ou bien, si le signe Σ ne s'applique pas à l'indice fixe, *en une somme algébrique de permanents contenant la direction critique, ou de déterminants ordinaires ne contenant pas cette direction.*

De ces propositions, on déduit une foule de conséquences, dont la plus importante est que *tout déterminant de classe impaire et d'ordre* p, *dont toutes les strates sont identiques, est égal à* p! *fois le déterminant de classe immédiatement inférieure formé par une strate.*

Le développement par abaissement de l'ordre est une évidente généralisation de celui qui est bien connu pour les déterminants ordinaires. Le *mineur* d'un élément est le coefficient de cet élément dans le développement; il est égal, au signe près, au *sous-déterminant* obtenu en supprimant, dans le déterminant donné, les tranches se croisant sur l'élément considéré. Ces définitions posées, les théorèmes sont tout à fait semblables à ceux qui ont lieu pour $n = 2$; citons le premier d'entre eux : *tout déterminant* (permanent) *est égal à la somme des éléments d'une tranche quelconque multipliés respectivement par les mineurs* (sous-permanents) *correspondants.* On en conclut immédiatement que si tous les éléments d'une tranche quelconque sont nuls, la matrice (déterminant ou permanent) est nulle.

Le développement par abaissement de l'ordre permet de généraliser la propriété du déterminant à strates identiques, en considérant plusieurs groupes de strates égales, et de représenter la somme des carrés des mineurs d'ordre k d'un déterminant ordinaire B d'ordre p à l'aide du déterminant cubique de même ordre p, dont k strates sont formées par B, les autres strates ayant toutes pour éléments les premiers mineurs de B. Ceci montre que la théorie des déterminants ordinaires ne peut être légitimement séparée de celle des déterminants à plusieurs dimensions.

Le principe de décomposition des permanents ou déterminants à éléments polynomes, qui résulte immédiatement de la théorie des mineurs, est tout analogue à celui qui a lieu pour $n = 2$. Nous l'appellerons le *principe de distribution.*

11. L'examen des analogies existant entre les principes fondamentaux de l'algèbre (produits ordinaires) et des déterminants de classe impaire ou des permanents, la commutation et la distribution, montre que *tous les théorèmes sur les permanents à* n *dimensions et sur les déterminants de classe* $2\nu + 1$ *se réduisent aux propriétés des produits ordinaires pour* $n = 1$ *ou* $\nu = 0$, *et inversement.*

On voit aisément la fécondité de cette importante remarque, au point de vue de l'obtention de propriétés nouvelles.

Une relation d'analogie semblable existe entre les déterminants de classe paire et les déterminants ordinaires; en d'autres termes,

la théorie des déterminants de classe paire généralise l'algèbre des nombres alternés[1].

12. Une des propriétés les plus importantes que l'on déduit de la théorie des mineurs, est le *principe de l'addition des tranches régulières*, en vertu duquel *on peut, dans un déterminant à* n *dimensions, ajouter aux éléments d'une tranche (à* n — *1 dimensions) les éléments correspondants d'autres tranches parallèles, multipliés par des constantes quelconques, pourvu que, si la classe est impaire, ces tranches ne soient pas des strates.*

Ce principe admet une foule de conséquences fort élégantes. En voici quelques-unes :

Si, dans un déterminant de classe paire, la somme des éléments de chaque file est nulle, tous les premiers mineurs sont égaux.

Si un déterminant est nul, il existe une même relation linéaire entre les éléments d'une tranche régulière, parallèle à une direction donnée, mais la réciproque n'est vraie que pour les déterminants ordinaires, et les mineurs des éléments correspondants de tranches parallèles, régulières d'un déterminant nul ne sont en général proportionnels que si $n = 2$.

Tout déterminant CYCLOSYMÉTRIQUE *de classe et ordre pairs* (déterminant où deux éléments sont égaux dès que $2k$ indices de l'un additionnés respectivement aux indices des mêmes rangs de l'autre, donnent des sommes toutes égales à $p + 1$) *est décomposable en un produit de deux déterminants de même classe, mais d'ordre inférieur de moitié.*

La dérivation des permanents et des déterminants est aussi aisée pour n quelconque que pour $n = 2$; la dérivée $k^{\text{ème}}$ s'exprime symboliquement de la même manière[2].

13. La notion d'uniformité peut être étendue aux mineurs. Le problème qui se pose d'abord est de trouer, avec le moins de zéros possible, un déterminant général de classe impaire, de manière à assurer l'uniformité pour tous les mineurs d'un ou de plusieurs ordres donnés, par exemple $1, 2, \ldots, r$ ou $p, p - 1, \ldots, r$, et en particulier pour tous les mineurs. Plus généralement, on pourrait exiger que les mineurs d'ordre r aient k_r valeurs distinctes. Pour quelles valeurs de n, p, r, k_r le problème est-il possible?

On peut aussi demander de trouer un déterminant à indices permutables suivant une loi définie, de manière à réaliser les mêmes conditions; ou bien d'établir entre les éléments des relations conduisant au même but.

Les déterminants où exclusivement certains mineurs (mineurs axiaux, diagonaux, mineurs correspondant aux éléments d'un ou

---

[1] Et ceci permet de donner un nouveau sens, plus large et plus profond, au célèbre mot de Sylvester : « *Algebra upon algebra* ».

[2] Cf. l'*Enseignement mathématique*, 1904, p. 457.

plusieurs espaces orthoaxiaux, aux éléments d'un mineur, etc., etc.) sont uniformes, méritent d'être aussi considérés.

On voit aisément qu'à un déterminant D de classe impaire n, correspondent n^2 déterminants formés au moyen des premiers mineurs de D : on peut, en effet, choisir l'indice fixe de n manières, non seulement pour le déterminant, mais aussi pour les mineurs. La condition que le déterminant soit *circulant*[1] cubique est suffisante pour que les n^2 valeurs soient égales entre elles, c'est-à-dire pour qu'il n'y ait qu'un seul *adjoint*. Cela a encore lieu pour d'autres déterminants, mais on ne connaît pas les conditions nécessaires et suffisantes. Quant à la valeur elle-même, les conditions pour qu'un déterminant cubique D, d'ordre p, soit circulant ou à strates identiques, sont chacune suffisantes pour que l'adjoint soit égal, à un facteur numérique près, à la puissance $p - 1$ de D. Cela n'a pas lieu en général, contrairement à ce qu'on croyait avoir démontré. Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes ? Quelle relation y a-t-il entre un déterminant général et son adjoint ? Ces questions ne paraissent pas simples à élucider.

14. Arrivons maintenant à la multiplication des déterminants de classe supérieure. C'est un chapitre des plus difficiles mais aussi des plus intéressants.

Le produit de deux déterminants, l'un de classe n_1, *l'autre de classe* n_2, *peut, si le produit* $n_1 . n_2$ *est pair*[2], *se mettre sous forme d'un déterminant de classe* $n_1 + n_2 - 2$, *les éléments étant des polynômes d'un nombre de termes égal à l'ordre commun aux trois déterminants*. Une importante restriction est que le signe sommatoire (qui figure dans l'expression de l'élément général du déterminant produit) ne peut s'appliquer qu'aux indices réguliers.

Ce théorème, que nous appellerons règle (I), généralise celui de Cauchy sur les déterminants ordinaires, et n'est qu'un cas particulier de l'extension, au cas d'un nombre quelconque de dimensions, du théorème de Binet-Cauchy sur les déterminants multiples.

Comme cas particulier du théorème souligné, on a le suivant : *le produit d'un déterminant ordinaire par un déterminant de classe quelconque peut toujours être mis sous forme d'un déterminant de cette classe.* Cette règle, qui est très utile dans les applica-

[1] La définition d'un circulant à n dimensions est analogue à celle d'un circulant ordinaire ; le déterminant est actinomorphe et dépend de p éléments distincts, disposés sur une file. On a considéré un déterminant (que nous appelons *cyclique*) qui généralise le circulant à n dimensions et qui est réductible à un déterminant de classe inférieure d'une unité, dont les éléments sont des fonctions linéaires et homogènes des éléments du déterminant primitif, multipliés par des racines de l'unité. Ce déterminant n'est qu'un cas très particulier d'un autre, dont l'étude serait intéressante, mais hérissée de grandes difficultés.

[2] Déjà Cayley avait découvert cette importante restriction. Bien qu'assez évidente si l'on songe au rôle de l'indice fixe, cette condition est passée inaperçue de tous les mathématiciens ultérieurs, sauf d'un seul. Aussi, presque tous les travaux écrits sur les déterminants à plusieurs dimensions sont-ils entièrement ou partiellement erronés. — Il est essentiel d'observer que la restriction doit être maintenue, en général, si le déterminant n'a pas toutes ses valeurs distinctes.

tions, comprend elle-même, comme cas plus particulier, celle-ci : *le produit d'un déterminant ordinaire par un déterminant cubique peut se mettre sous forme d'un déterminant cubique;* précisons cet énoncé[1] en assimilant, pour la commodité du langage, une strate à un déterminant ordinaire : *il faut multiplier le déterminant ordinaire par chaque strate* (selon la règle de Cauchy). Cette loi s'applique à la multiplication des normaux, mais elle cesse d'avoir lieu en général pour les normaloïdes.

On sait que le carré d'un déterminant ordinaire est un déterminant symétrique (ou symétrisable). En général, le carré d'un déterminant de classe paire peut se mettre sous forme d'un déterminant spécial où deux *groupes* d'indices sont *permutables*[2]. On sait aussi que tout déterminant symétrique gauche est, en valeur absolue, le carré d'une fonction entière des éléments, et que *le carré de tout déterminant peut être mis sous forme d'un déterminant symétrique gauche spécial.* Le théorème lui-même a été généralisé pour $2n$ dimensions[3], mais on n'obtient plus la réciproque, pour $n > 1$, si l'on effectue le carré en procédant comme pour démontrer la propriété soulignée.

Si l'on exprime, d'après la règle (I), le produit d'un déterminant de classe paire n_1 par un déterminant de classe impaire n_2 ayant s valeurs distinctes, le déterminant de la matrice obtenue possède $n_1 + s - 1 - \delta$ valeurs distinctes, δ valant o ou 1 suivant que l'indice auquel s'applique le signe sommatoire a ou n'a pas d'indice équivalent dans le déterminant-facteur de classe impaire[4]. Evidemment, une seule de ces valeurs représente le produit à effectuer. En particulier, si $n_2 = 1$, le déterminant a n_1 valeurs distinctes, dont l'une, d'ordre de multiplicité $n_2 - 1$, représente la valeur du produit.

Au sujet de la règle (I), ajoutons qu'elle permet de généraliser, pour plusieurs dimensions, le théorème de Kronecker sur les déterminants ordinaires.

15. La règle (II) est la suivante: *le produit de deux déterminants, l'un de classe* n_1, *l'autre de classe* n_2, *peut toujours se mettre sous forme d'un déterminant de classe* $n_1 + n_2 - 1$, *à éléments monômes;* en particulier, le produit de deux déterminants ordinaires peut se

---

[1] Nous ne le faisons pas pour le cas général, car cela exigerait des notations compliquées qui nous entraîneraient beaucoup trop loin.

[2] Le principe de l'addition des tranches régulières montre que si, dans un déterminant, la somme des carrés des éléments est égale à l'unité sur chaque file régulière d'une direction donnée et si la somme des produits des éléments correspondants de deux files quelconques de cette direction est nulle, le déterminant est égal à un mineur quelconque divisé par l'élément correspondant. En utilisant le résultat du texte, on voit en outre que le déterminant vaut $\pm (p\,!)^{\frac{n}{2}-1}$.

[3] Il est probable qu'on peut encore l'étendre au cas de rn dimensions. D'autre part, il y aurait lieu de généraliser pour plusieurs dimensions les recherches faites sur les déterminants bisymétriques ordinaires.

[4] Nous avons cru devoir donner ici cet énoncé, bien qu'il ne soit peut-être qu'assez difficilement compréhensible. Nous prions toutefois le lecteur de le passer au besoin.

mettre sous forme d'un déterminant cubique. Ce théorème, généralisé au cas du produit d'un nombre quelconque de déterminants, peut s'énoncer en disant que *le produit de plusieurs déterminants peut se mettre sous forme d'un déterminant de grade égal à la somme des grades des facteurs.*

En supposant que tous les facteurs sont de même classe, on arrive à ce résultat : *tout déterminant de classe* kσ + *1 peut être considéré comme étant le produit symbolique de* k *déterminants de classe* $\sigma + 1$. En particulier, *tout déterminant à* n *dimensions est assimilable à un produit symbolique de* n — 1 *déterminants ordinaires.*

La puissance k d'un déterminant quelconque, effectuée suivant la règle (II), a une structure remarquable ; ainsi, pour le carré d'un déterminant ordinaire, on aura, de deux manières, un déterminant cubique symétrique par rapport au plan diagonal critique, dont les éléments seront tous des carrés.

Le produit des n valeurs d'un déterminant de classe n impaire, a également une structure remarquable.

L'étude des déterminants exprimant les produits et puissances de déterminants à indices permutables présente un certain intérêt. A remarquer surtout le déterminant qui est égal au produit d'un déterminant orthoactinomorphe par le déterminant méta correspondant.

Le produit de deux déterminants uniformes de classes impaires n_1 et n_2, effectué par la règle (II), donne un déterminant uniforme ; en effet, la position de l'indice fixe dans le déterminant-produit correspond aux diverses positions de l'indice fixe dans les facteurs ; or, dans ceux-ci, par hypothèse, cette position n'a pas d'importance en ce qui concerne la valeur.

La règle (II) est vraie pour les permanents.

16. Il existe, pour le produit de plusieurs déterminants, une règle mixte combinant les règles (I) et (II) ; nous ne l'énoncerons, ainsi que divers corollaires, que pour les produits de déterminants ou de permanents ordinaires. *Le produit de* 2ν *déterminants ordinaires peut se mettre sous forme d'un déterminant de classe* 2ν *à éléments polynômes.* Cette règle a lieu pour le produit de plusieurs déterminants dont les éléments sont des nombres alternés, à condition de prendre comme produit le permanent au lieu du déterminant.

La loi s'applique d'ailleurs au cas du produit de plusieurs déterminants multiples, et, en particulier, *toute puissance paire* 2ν *d'un déterminant multiple ordinaire peut se mettre sous forme d'un déterminant actinomorphe de classe* 2ν *et à éléments polynômes.* S'il y a r déterminants-facteurs identiques entre eux, le déterminant produit est actinomorphe d'espèce r.

Comme application de la règle mixte, il y a notamment l'*intégration d'une équation aux dérivées partielles*, mise sous forme d'un déterminant remarquable.

La règle mixte est aussi applicable au produit d'un permanent par des déterminants : *le produit d'un permanent ordinaire par* 2ν *déterminants ordinaires peut se mettre sous forme d'un déterminant de classe* $2\nu + 1$ *à éléments polynômes.* En particulier, le produit d'un permanent ordinaire par une puissance paire 2ν d'un déterminant ordinaire peut se mettre sous forme d'un déterminant orthoactinomorphe de classe $2\nu + 1$. Si r facteurs sont égaux entre eux, le déterminant produit est orthoactinomorphe d'espèce r. Si la matrice du permanent est égale à celle de r déterminants, le produit est métactinomorphe d'espèce $r + 1$; en particulier, *le produit d'un permanent ordinaire par la puissance* 2ν *du déterminant correspondant peut se mettre sous forme d'un déterminant actinomorphe de classe* $2\nu + 1$. *Plus spécialement, le produit d'un permanent ordinaire par le carré du déterminant correspondant peut se mettre sous forme d'un déterminant cubique actinomorphe.*

17. Arrivons maintenant à une notion qui comprend, comme cas particuliers, celles de permanent et de déterminant ; nous voulons parler des *déterminants-permanents.* Le déterminant ordinaire où les vertèbres sont les seuls éléments différents de zéro a été généralisé par la considération d'un déterminant à n dimensions troué d'une certaine manière (nous n'insistons pas sur ce point qui nous conduirait trop loin), et qui est égal à l'expression qui résulte d'un déterminant de classe impaire N, lorsqu'on remplace, dans ce déterminant, chaque terme par un certain permanent correspondant à g dimensions. Cette expression porte le nom de déterminant-permanent de *classe* N et de *genre* g. On a un déterminant simple en donnant à g une valeur particulière convenable ; un permanent de classe g en faisant $N = 1$; la réciproque de ce dernier point peut s'exprimer ainsi : *tout permanent de classe* n *peut se mettre sous forme d'un déterminant ou d'un permanent troués de classe* 2n *ou* 2n — 1. Pour le déterminant cubique, précisons ce qui précède : si tous les éléments extérieurs au plan diagonal critique, passant par l'élément-origine, sont nuls, le déterminant est égal au permanent des éléments non nuls (c'est pourquoi le plan en question est parfois appelé plan-permanent) ; si les éléments différents de zéro se trouvent dans un plan diagonal régulier, le déterminant cubique est égal au déterminant ordinaire des éléments non nuls.

La classe minimée du déterminant représentant un déterminant-permanent de classe N et de genre g est $N + 2g - 2$, nombre impair, car N est toujours impair ; la classe paire minimée est $N + 2g - 1$. Ces deux déterminants sont en quelque sorte les *formes canoniques* du déterminant-permanent. Elles servent avantageusement à démontrer que *les genres des diverses formes du produit de deux déterminants-permanents de genres* g *et* γ *sont*

$g + \gamma + 1$, $g + \gamma$, $g + \gamma - 1$, *les deux premiers n'étant réalisables que pour des déterminants-permanents proprement dits (c'est-à-dire ne se réduisant pas à de simples permanents ou déterminants); les éléments sont polynômes si le genre est* $g + \gamma$.

18. A part différents cas absolument banaux, celui du déterminant troué suivant un espace diagonal et en particulier celui du déterminant invertébré, la question de la recherche du nombre des termes d'un déterminant particulier à n dimensions présente de grandes difficultés qui n'ont pas été vaincues. Le cas où la matrice générale est *trouée* pourrait être considéré comme cas particulier de celui où la matrice possède des *éléments égaux entre eux,* mais il est préférable de séparer ces deux problèmes. Dans le premier cas, en effet, le nombre φ des termes ne dépend pas du signe, et il n'y a pas lieu de distinguer le permanent du déterminant. Dans le second cas, il n'en est plus de même. Dans le cas du déterminant, il faut tenir compte de la parité de la classe, et de la position de l'indice fixe si n est impair.

Les problèmes sur le nombre φ des termes d'un permanent troué se divisent en deux catégories, la première comprenant les questions où il s'agit de calculer φ le permanent étant donné, la seconde celles où l'on demande de trouer le permanent avec un nombre donné de zéros de manière à extrémer φ.

On peut imposer diverses restrictions; l'une d'elles consiste à fixer des limites entre lesquelles doit se maintenir la distance des zéros pris deux à deux; une autre à devoir trouer suivant un lieu géométrique défini; par exemple : un permanent est invertébré, le trouer suivant une seconde transversale à choisir de manière à extrémer φ. Ces problèmes sont encore à résoudre. Un résultat qui se démontre assez facilement et que le nombre minimé de zéros annulant le permanent général est p^{n-1}, ces éléments formant une tranche.

La détermination du nombre φ d'un déterminant à indices permutables suivant une loi donnée, est un problème qui présente un certain intérêt, notamment au point de vue de l'invariantologie des formes algébriques; mais il n'est pas aisé. Ce qui est certain, c'est que la théorie des fonctions génératrices doit jouer un rôle important dans sa solution.

19. Arrivons aux applications des déterminants à plusieurs dimensions. Nous ne dirons rien des applications géométriques et arithmologiques, pour ne considérer que la théorie des formes algébriques.

Le déterminant — orthoactinomorphe — *d'un système de formes de degré* n *est un invariant simultané d'indice* n. Il est visible que ce théorème n'exige aucune restriction quant au nombre des formes, à leurs degrés et aux nombres des variables. Par exemple, si l'on donne des formes distinctes en nombre inférieur à p et supérieur

à l'unité, on pourra obtenir un certain nombre d'invariants simultanés. Si les p formes sont toutes identiques, on est conduit à dire que *le déterminant* — actinomorphe — *d'une forme de degré pair* n *est un invariant d'indice égal au degré* n. Toute forme de degré pair possède donc un invariant dont le degré est égal au nombre des variables, et toute forme binaire de degré pair n, un invariant d'indice n et du second degré, ayant $\frac{n}{2} + 1$ termes : l'intermutant.

Tout hessien de classe paire ν (déterminant actinomorphe des dérivées d'ordre ν) *d'une forme est un covariant de cette forme. — Si une forme se réduit à une puissance d'une forme linéaire, tous ses hessiens sont nuls à partir de celui de classe 2* (hessien ordinaire). La réciproque de ce théorème présente un grand intérêt : pour quelles valeurs de ν, n, p la réciproque est-elle vraie?

La méthode symbolique se prête admirablement à l'application des déterminants de classe supérieure à l'étude des formes. Elle permet de démontrer très aisément qu'*on obtient un covariant simultané d'indice* n, *en prenant le déterminant à* n + *1 dimensions formé par les dérivées d'ordre* n *de plusieurs fonctions*, les éléments d'une même strate étant les dérivées d'une même fonction; on a un covariant d'indice r si les fonctions sont représentées par une même lettre affectée de $n - r + 1$ indices, dont l'un est l'indice fixe, le déterminant étant alors orthoactinomorphe d'espèce r et à $n + 1$ dimensions.

On voit aisément que *le* $k^{\text{ème}}$ *composé de deux formes binaires est un déterminant orthoactinomorphe de classe* k + *1 et du second ordre*, ce qui explique le fait que tous les composés $k^{\text{èmes}}$ d'une forme avec elle-même sont identiquement nuls si k est impair. On voit aussi que *tout covariant d'une forme binaire peut être représenté par une somme de déterminants orthoactinomorphes du second ordre et dont les éléments sont des dérivées de la forme.* Ce théorème peut être étendu au cas de plusieurs variables.

Certaines relations remarquables entre composés de formes binaires s'expriment à l'aide de déterminants de classe supérieure, généralisant des propriétés, connues depuis longtemps, exprimées par des déterminants ordinaires.

Quant aux contrevariants et divariants, il est clair que les déterminants de classe supérieure en fournissent autant qu'on veut.

Ce qui précède permet de faire entrevoir le rôle important que les déterminants de classe supérieure sont susceptibles de jouer en géométrie analytique. Qu'il suffise de citer cet exemple : *la condition nécessaire et suffisante pour qu'un plan soit tangent à une quadrique s'exprime par un déterminant cubique orthoactinomorphe.*

Maurice Lecat (Watermael, Bruxelles).

QU'EST-CE QU'UN VECTEUR?

Le calcul des vecteurs offre de grandes ressources. Dans les applications géométriques ou mécaniques notamment, il permet d'obtenir d'importantes simplifications et une plus grande clarté. Non seulement les écritures sont sensiblement abrégées, mais l'instrument analytique qu'on emploie représente d'une façon directe les choses auxquelles il s'applique, et que l'usage des coordonnées fait trop souvent perdre de vue.

Depuis de longues années, en Grande Bretagne surtout, l'emploi des vecteurs a permis d'en constater tous les avantages, et de grands efforts ont été faits pour les mettre en lumière. En France, non sans peine, le *mot* « vecteur » a fini par prendre droit de cité dans l'enseignement. Il figure dans une foule de programmes, et aussi dans la plupart des livres classiques contemporains.

Je dis le *mot*, avec intention, car il n'en est pas de même de la chose. Du mot, on use et je pourrais dire on abuse. La chose reste dans une sorte de pénombre mystérieuse. Fait pour ainsi dire incroyable, on ne trouve à peu près nulle part une définition précise d'un vecteur, même dans d'excellents ouvrages, ou dans les cours des plus éminents professeurs; et je n'ai jamais rencontré un seul candidat capable de répondre à cette question : « Qu'appelez-vous un vecteur? », alors que depuis un quart d'heure au moins, il m'exposait une foule de considérations sur les vecteurs et se livrait à des développements de calcul assez étendus à ce sujet. Jamais non plus je n'en ai tenu rigueur aux candidats; ce n'est pas en effet leur faute, mais bien celle d'une mauvaise tradition, contre laquelle il serait utile de réagir. Le manque de précision est toujours funeste en matière d'enseignement.

La statique élémentaire va me permettre d'indiquer plus nettement la confusion que je constate et que je critique, car c'est là peut-être que les résultats ont été les plus funestes. On y définissait jadis une *force*, appliquée en un point A, par un *segment* AB, dont la longueur AB mesurait l'intensité de la force; la demi-droite indéfinie AB indiquait la direction et le sens de la force; on l'appelait sa *ligne d'action;* et on admettait comme postulat qu'une force peut être transportée où l'on voudra le long de sa ligne d'action.

Cette terminologie a été critiquée, parce qu'on ne peut pas établir a priori l'identité entre les forces en question et les forces de la dynamique. On a fait remarquer avec raison que la statique élémentaire n'est au fond qu'une géométrie particulière, préparatoire à la mécanique ; mais c'est à tort qu'on a cru sortir de peine et tourner la difficulté en remplaçant le mot *force* par le mot *vecteur;* et le tort est d'autant plus grand qu'on l'a fait sans le dire. On a surtout appelé *vecteur* ce qui n'est pas un vecteur, ni dans le langage des inventeurs, ni dans celui des géomètres qui ont fait usage de ce nouveau mode de calcul géométrique.

Il y a trois façons de comprendre le symbole AB. Ou c'est un *segment* géométrique ; l'origine A, l'extrémité B sont fixées ; et nul segment CD n'est égal à AB, si C ne coïncide pas avec A, et D avec B. En second lieu, on peut considérer l'élément AB, tel que pour qu'on ait AB = CD, il faut que les deux segments AB, CD aient même longueur, même sens, et qu'ils soient appliqués l'un et l'autre sur la droite indéfinie AB ; à cet élément, on pourrait à mon avis donner sans inconvénient et avec avantage le nom de *force géométrique,* qui exclut toute équivoque ; en tout cas, je le répète, ce n'est pas là un vecteur. Enfin le *vecteur* AB est défini par sa grandeur, sa direction et son sens ; c'est-à-dire que AB = CD si les deux segments AB, CD sont parallèles, de même sens et de même longueur, que le point C soit d'ailleurs situé n'importe où.

Hamilton a dit que le vecteur est le symbole d'une *translation;* Grassmann, que c'est la *différence* de deux points. Ces modes de langage sont également justes et représentent bien l'idée. Dans un déplacement de translation, tous les points du corps décrivent des vecteurs identiques. Et la différence géométrique des points B et A sera bien la même que celle de D et C si AB = CD, de même que $3 = 7 - 4 = 20 - 17 = (12 + 2i) - (9 + 2i)$.

Cette déviation de l'emploi de l'expression « vecteur », et son application aux forces géométriques ont conduit à cette monstruosité, devenue pour ainsi dire classique : « le moment résultant d'un système de vecteurs ». On parle aussi de « systèmes de vecteurs équivalents », ce qui n'a pas plus de sens. Comme à plaisir, on a jeté la confusion dans le langage, et, dans le seul but de s'affranchir du mot « force », on a fait un progrès à l'envers. C'est d'autant plus déplorable qu'en statique justement, le vecteur représente exactement le *couple.*

La vérité, c'est que pour définir un segment, il faut six conditions ou, pour mieux dire, deux groupes de trois conditions. Pour définir une force géométrique, il en faut cinq. Et pour définir un vecteur, il en faut trois.

Le calcul vectoriel fait chaque jour l'objet de travaux intéressants et se prête à d'utiles applications. Soit qu'on se serve de la

méthode des quaternions d'Hamilton, soit qu'on suive Grassmann, on peut se heurter à des difficultés inhérentes à la nature des choses, comme la non commutativité de la multiplication, qui a rebuté un certain nombre d'esprits, bien qu'elle soit la traduction d'une vérité géométrique à peu près évidente. On pourra peut-être apporter des perfectionnements, des simplifications ; c'est même probable. Depuis plusieurs années, des tentatives sont faites pour unifier les notations dans la mesure du possible. Mais je crois que personne n'a proposé de bouleverser arbitrairement la terminologie, et c'est cependant ce qui a eu lieu en France, par une sorte de spontanéité fatale. J'estime qu'il n'est pas trop tard pour essayer de réagir, et c'est ce qui m'a déterminé à jeter ce cri d'alarme.

Me sera-t-il permis de profiter de l'occasion pour indiquer, en dehors des applications à la Géométrie, à la Mécanique ou à la Physique, une extension de l'idée de nombre qui est une conséquence assez naturelle des méthodes dont je viens de parler, et que je n'ai rencontrée jusqu'ici nulle part, ce qui ne prouve pas qu'elle soit nouvelle. Elle me semble avoir en soi un certain intérêt philosophique.

Cette notion est ce qu'on pourrait appeler la *position* du nombre. C'est la définition de Grassmann, rappelée plus haut, qui me l'a suggérée. Primitivement, on a étudié les nombres, entiers d'abord, puis rationnels, et enfin incommensurables ; puis se sont imposés les nombres négatifs ; la théorie des imaginaires a amené à la considération des nombres dirigés, dans le plan. Les découvertes de Grassmann et de Hamilton ont permis de sortir du plan et d'arriver aux nombres dirigés dans l'espace.

Dans toutes ces généralisations successives, le nombre conserve toujours, au moins implicitement, une origine constante, qui est zéro. N'y aurait-il pas lieu de distinguer aussi les nombres suivant l'origine à partir de laquelle on les compte ? Même en arithmétique pure, il est permis de ne pas identifier le nombre 3 compté de 0 à 3, avec le même nombre compté de 1000 à 1003. Dans cet ordre d'idées, un nombre fixé en grandeur, direction et position se trouverait caractérisé par un système de deux vecteurs a, α, et pourrait s'écrire par exemple a_α, ces deux vecteurs ayant zéro, par convention, pour origine commune.

Il ne semblerait pas impossible d'instituer un système de définitions des opérations élémentaires sur ces nombres, évidemment représentables par des segments. Pour les nombres *coplanaires*, par exemple, c'est-à-dire tous situés dans un même plan, on peut croire qu'avec le secours du calcul des imaginaires de l'algèbre, cela serait relativement facile. Pour des nombres quelconques, il faudrait sans doute recourir à l'analyse des quaternions et s'attendre à des conséquences analogues à celles que nous connaissons déjà.

Du même coup, un calcul de cette nature, à cause de la représentation indiquée, serait le calcul des segments géométriques. Je n'ai et n'aurai sans doute pas le loisir de poursuivre cette étude, ni même de l'aborder. Je souhaiterais qu'elle attirât l'attention de quelqu'un de nos jeunes confrères, et c'est dans cet espoir que je me suis décidé à donner les indications rapides qui précèdent.

C.-A. LAISANT.

LE 5me CONGRÈS INTERNATIONAL DES MATHÉMATICIENS

Cambridge, août 1912.

Le 5me Congrès international des Mathématiciens a été tenu à Cambridge, du 21 au 28 août, conformément au programme général reproduit dans notre précédent numéro. Est-il besoin d'ajouter qu'il s'est déroulé sous un ciel uniformément gris, déversant parfois des pluies abondantes ? On l'aura deviné, car le temps a été également très pluvieux presque sur tout le centre et le N.-O. du Continent. Mais chacun sait que seuls les bons souvenirs restent gravés profondément, aussi les Congressistes n'oublieront pas leur séjour si agréable dans la vieille cité universitaire, où ils ont eu le privilège d'apprécier l'hospitalité anglaise toujours si large et depuis longtemps traditionnelle. Les grands Collèges de Cambridge ont rivalisé de zèle pour héberger les Congressistes et leur offrir de brillantes réceptions.

RÉCEPTIONS. — Ce fut d'adord la Réception au *St. John College* par Sir George DARWIN, Président de la *Cambridge Philosophical Society*, et M. R. F. SCOTT, Vice-Chancelier de l'University, le mercredi soir 21 août ; puis la Réception au *Fitz William Museum* par Lord RAYLEIGH, Chancelier de l'University, le vendredi 23 août ; la Réception dans les jardins du *Christ's College*, par le Président du Congrès, le dimanche après-midi, 25 août, suivie, le soir, d'un beau Récital d'Orgue dans la Chapelle du *King's College ;* et enfin la Réception au *Trinity College*, par le Master et les Fellows. Mentionnons aussi la visite à la *Cambridge Scientific Instrument Company* et à l'*Observatoire*, ainsi que la promenade, sous une pluie torrentielle, à la Cathédrale d'Ely et les excursions au lendemain du Congrès, à *Hatfield House* et à *Oxford.*

Participation. — Près de 500 congressistes représentant 27 pays ont suivi les séances; à ce chiffre il faut ajouter plus de cent personnes accompagnant les Congressistes. Le chiffre[1] des inscriptions est en réalité de 572; il comprend les mathématiciens présents à Cambridge et les souscripteurs du volume des travaux du Congrès. Le nombre des participants anglais (Iles Britanniques) est d'environ 250.

Les Travaux. — Ils comprennent huit conférences générales réparties sur quatre réunions plénières; on en trouvera plus loin un résumé succinct. Les communications spéciales, au nombre d'une centaine, ont été présentées dans les séances des quatre (mais en réalité six) sections ci-après :

I. — Arithmétique, Algèbre, Analyse.
II. — Géométrie.
III. *(a)* — Mécanique, Physique mathématique, Astronomie.
III. *(b)* — Sciences économiques, Assurances, Statistique.
IV. *(a)* — Philosophie et Histoire des mathématiques.
IV. *(b)* — Enseignement mathématique.

Nous reproduirons la liste complète des communications des Sections I à IV *(a)*. Les travaux de la Section IV *(b)* se rattachant plus particulièrement au but de cette Revue, il convient d'en donner un compte rendu quelque peu développé. Toutefois, faute de temps, nous devons renvoyer au prochain numéro le compte rendu détaillé des travaux concernant la Commission internationale de l'Enseignement mathématique.

En parcourant la liste très longue des travaux, le lecteur constatera qu'ils touchent aux domaines les plus divers des sciences mathématiques pures et appliquées. On pourra renouveler encore cette fois les critiques et remarques faites au sujet des précédents Congrès et que nous avons résumées dans une petite Note publiée dans le numéro de juillet. Qu'il nous suffise donc d'exprimer une fois de plus le vœu que le Comité d'organisation du prochain Congrès parvienne à limiter les communications en précisant le champ et la nature des travaux et en réservant une plus grande place à des discussions d'un intérêt général. Les Actes du Congrès ne doivent pas jouer simplement le rôle d'un périodique mathématique.

Hommage a Cayley. — Sur l'initiative de M. le Prof. Dickstein (Varsovie), un groupe de congressistes a déposé une couronne sur la tombe de l'illustre géomètre anglais. Une souscription, rapidement couverte, permettra de commémorer cette cérémonie par une couronne en argent qui sera remise à l'Université de Cambridge.

---

[1] Le chiffre correspondant pour le Congrès de Rome (1908) est de 535; voir la statistique publiée dans l'*Ens. math.* du 15 juillet 1912, p. 303-306.

SÉANCES GÉNÉRALES

Séance d'ouverture : jeudi matin, 22 août.

L'ouverture officielle du Congrès a eu lieu le jeudi 22 août, à 10 heures du matin, dans l'Examination Hall. Dans son discours de bienvenue Sir George Darwin, Président de la Cambridge Philosophical Society, a d'abord parlé de la place que prend Cambridge dans les mathématiques pures et appliquées : il suffit de mentionner ici les noms de Newton, Airy, Adams, Maxwell, Cayley, Stokes et Kelvin. En termes émus il a ensuite rappelé la mort si inattendue du plus grand des mathématiciens contemporains, H. Poincaré. Puis il a tracé à grands traits quelques-uns des problèmes de la Science actuelle.

Le Vice-Chancelier de l'Université, M. F. R. Scott, a ensuite souhaité une chaleureuse bienvenue aux Congressistes au nom de l'Université de Cambridge.

1re Séance générale ; jeudi après-midi, 22 août.

Formation du Bureau. — Dans la première séance générale le Congrès a d'abord été appelé à constituer son Bureau. Le Bureau du *Comité local*, formé par la *Cambridge Philosophical Society*, a été confirmé à l'unanimité comme Bureau du Congrès, en y adjoignant un certain nombre de vice-présidents pour représenter les principaux pays. Sur la proposition du président, le savant physicien Lord Rayleigh, Chancelier de l'Université, a été nommé président d'honneur.

Voici la composition du Bureau du Congrès :

Président d'honneur : Lord Rayleigh.

Président : Sir G. H. Darwin.

Vice-présidents : W. v. Dyck, L. Fejér, R. Fujisawa, J. Hadamard, J. L. W. V. Jensen, P. A. MacMahon, G. Mittag-Leffler, E. H. Moore, F. Rudio, P. H. Schoute, M. S. Smoluchowski, V. A. Steklov, V. Volterra.

Secrétaires : E. W. Hobson, A. E. H. Love.

Trésorier : Sir J. Larmor.

Commission internationale de l'Enseignement mathématique. — Sir G. Greenhill, vice-président de la Commission, rappelle que la commission a été instituée à la suite d'une résolution du précédent Congrès, puis il indique très brièvement les résultats obtenus. La Commission rapportera devant la section IV (b), enseigne-

ment mathématique. Dans sa séance de clôture, le congrès sera appelé à se prononcer sur la prolongation du mandat de la Commission.

Conférence de M. F. Enriques (Bologne) : *Il significato della critica dei principii nello sviluppo delle matematiche (La critique des principes et son rôle dans le développement des mathématiques.* — La critique des principes est à l'ordre du jour auprès des mathématiciens contemporains. L'analyse approfondie des concepts de limite et de fonction, les recherches ayant pour point de départ la théorie des parallèles et la géométrie non-euclidienne, celles plus récentes qui se rattachent à la fondation de la géométrie projective et à l'« Analysis situs », les développements sur les variétés à plusieurs dimensions, sur les transformations et sur leurs groupes ; enfin la théorie des ensembles et les spéculations sur l'infini et l'infinitésimal actuel, auxquelles se rattachent les géométries non-archimédiennes, ont soulevé une foule de problèmes qui touchent aux racines les plus profondes de l'édifice mathématique et attirent, pour des raisons diverses, les esprits philosophiques.

Dans le domaine d'une science éminemment conservatrice qui offre, depuis deux mille ans, le spectacle d'une continuité ininterrompue de construction progressive, sans démolitions, les critiques innovatrices à caractère révolutionnaire, éveillent peut-être un intérêt émotif plus fort que dans tout autre champ de la connaissance où les crises se succèdent visiblement d'une façon périodique. C'est cet intérêt émotif qui explique non seulement la résistance que les nouvelles idées ont rencontrée auprès du public non préparé à les comprendre, mais encore et surtout la séduction qu'elles exercent sur tant d'esprits prompts à passer, par une réaction psychologique naturelle, de l'émerveillement et de l'étonnement, à la foi et à l'enthousiasme pour le nouveau monde qui s'ouvre à leurs yeux.

Or, les discussions les plus vives suscitées par les nouveaux ordres de recherches et surtout les nouvelles attitudes de l'esprit critique posent naturellement un problème d'ordre philosophique et historique : celui de savoir quelle est la valeur propre de la critique des principes et quelle place lui appartient dans les progrès de notre science.

C'est à ce point de vue que le Conférencier examine les objets suivants[1] : Le continu et les procédés infinitésimaux chez les Grecs. — La fondation du calcul infinitésimal. — La critique des concepts infinitésimaux et les nouveaux développements du calcul des variations. — Les fonctions arbitraires et la moderne élabo-

[1] La conférence vient d'être publiée dans la Revue *Scientia*, 6e année, Bologne, 1912.

ration du concept du continu. — Le développement intensif des Mathématiques : les équations et les nombres imaginaires. — La théorie des fonctions algébriques d'après Riemann et la critique des principes de la Géométrie. — Quelques nouveaux développements de l'algèbre. — Conclusions : le pragmatisme et le naturalisme mathématiques. — Les Mathématiques envisagées comme instrument ou comme modèle de la science.

Conférence de M. Ern. W. Brown (Yale University, New Haven) : *Periodicity in the Solar System.* — Après avoir indiqué les différentes branches suivant lesquelles la mécanique céleste a été divisée durant ces trente dernières années, le conférencier s'arrêta assez longuement sur les périodes des oscillations par lesquelles les astronomes ont généralement représenté les mouvements du système solaire. Ces oscillations sont à courte période, à longue période, séculaire ou sont enfin des librations. Il nous fut alors montré, par des considérations sur ces périodes, comment nous pouvons être certains que les théories actuelles sur la lune et les planètes suffisent pleinement à représenter le mouvement de ces corps dans les limites du temps pendant lequel les observations ont lieu.

Les théories concernant les astéroïdes sont beaucoup plus difficiles. La commensurabilité approximative ou exacte entre la période moyenne de révolution des astéroïdes autour du soleil et celle de Jupiter y joue un rôle important. La commensurabilité exacte, si elle existe, produit des oscillations généralement connues sous le nom de librations, et leur théorie mathématique est encore très incomplète. Actuellement nous ne voyons pas de raisons qui empêcheraient l'existence d'astéroïdes ayant des mouvements de libration. Mais il y a de notables imperfections dans les régions de libration. Il en est de même en ce qui concerne l'anneau de Saturne. D'autre part, nous rencontrons des librations dans les systèmes de satellites de Jupiter et de Saturne. On supposa que la présence d'une région de libration, dans le problème des trois corps, limite la série des orbites stables et qu'une limitation encore plus considérable de la série est produite par la présence d'un quatrième corps, par exemple de Saturne, s'il s'agit des astéroïdes.

Les déviations périodiques de la lune relativement à son orbite théorique furent examinées brièvement et l'on mentionna les méthodes en vigueur pour en rechercher les causes. Le professeur Brown termina sa conférence par un témoignage de respect à la mémoire d'Henri Poincaré.

2e Séance générale ; vendredi après-midi, 23 août.

Conférence de M. E. Landau (Gœttingue) : *Gelöste und ungelöste Probleme aus der Theorie der Primzahlenverteilung und der Riemannschen Zetafunktion* (Problèmes résolus ou à résoudre dans la théorie de la répartition des nombres premiers et de la fonction Zéta de Riemann). — Les propriétés de la théorie des nombres sont peu connues et cela tient spécialement aux difficultés que présentent les méthodes de la théorie analytique des nombres. C'est donc avec un véritable intérêt que l'on a suivi l'exposé dans lequel M. Landau examine, en partant de notions familières à chacun, les principaux problèmes concernant la répartition des nombres premiers. Il ne manque pas de signaler en passant, bon nombre de questions qui se rattachent étroitement à la théorie analytique des nombres. Par ses nombreuses et importantes contributions dans ce domaine M. Landau était tout particulièrement désigné pour faire une conférence de cette nature.

Conférence du Prince B. Galitzine (St-Pétersbourg) : *The Principles of instrumental sismology.* — Les progrès rapides de la sigmologie datent de 10 à 20 ans et sont dus principalement à l'adoption de méthodes de recherche purement physique, basées sur l'observation d'instruments. La sismologie instrumentale ou sismométrie est liée étroitement à la mécanique théorique et par suite aux mathématiques pures. La propagation des perturbations sismiques issues du foyer d'un tremblement de terre n'est autre chose qu'un problème d'élasticité. On distingue deux sortes de vagues sismiques, les longitudinales et les transverses ou vagues de torsion dont la vitesse de propagation à la surface externe de la croûte terrestre atteint respectivement 7,17 et 4,01 kilomètres à la seconde. De cette différence de vitesse on pourra déduire la distance de l'épicentre à l'observatoire.

Les équations générales de la théorie de l'élasticité permettent de conlure, ainsi que l'ont montré Lord Rayleigh et Sir K. Lamb, à l'existence d'une autre sorte de vagues, les vagues de gravitation ou longues vagues qui se propagent à la vitesse constante de 3,5 kil. à la seconde. L'arrivée de ces vagues constitue le commencement de la phase maximum d'un sismogramme. Ces résultats théoriques sont confirmés dans leurs grandes lignes par l'observation directe.

Au lieu d'étudier les vagues sismiques, il est plus commode de considérer les rayons sismiques correspondants. Ces derniers se transmettent selon des brachistochrones. Si la loi qui donne la

relation entre la vitesse et la profondeur était connue, il serait facile d'exprimer le temps nécessaire à un rayon sismique pour se propager du foyer au lieu d'observation ainsi que la distance épicentrale correspondante, comme fonction de la profondeur du foyer et de l'angle d'émergence des rayons sismiques. Cela donnerait la forme de l'hodographe théorique. En renversant le problème, c'est-à-dire en construisant l'hodographe à l'aide d'observations directes il sera possible d'arriver à certaines conclusions concernant la constitution intérieure de la terre. C'est la méthode suivie par Wiechert et ses disciples.

Alors que dans les limites de la région épicentrale presque tous les tremblements de terre sont caractérisés par plusieurs chocs plus ou moins intenses, séparés par des intervalles de calme, le tout d'une durée dépassant rarement quelques minutes, les appareils sismiques des stations éloignées accusent un mouvement continu et prolongé du sol. On peut attribuer cela à des réflexions et réfractions intérieures des rayons, à de véritables vibrations de l'écorce terrestre et à la dispersion sismique. Jusqu'à présent, le problème de la dispersion sismique n'a pas été traité d'une façon complète.

La meilleure méthode pour examiner les différents problèmes de propagation des vagues sismiques serait de considérer les différentes couches de la terre non pas comme un milieu isotrope, mais seulement transversalement isotrope. C'est le procédé de Rubski qui l'a conduit à d'intéressants résultats, mais le problème est très compliqué.

Comme il existe six mouvements différents possibles, trois déplacements et trois rotations, la résolution du problème fondamental de sismométrie, c'est-à-dire la détermination du vrai mouvement du sol en fonction du temps, exige six sismographes différents. Les types variés de sismographes sont tous basés sur le principe d'inertie (principe du point fixe). Pour l'étude des déplacements horizontaux, on utilise principalement des pendules horizontaux dont il existe différents types; car il est nécessaire que la période d'oscillation du sismographe soit longue, afin d'obtenir une amplification suffisante. L'étude de la composante verticale se fait au moyen de sismographes verticaux spéciaux.

Les mouvements du sismographe sont enregistrés soit mécaniquement sur du papier noirci, soit optiquement à l'aide d'un rayon de lumière réfléchi. Pour obtenir une forte amplification et éviter tout frottement, cette méthode galvanométrique est très avantageuse. Elle permet en outre d'enregistrer à distance.

Pour assurer le bon fonctionnement des appareils il est nécessaire d'humecter convenablement chaque sismographe. Jusqu'à présent cela se faisait par l'air et l'huile, mais le procédé le plus simple, le plus pratique et qui présente aussi théoriquement le

plus de garantie, c'est la méthode magnétique qui sera adoptée dans tous les observatoires sismiques russes.

Le problème fondamental de sismologie, c'est-à-dire la détermination du vrai mouvement du sol dans un intervalle de temps donné, offre de grandes difficultés; ici, comme dans bien d'autres questions de sismologie moderne, il faut avoir recours aux mathématiques pures.

La lecture de sismogrammes obtenus à l'aide de sismographes apériodiques nous permet d'aborder différents problèmes dont quelques-uns présentent une grande importance pratique (détermination de l'azimuth de l'épicentre; fixation de la position de l'épicentre déduite d'observations faites à une seule station; calcul de l'angle d'émergence des rayons sismiques, ce qui est un élément important pour l'étude de la route suivie par les rayons sismiques dans l'intérieur de la terre). On peut encore citer d'intéressantes questions qui se présentent en sismologie, comme par exemple les oscillations régulières (pulsations) de l'écorce terrestre, la prédiction des tremblements de terre, les déplacements des masses intérieures, etc.

L'Angleterre a contribué pour une large part aux progrès de la sismologie. Il suffit de se rappeler tous les travaux de Milne ainsi que les admirables recherches théoriques de nombreux savants anglais tels que Lord Kelvin, H. Lamb, G. Darwin, Larmor, Love, Schuster, Knott et bien d'autres encore.

3e Séance générale; samedi après-midi, 24 août.

Conférence de M. E. Borel (Paris) : *Définition et domaine d'existence des fonctions monogènes uniformes.* — Après avoir rappelé les origines de l'idée de fonction le conférencier expose avec beaucoup de clarté les différents points de vue analytiques et géométriques auxquels les auteurs se sont placés pour l'étude des fonctions analytiques : la théorie de Cauchy; les limites de la théorie de Cauchy-Weierstrass; la théorie de Cauchy-Riemann; les domaines de Cauchy; le prolongement par les séries divergentes, théorie de Mittag-Leffler; les intégrales doubles analogues à l'intégrale de Cauchy; les propriétés de fonctions monogènes. — M. Borel insiste sur la distinction qu'il y a lieu de faire entre les expressions *fonction monogène* et *fonction analytique* et il définit les fonctions monogènes qui ne sont pas analytiques. Il termine en appelant l'attention sur des analogies entre la théorie des fonctions d'une variable complexe et la théorie du potentiel.

Conférence de Sir William H. White, K. C. B.: *The Place of Mathematics in engineering practice* (La place des mathéma-

tiques dans la pratique de l'ingénieur. — Il est universellement reconnu, actuellement, que l'ingénieur doit avoir une connaissance approfondie des diverses branches qui touchent à sa vocation, combinée à une expérience et un entraînement pratiques appropriés. De toutes ces branches, ce sont évidemment les mathématiques qui occupent le premier rang. Avec le temps, le mathématicien et l'ingénieur sont arrivés à mieux se comprendre et à être plus utiles l'un à l'autre dans leurs travaux. Cependant il faut faire une distinction sensible entre les deux. Les mathématiciens considèrent spécialement les travaux d'ingénieurs en se plaçant au point de vue scientifique ; ils cherchent avant tout à rendre les mathématiques utiles à l'ingénieur en élaborant des théories et en recherchant des formules. Le principal objet de l'ingénieur, par contre, sera la conduite effective de travaux d'un ordre pratique en cherchant à réaliser autant que possible les conditions requises de solidité, d'économie et de succès commercial.

Examinons maintenant quelle est la nature de l'attribution du mathématicien aux travaux d'ingénieurs. Tout d'abord il faut citer le développement de théories mathématiques basées sur des hypothèses que confirment les observations et la pratique du passé. Autrefois, les hommes de science pensaient que les mathématiques pures suffisaient à elles seules à guider la pratique de l'ingénieur. Aujourd'hui, on a reconnu que cela ne suffisait pas et l'on pense que les meilleurs services que les mathématiciens peuvent rendre à l'ingénieur consistent à lui suggérer les meilleures méthodes de recherche expérimentale, à établir des principes généraux basés sur l'analyse et l'expérience et à élaborer des règles pratiques s'appuyant sur ces principes scientifiques.

On peut illustrer ce contraste entre les méthodes du passé et celles d'aujourd'hui en comparant les travaux faits au dix-huitième siècle sur la marche des vaisseaux parmi les vagues par Daniel Bernoulli, qui remporta en 1757 le prix offert par l'Académie des Sciences en France, et ceux de William Froude, un siècle plus tard sur le même sujet. Bernouilli était plus fort mathématicien, mais n'avait qu'une faible connaissance de la mer et des vaisseaux. Son mémoire était un traité mathématique, mais ses règles pratiques étaient basées sur des hypothèses qui ne correspondaient pas à la réalité. Il se rendait compte lui-même que les observations et l'expérience lui manquaient. Il en résulta que ses règles pratiques concernant les constructions navales étaient incorrectes. William Froude était un ingénieur expérimenté possédant également de bonnes connaissances mathématiques et un esprit mathématique ; en outre, il avait une grande habitude de la mer et des vaisseaux et de grandes qualités d'expérimentateur. Il reprit le problème en basant ses investigations mathé-

matiques sur l'expérience et l'observation et réussit à faire œuvre utile en ce qui concerne la pratique de la construction navale.

Nous avons un autre exemple de ce contraste entre les méthodes anciennes et modernes dans l'étude de la résistance que présente l'eau à la marche des navires. Les mathématiciens se sont occupés depuis fort longtemps de ce sujet et ont tenté d'établir des théories sur cette question. Les premières théories mathématiques sur la résistance ne purent guère trouver d'utilité dans la pratique, car elles étaient basées sur des hyphothèses erronées et incomplètes. Plus tard, William Froude entreprit des recherches spéciales à ce sujet, en ayant soin d'appuyer cette étude sur l'observation directe. Pour cela il introduisit des réservoirs d'expérience, qu'on a adopté aujourd' hui dans tous les pays maritimes, destinés à faire des essais sur différents modèles de bateaux. Les résultats obtenus par ces procédés ont une valeur pratique considérable. Actuellement on a des renseignements très précis sur la forme la plus avantageuse à donner aux vaisseaux ; mais on n'est pas encors fixé définitivement sur la forme de l'hélice, et à cet égard les résultats fournis par de nombreuses expériences exécutées à des vitesses variées sont d'une grande utilité. Ce problème de l'hélice est en fait très complexe, car un grand nombre de facteurs doivent être pris en considération et l'on ne peut songer à résoudre des questions de cette nature que par une heureuse combinaison de la recherche expérimentale et de l'analyse mathématique.

Il existe d'autres domaines où la méthode expérimentale joue un rôle prépondérant, par exemple dans l'évaluation de la pression du vent sur certaines constructions compliquées, dans l'aéronautique et le problème du vol.

Citons encore la construction de ces gigantesques vaisseaux modernes, qui sont appelés à transporter d'ènormes charges, à supporter toutes les intempéries et à satisfaire en un mot toutes les exigences de la civilisation moderne; on conçoit bien qu'en pareil cas l'investigation mathématique pure serait impuissante: l'interprétation scientifique des expériences passées et les méthodes comparatives pourront seules conduire à de bons résultats.

De grands progrès ont été déjà réalisés grâce à la collaboration active du mathématicien et de l'ingénieur; et il est à prévoir que ces progrès ne feront que s'accentuer maintenant que l'on comprend mieux le rôle des mathématiques dans la pratique de l'ingénieur.

4e Séance générale; mardi après-midi, 27 août.

Conférence de M. Maxime Bôcher (Harvard University); *Boundary Problems in one Dimension.* — Dans cette étude générale des problèmes de limites à une dimension, M. Bôcher examina systématiquement les progrès récents les plus importants, en ce qui concerne les méthodes et les résultats; il fut ainsi possible, en quelque sorte, d'unifier et de systématiser le sujet plus complètement qu'on ne l'avait fait jusqu'à présent dans la littérature.

La conférence s'est bornée presque uniquement à des problèmes de limites linéaires, c'est-à-dire à la question de la résolution d'une équation différentielle linéaire assujettie à des conditions de limites linéaires.

Conférence de Sir Joseph Larmor (Cambridge) : *Dynamics of radiation.* — La série des conférences s'est terminée par une étude de la question si importante, mais encore si obscure, des radiations électriques. Sir J. Larmor a montré quels sont les problèmes fondamentaux que l'on rencontre actuellement dans l'étude des radiations et a signalé en particulier les théories thermo-dynamiques de Boltzmann et de Planck.

Séance de Cloture; mardi soir, 27 août.

Sir George Darwin, président, passe d'abord en revue les questions transmises au présent Congrès par le Congrès de Rome.

On sait que le Comité du 4me Congrès avait été chargé de constituer une *Commission internationale pour l'unification des notations vectorielles.* Les pourparlers préliminaires n'ayant pas encore abouti, la Commission n'est pas prête à rapporter; mais elle espère pouvoir le faire au prochain Congrès.

Quant à la création d'une *Association internationale,* proposée par l'un des membres du Congrès de Rome, le Comité de Cambridge n'a pas reçu de nouvelles propositions. Il estime d'ailleurs qu'une pareille organisation ne correspond pas à un besoin. (Approbation générale.)

Commission internationale de l'enseignement mathématique. — M. C. Godfrey rend compte des séances que la Commission a tenues avec la Section IV *(a)* du Congrès. Les travaux des Sous-commissions nationales ne sont pas entièrement terminés et il conviendra ensuite de faire une série d'études comparées et de

mettre en discussion des questions d'une importance générale. Dans ces conditions, la Section IV *(a)* estime qu'il y a lieu de prolonger le mandat de la Commission.

M. W. v. Dyck (Munich) appuie cette proposition, il insiste sur le travail considérable accompli par la Commission avec le concours des Sous-commissions nationales. Près de 150 fascicules ou volumes, comprenant un ensemble de 280 rapports, ont été présentés vendredi à la Section IV *(a)*. Ils renferment des documents qui sont appelés à jouer un rôle très utile dans l'étude des progrès à réaliser dans l'enseignement mathématique. M. v. Dyck pense être l'interprète de toute l'assemblée en exprimant ses plus vifs remerciements non seulement au Comité central et aux membres de la Commission, mais aussi aux membres et aux collaborateurs des Sous-commissions nationales.

Voici le texte complet de la *résolution* proposée par la Section IV, et votée ensuite à l'unanimité des Congressistes présents :

Le cinquième Congrès international des Mathématiciens adresse ses remerciements aux gouvernements, aux institutions et aux personnes qui ont accordé leur aide à la Commission internationale de l'Enseignement mathématique ;

Décide de prolonger les pouvoirs du Comité central composé de MM. F. Klein *(Goettingue), Sir* G. Greenhill *(Londres) et* H. Fehr *(Genève) et, suivant la requête qui lui est adressée, d'adjoindre à ce Comité M.* David-Eugène Smith *(New-York).*

Prie les délégués de bien vouloir continuer leurs offices en s'assurant la coopération de leurs gouvernements respectifs et en poursuivant leurs travaux ;

Et invite la Commission à présenter un rapport ultérieur au 6[me] *Congrès international et à organiser dans l'intervalle telles réunions que les circonstances lui dicteront.*

Texte anglais : The following resolution is transmitted to the Congress with the unanimous support of its International Commission on the Teaching of Mathematics, and of Section IV, and with the request that it be adopted.

Resolved : That the Congress expresses its appreciation of the support given to its Commission on the Teaching of Mathematics by various governments, institutions, and individuals ;

That the Central Comittee composed of F. Klein (Göttingen), Sir G. Greenhill (London) and H. Fehr (Geneva) be continued in power and that, at its request, David Eugene Smith (New-York) be added to its number;

That the Delegates be requested to continue their good offices in securing the cooperation of their respective governments and in carrying on the work ; and that the Commission be requested to make such further report at the Sixth International Congress, and to hold such conferences in the meantime, as the circumstances warrant.

Texte allemand : *Der fünfte International Mathematiker Kongress zu Cambridge bringt allen Regierungen, Körperschaften und Personen, die die*

Arbeiten der in Rom eingesetzten Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission unterstützt haben, den wärmsten Dank zum Ausdruck und beschliesst:

Dass der Zentralkomitee (Klein, Greenhill, Fehr) *weiter bestehe und durch Herrn* D. E. Smith *(New-York) erweitert werde;*

Dass die Delegierten gebeten werden, die Unterstützung ihrer Regierungen weiter zu sichern und das Unternehmen zu fördern:

Und dass die Kommission dem nächsten Internationalen Mathematiker-Kongress erneut berichte und inzwischen ihm nötig scheinende Zusammenkünfte voranstalte.

Texte italien : La Commissione internazionale dell'insegnamento matematico e la Sezione IV hanno approvato all'unanimità il seguente voto, che nieve trasmesso al Congresso, colla preghiera di volerlo accogliere :

Si delibera che il Congresso esprima la sua riconoscenza per il contributo dato alla Commissione dell'insegnamento matematico dai vari Governi, Istituti e persone ;

Che il comitato Centrale (Klein, Greenhill, Fehr) resti in carica e che, sopra la sua proposta, David Eugene Smith (New-York) venga aggiunto agli altri tre membri;

Che i Delegati siano invitati a continuare i loro buoni uffici nell'assicurare la cooperazione dei rispettivi governi e nel prestare la loro opera;

E che la Commissione sia invitata a presentare al sesto Congresso internazionale le nuove relazioni che essa riterrà utili e a tenere nell'intervallo di tempo quelle riunioni che giudicherà opportune.

Œuvres d'Euler. — Le précédent Congrès avait voté une résolution saluant avec reconnaissance l'initiative de la Société helvétique des sciences naturelles de publier les œuvres d'Euler. Grâce à l'activité de la Commission Euler, M. le Prof. Rudio, président du Comité de rédaction, a pu présenter cinq volumes à la section IV (a) du Congrès. Sur la proposition de M. le Prof. A. Gutzmer, cette section a décidé de proposer au Congrès une adresse destinée à être transmise à la Société helvétique des sciences naturelles à l'occasion de sa prochaine réunion annuelle (Altorf, 10-12 sept. 1912).

Voici le texte présenté par M. le Prof. A. Gutzmer (Halle) et adopté à l'unanimité par le Congrès :

Im Anschluss an die Verhandlungen der früheren Internationalen Mathematiker Kongresse, insbesondere an den Beschluss des 4. Kongresses in Rom, betreffend die Herausgabe der sämtlichen Werke Leonhard Eulers bringt der 5. Internationale Kongress zu Cambridge der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft seinen wärmsten Dank für die tatkräftige Inangriffnahme des grossen Unternehmens zum Ausdruck und verbindet damit zugleich seine hohe Anerkennung für die monumentale Ausgestaltung, die sie dem Werke in den bereits vorliegenden fünf Bänden hat angedeihen lassen. Der Kongress spricht die Erwartung aus, dass der Euler-Ausgabe auch fernerhin die Unterstützung nicht fehlen

werde, die ihn bisher schon in so dankenswerter Weise von der ganzen wissenschaftlichen Welt, insbesondere von den grossen Akademien, zu teil geworden ist.

En d'autres termes :

Comme suite aux vœux exprimés par les deux précédents Congrès au sujet de la publication des œuvres d'Euler, et tout particulièrement par le 4me Congrès (Rome), le 5me Congrès international des Mathématiciens adresse ses plus chaleureux remerciements à la Société helvétique des sciences naturelles d'avoir entrepris cette grande publication et lui exprime sa reconnaissance pour la forme magistrale qu'elle a donnée aux cinq volumes déjà parus. Le Congrès espère que le monde scientifique et tout particulièrement les grandes Académies continueront à donner à la Commission Euler l'appui dont elle pourra avoir besoin.

Fixation du Lieu du prochain Congrès. — Au Congrès de Rome, M. Mittag-Leffler avait exprimé le désir des mathématiciens suédois de réunir le Congrès à *Stockholm*, en 1916. Le savant mathématicien suédois reprend cette invitation et fait savoir que S. M. le roi Gustave a accepté le patronage du Congrès. Cette proposition est adoptée par acclamations.

M. Becke (Budapest) annonce qu'au prochain Congrès les mathématiciens hongrois présenteront une invitation pour le Congrès de 1920. M. Stephanos exprime le vœu que l'un des prochains Congrès vienne siéger à Athènes.

Puis viennent les paroles de remerciements. Le Président tient à remercier tous ses collaborateurs, tandis que MM. Mittag-Leffler (Stockholm) et Webster (Etats-Unis) se font les interprètes des congressistes étrangers pour exprimer leur reconnaissance au Comité local, aux professeurs et au personnel des Collèges et à tous ceux qui ont contribué à la réussite du Congrès. Le Président déclare ensuite clos les travaux du 5me Congrès international des mathématiciens.

SÉANCES DES SECTIONS

Section I : Arithmétique, Algèbre, Analyse.

Les séances ont été présidées successivement par MM. E. B. Elliot (Oxford), E. Landau (Gœttingue), E. Borel (Paris), Helge v. Koch (Stockholm). *Secrétaire :* Dr T. J. I'A. Bromwich (Cambridge). *Secrétaires adjoints :* I. Bendixon (Stockholm), J. C. Fields (Toronto) et M. Riesz (Stockholm).

Bateman, H. : Some equations of mixed differences occurring in the theory of probability and the related expansions in series of Bessel's functions.

Beckh-Widmanstetter, H. A. von : Eine neue Randwertaufgabe für das logarithmische Potential.

Bernstein, S. : Sur les recherches récentes relatives à la meilleure approximation des fonctions continues par les polynômes de degré donné. — Discussion.

Cunningham, A. : On Mersenne's numbers.

Drach, J. : Sur l'intégration logique des équations différentielles. — Discussion.

Elliott, E. B. : Some uses in the theory of forms of the fundamental partial fractions identity.

Evans, G. C. : Some general types of functional equations.

Fields, J. C. : Direct derivation ot the Complementary Theorem from elementary properties of rational functions.

Frizell, A. B. : Axioms of ordinal magnitudes.

Hadamard, J. : Sur la série de Stirling.

Hardy, G. H. and Littlewood, J. E. : Some problems of diophantine approximation. — Remarques de M. E. Landau.

Hill, M. J. M. : The continuation of the hypergeometric series.

Jourdain, P. E. B. : The values that certain analytic functions can take. — En l'absence de l'auteur le mémoire a été déposé par M. G. H. Hardy.

Koch, H. von : On regular and singular solutions of certain infinite systems of linear equations. — Remarque de M. E. Borel.

Kürschak, J. : Limesbildung und allgemeine Körpertheorie.

Macfarlane, A. : On vector analysis as generalized algebra.

Moore, E. H. : On the fundamental functional operation of a general theory of integral equations. — Remarques de M. J. Hadamard.

Padoa, A. : Une question de maximum ou de minimum.

Peddie, W. : A mechanism for the solution of polynominals.

Petrovitch, M. : Fonctions implicites oscillantes.
Rabinovitsch G. : Eindeutigkeit der Zerlegung in Primzahlfactoren in quadratischen Zahlkörpern.
Rémoundos, G. : Sur les singularités des équations différentielles.
Saltikow, N. : Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles.
Schlesinger, L. : Ueber eine Aufgabe von Hermite aus der Theorie der Modulfunktionen.
Silberstein, L. : Some applications of quaternions. — En l'absence de l'auteur le mémoire a été déposé par le président.
Sterneck, R. von : Neue empirische Daten über die zahlentheoretische Funktion $\sigma(n)$. — Remarques de M. Landau.
Volterra, V. : Sopra equazioni di tipo Integrale. — En l'absence de l'auteur le mémoire est présenté par M. Somigliana.
Whittaker, E. T. : On the functions associated with the elliptic cylinder in harmonic analysis.
Wilkinson, M. M. U. : Elliptic and allied functions ; suggestions for reform in notation and didactical method. — Remarques de MM. Morley et Dixon.
Zervos P. : Sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre à quatre variables.

Section II : Géométrie.

Les séances ont été présidées successivement par M. M. H. F. Baker (Cambridge), F. Severi (Padoue), F. Morley (Baltimore), J. Drach (Toulouse). *Secrétaire :* P. L. Dixon (Oxford) ; *secrétaires adjoints :* W Blaschke (Pommern) et E. Bompiani (Rome).

Bompiani, E. : Recent progress in projective differential geometry.
Brouwer, L. E. J. : Sur la notion de classe de transformations d'une multiplicité.
Brückner, M. : Ueber Raumteilung durch 6 Ebenen und die Sechsflache.
Drach, J. : Résumé de recherches géométriques.
Eisenhart, L. P. : Continuous deformation of surfaces applicable to quadrics.
Esson, W. : On the caracters of plane curves.
Finsterbusch, J. : Geometrische Maxima und Minima mit Anwendung auf die Optik. — Remarques de M. Schoute.
Grossmann, M. : Die Zentralprojection in der absoluten Geometrie.
Hatzidakis, N. : Sur les paires de trièdres de Frenet.
Hostinsky, B. : Sur les Hessiennes successives d'une courbe du troisième degré.

HUDSON, Miss H. P. : Intersections of surfaces; on binodes and double curves. — Remarques de M. BERRY.
JANISZEWSKI, Z. : Ueber die Begriffe Linie und Fläche.
KASNER, E. : Conformal geometry.
KÖNIG, D. : Zur Analysis situs der Doppelmanigfaltigkeiten und der projectiven Räume.
MARTIN, A. : On rational right-angled triangles. — En l'absence de l'auteur, le mémoire a été déposé par le président.
MORLEY, F. : On the extension of a theorem of W. STAHL.
NEVILLE, E. H. : On generalized moving axes.
SCHOUTE, P. H. : On the characteristic numbers of the polytopes $e_1 e_2 ... e_{n-1} S_{n+1}$ and $e_1 e_2 ... e_{n-1} M_n$ of space S.
SINZOV, D. : Sur la théorie des connexes.
SOMMERVILLE, D. M. Y. : The pedal line of the triangle in non-Euclidean geometry. — Remarques de MM. COOLIDGE et SCHOUTE.
STÉPHANOS, C. : Sur l'équivalent analytique du problème des principes de la géométrie.
STUDY, E. : Conformal mapping of complex domains.
TZITZEICA, G. : Sur les surfaces isothermiques.
WEITZENBÖCK, R. : Ueber das sechs-Ebenen Problem in R_4.
YANCIZEWSKI, Z. : Ueber die Begriffe Linie und Fläche.

Section III *(a)* : Mécanique, physique mathématique, astronomie.

Présidence : MM. H. LAMB (Manchester) ; prince B. GALITZIN (St-Pétersbourg) ; LEVI-CIVITA (Padoue) ; P. STÆCKEL (Carlsruhe). *Secrétaire :* F. J. M. STRATTON (Cambridge) ; *secrétaire-adjoint :* G. ANDREOLI (Naples) et L. FÖPPL (Göttingue).

ABRAHAM, M. : The gravitational field. — Remarques de M. L. SILBERSTEIN.
BENNETT, G. T. : The balancing of the four-crank engine. — Remarques de M. F. MORLEY et Sir W. H. WHITE.
BLASCHKE, W. : Reziproke Kräftepläne zu den Spannungen in einer biegsamen Haut.
BLUMENTHAL, O. : Ueber asymptotische Integration von Differentialgleichungen mit Anwendung auf die Berechnung von Spannungen in Kugelschalen.
BOULAD, F. : Extension de la notion des valeurs critiques aux équations à 4 variables d'ordre nomographique supérieur.
BRODESTSKY, S. : The solution of dynamical problems.
BROMWICH, T. J. I'A. : Some theorems relating to the resistance of compound conductors. — Remarque de M. MACDONALD.
DENIZOT, A. : Theoretisches über den freien Fall eines Körper's bei rotierenden Erde.

Esson, W. : On a law of connection between two phenomena which influence one another.

Ewald, P. P. : Dispersion and double refraction of electrons in rectangular grouping. — Remarque de MM. Havelock et Peddie.

Föppl, L. : Stabile Anordnungen von Elektronen im Atom. — Remarques de MM. Abraham, v. Karman et Lamb.

Hagen, J. G. : How the Atwood machine proves the rotation of the earth, even quantitatively.

Karman, Th. von : Luftwiderstand und Hydrodynamik. — Remarques de MM. Lamb, Runge et Smoluchowski.

Lamb, H. : On wawe-trains due to a single impulse.

Leuschner, A. V. : On the Laplacian orbit methods. — (Mémoire déposé par le président).

Love, A. E. H. : The application of the method of W. Ritz to the theory of the tides. — Remarques de MM. Turner, Sampson et Lamb.

Mc Laren, S. B. : Aether matter and gravity. — Remarques de MM. Abraham et Webster.

Miller, D. C. : The graphical recording of sound waves ; effect of free periods of the recording apparatus. — Remarques de M. Webster.

Moulton, F. R. : Relations of families of periodic orbits in the restricted problem of three bodies. — Remarques de MM. Levi-Civita, Sir George Darwin et E. W. Brown.

Sampson, R. A. : Some points in the theory of errors.

Silberstein, L. : Self-contained electromagnetic vibrations of a sphere as a possible model of the atomic store of latent energy.

Somigliana, C. : Sopra un criterio di classificazione dei massimi e dei minimi delle funzioni di più variabili.

Smoluchowski, M. S. : On the practical applicability of Stokes's law of resistance and the modifications of it required in certain cases. — Remarques de Lamb, Sampson, Webster et Cunningham.

Terradas, E. : On the motion of a chain.

Thomson, Sir J. J. : Multiply charged atomes (with experiments).

Turner, H. H. : On double lines in periodograms. — Remarques de MM. R. A. Sampson et Sir Jos. Larmor.

Section III *(b)*: Sciences économiques, Assurances, Statistique.

Présidence: MM. F. Y. Edgeworth (Oxford), W. F. Sheppard (Sulton, Surrey) ; F. A. F. Steffensen (Copenhague). *Secrétaire:* A. L. Bowley (Reading).

Amoroso, L. : I caratteri matematici della scienza economica. — (Présenté par le président).

Abany, D. : Ein Beitrag zur Laplace-schen Theorie der erzeugenden Funktion. — Remarques de M. Steffensen.

Brodie, R. R. : Curves of certain functions relating to mortality and compound interest. — Le mémoire a été présenté par M. Edgeworth.

Edgeworth, F. Y. : A method of representing frequency groups by analytic geometry. — Remarques de MM. Stott et Sheppard.

Gérardin, A. : Statistique des vingt séries parues du Répertoire Bibliographique des Sciences Mathématiques.

Lehfeldt, R. A. : Equilibrium and disturbance in the distribution of wealth.

Peek, J. H. : Application of the Calculus of Probabilities in tariffing securities. — (Mémoire déposé par le président).

Quiquet, A. : Sur une méthode d'interpolation exposée par Henri Poincaré et sur une application possible aux fonctions de survie d'ordre n. — Remarques de MM. Sós et Goldzieher.

Sheppard, W. F. : 1. Reduction of errors by means of negligible differences. — 2. The calculation of moments of an abrupt frequency distribution. Remarques de MM. Bowley et H. L. Rietz.

Steffensen, J. F. A. F. : On the fitting of Makeham's curve to mortality tables. — Remarques MM. Sheppard, Goldzieher, Edgeworth, Bowley et Sós.

Section IV *(a)* : Philosophie et histoire des mathématiques.

Présidence : MM. B. A. M. Russell (Cambridge), A. Gutzmer (Halle), A. Padoa (Gênes), F. Rudio (Zurich) ; *secrétaires :* MM. E. V. Huntington et M. Fréchet.

Burali Forti, E. : Sur les lois générales pour l'algorithme des symboles de fonction et d'opération. — En l'absence de l'auteur le mémoire est déposé par le président.

Blumberg, H. : Ueber ein Axiomen-System für die Arithmetik. — Remarques de MM. Padoa, Whitehead et Robb.

Boherril, R. du : Buffon on the Newtonian law of attraction. — Mémoire présenté par M. Rouse Ball.

Dyck, W. von : Ueber den Mechaniker u. Ingenieur Georg von Reichenbach.

Gérardin, A. : Note historique sur la théorie des nombres.

Harding, P. J. : 1. The geometry of Thales. — 2. History et evolution of arithmetic division.

Huntington, E. V. : A set of postulates for abstract geometry expressed in terms of the simple relation of inclusion. — Remarques de M. Peano, Fréchet, Padoa, Russell et Whitheead.

Itelson, G. : 1. Bemerkungen über das Wesen der Mathematik.

— Remarques de MM. DICKSTEIN et RUSSELL. — 2. THOMAS SOLLY of Cambridge als Logistiker.

JOURDAIN, P. E. B. : 1. Isoid relations and the modern theory of irrational numbers. — 2. Fourier's influence on pure mathematics. — 3. The ideas of the « fonctions analytiques » in LAGRANGE's early work. — En l'absence de l'auteur, ces mémoires sont déposés par le président.

LORIA, G. : Intorno ai metodi usati dagli antichi greci per estrarre le radici quadrate. — (Id.).

MUIRHEAD, R. F. : Superposition as a basis for geometry; its logic and its relation to the doctrine of continuous quantity. — Remarques de M. HUNTINGTON.

PADOA, A. : La valeur et les rôles du principe d'induction mathématique. — Discussion.

PEANO, G. : Proposizioni esistenziale. — Discussion.

RUDIO, F. : Mitteilungen über die Eulerausgabe. — Sur la proposition de M. le prof. A. GUTZMER, la section adopte une résolution destinée à la Société helvétique des Sciences naturelles (voir séances générales).

VACCA, G. : 1. Sul valore della ideografia nella espressione del pensiero ; differenze caratteristische tra ideographia e linguaggio ordinario. — 2. On some points in the history of the infinitesimal calculus ; relations between English and Italian mathematicians. — Déposés par le président.

ZERMELO, E. : 1. Ueber die Grundlagen der Mengenlehre. — 2. Ueber eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels. — 3. Ueber axiomatische und genetische Methoden bei der Grundlegung mathematischer Disciplinen.

Section IV *(b)* : Enseignement mathématique.

La section a tenu cinq séances présidées successivement par MM. C. GODFREY (Osborne), D.-E. SMITH (New-York), E. CZUBER (Vienne), C. BOURLET (Paris), J.-W.-A. YOUNG (Chicago), Sir J.-J. THOMSON (Cambridge), R. FUJISAWA (Tokio). — *Secrétaires :* M. G.-A. GIBSON (Edingbourg), assisté de MM. FRANKLIN et PRICE (Osborne).

Trois séances furent réservées aux travaux de la Commission internationale de l'Enseignement mathématique et furent organisées par son Comité central, tandis que les deux autres étaient destinées aux communications diverses. Nous donnerons un aperçu très sommaire de ces trois séances et nous le ferons suivre d'un résumé des communications spéciales. Les séances consacrées à la Commission feront l'objet d'un compte rendu détaillé conte-

nant le texte complet des trois rapports (Fehr, Smith et Runge) et un résumé des discussions auxquelles ils ont donné lieu.

I. **Commission internationale.** *1re séance*, vendredi 23 août, à 9 1/2 h. du matin; Présidence de MM. C. Godfrey et D.-E. Smith.

1. Discours d'ouverture de M. D.-E. Smith, parlant au nom de M. F. Klein, président de la Commission, empêché d'assister à la réunion pour raison de santé. A la suite de ce discours, la Commission et la section IV décident de télégraphier à M. le Prof. Klein que l'assemblée regrette vivement son absence et qu'elle lui adresse ses meilleurs vœux pour le rétablissement de sa santé.

2. La Commission internationale de l'Enseignement mathématique de 1908 à 1912, Compte rendu sommaire présenté par M. H. Fehr, Secrétaire-général de la Commission.

3. Présentation des publications du Comité central et des Sous-commissions nationales. — Les délégués déposent plus de 280 rapports répartis sur plus de 150 fascicules formant un ensemble de plus de 9000 pages in-8°. On en trouvera la liste complète dans le rapport du secrétaire-général qui a été distribué à l'ouverture de la séance et que nous reproduirons dans notre prochain numéro.

Pour chaque pays un délégué a présenté un court rapport sur l'ensemble des travaux de la Sous-Commission nationale. Ont pris la parole :

Allemagne, M. A. Gutzmer. — *Autriche*, M. E. Czuber. — *Belgique*, M. E. Clevers. — *Brésil*, M. E. de Garaglia. — *Danemark*, M. H. Fehr, au nom de M. P. Heegaard. — *Espagne*, M. Toledo. — *Etats-Unis*, M. J.-W.-A. Young. — *France*, M. C. Bourlet. — *Grèce*, M. H. Fehr, au nom de M. Stéphanos. — *Hollande*, M. J. Cardinaal. — *Hongrie*, M. E. Beke. — *Iles Britanniques*, M. C. Jackson. — *Italie*, M. G. Castelnuovo. — *Japon*, M. R. Fujisawa. — *Norvège*, M. Alfsen. — *Portugal*, M. G. Teixeira. — *Roumanie*, M. G. Tzitzeica. — *Russie*, M. H. Fehr, au nom de M. v. Sonin. — *Serbie*, M. Petrovitch. — *Suisse*, M. H. Fehr.

2me séance; lundi 26 août, à 3 h. de l'après-midi; présidence de Sir J.-J. Thomson.

The mathematical Training of the Physicist in the University (la préparation mathématique des physiciens à l'université), rapport de la Sous-commission B, présenté par M. C. Runge (Gottingue). — Le rapport avait été distribué le jour précédent; il a donné lieu à une intéressante discussion à laquelle ont pris part MM. P. Stäckel, C. Bourlet, F. Enriques, Sir G. Greenhill, A.-G. Webster, E. Borel, Sir J. Larmor, C. Bioche, A.-E.-H. Love,

E.-W. Hobson, G.-A. Gibson, Sir J.-J. Thomson et C. Runge. En outre, des remarques ont nous encore été adressées après la séance dans une lettre de M. Lanchester.

3me *séance;* mardi 27 août, à 9 h. 1/2 du matin; présidence de MM. R. Fujisawa et C. Godfrey.

1. Goldzieher, C. : *Bemerkungen über eine Bibliographie des mathematischen Unterrichts.* — M. D.-E. Smith résume et complète cette communication. Il s'agit d'une publication fournissant la bibliographie concernant l'enseignement mathématique, à partir de 1900. M. Goldzieher espère que la Commission voudra bien lui donner son appui. La publication serait faite sous les auspices du « Bureau of Education » de Washington. Sur la proposition de M. Smith la section IV adopte à l'unanimité une résolution par laquelle elle exprime sa reconnaissance au Bureau of Education pour l'intérêt qu'elle témoigne à cette publication.

2. *Intuition and experiment in mathematical Teaching in the Secondary Schools* (l'intuition et l'expérience dans l'enseignement mathématique des écoles moyennes), rapport de la Sous-commission A, présenté par M. D.-E. Smith (New-York). — La conférence ayant été imprimée à l'avance par les soins du Comité central, M. Smith peut se borner à exposer les principaux points, afin de laisser le plus de temps possible à la discussion. — Ont pris part à la discussion MM. Laisant, Thær, Dintzl, Siddons, Bioche, Lietzmann, v. Dyck, Carson et Goldzieher.

3. *Résolution.* Sur la proposition de Sir G. Greenhill, vice-président de la Commission, l'assemblée adopte une proposition tendant à prolonger le mandat de la Commission; elle sera soumise au Congrès dans sa séance de clôture (voir p. 376).

4. M. H. Fehr parle ensuite des travaux que le Comité central compte pouvoir entreprendre pendant la nouvelle période. Le Comité tiendra compte dans la mesure du possible des vœux qui lui seront transmis. A ce sujet MM. Garstang et Carson signalent quelques sujets spéciaux sur lesquels il paraît utile de faire une enquête.

II. **Communications spéciales.** 1re *séance;* samedi 24 août, à 9 h. 1/2 du matin; présidence de M. A. Gutzmer.

La première partie de la séance était commune aux sections IV, *a,* (Philosophie et Histoire) et IV, *b,* (Enseignement). Elle était consacrée aux communications de MM. Whitehead et Suppantschitsch.

1. Whitehead, A. N. (Cambridge) : *The principles of mathematics in relation to elementary teaching.* Le conférencier examine dans quelle mesure on peut tenir compte dans l'enseignement

des mathématiques, élémentaire, des principes de mathématiques envisagés au point de vue logique. Nous aurons sans doute l'occasion de revenir sur cette étude.

2. SUPPANTSCHITSCH, R. (Vienne) : *Le raisonnement logique dans l'enseignement universitaire et secondaire.* — M. Suppantschitsch rappelle d'abord la différence entre les méthodes soi-disant logiques antérieures à la réforme française de 1902 et les méthodes actuelles. Mais il croit qu'on a dépassé dans certains pays les justes limites dans le désir de suivre le chemin tracé par la France et de délivrer l'enseignement de toute abstraction. Il admet que la logique nécessaire aujourd'hui pour bien comprendre une démonstration vraiment correcte n'est pas à la portée de tous les jeunes gens; cependant il exige le maintien de la logique des méthodes. Son raisonnement par des difficultés grandissantes de la vie qui ne peuvent être vaincues que par une formation solide d'esprit par l'assimilation de méthodes générales. Il fait allusion, ensuite, à la vivacité de l'esprit chez les jeunes gens qui ne trouveront nullement amusantes ces récréations mathématiques en vigueur aujourd'hui. Ce sont surtout les expériences mathématiques, destinées à mettre en évidence des théorèmes extrêmement simples, qui, selon lui, ne feront qu'ennuyer les élèves. Après en avoir cité un exemple, M. Suppantschistch insiste sur la nécessité de quelques démonstrations rigoureuses bien choisies pour la formation d'esprit. Il explique ensuite son opinion sur l'enseignement universitaire à donner aux futurs professeurs de lycées. Malgré la large place qu'y prendront les applications techniques il sera toujours nécessaire de développer, chez les étudiants, le goût de la rigueur. Il voit dans l'intérêt grandissant attribué aux études des principes une garantie pour l'enseignement universitaire que menacent encore des idées pédagogiques mal conçues. M. Suppantschitsch finit sa communication en citant les difficultés particulières de l'enseignement mathématique dans les établissements techniques.

Suit une discussion à laquelle prennent part MM. BOURLET et PADOA.

La deuxième partie de la séance comprend les communications de MM. HILL et HATZIDAKIS.

3. HILL, M. J. M. (Londres) : *The teaching of the theory of proportion.* — Dans cette conférence sur l'enseignement de la théorie des proportions, M. Hill, professeur à l'Université de Londres, s'est proposé (voir *The Mathem. Gazette,* juillet 1912) :

1° D'expliquer d'une façon simple et directe la théorie des proportions lorsque les grandeurs considérées n'ont pas de commune mesure.

2° De discuter la place du sujet dans les plans d'étude.

L'espace restreint dont nous disposons ne nous permet pas de

reproduire ici les propositions de l'auteur ; disons simplement que, selon M. Hill, les procédés employés permettent d'exposer le sujet à quiconque possède une connaissance suffisante de l'algèbre élémentaire, et rendent ainsi l'élève capable de comprendre la théorie des figures semblables lorsqu'il en commence l'étude pour la première fois ; on voit donc la place qu'il faut attribuer à ce sujet dans les programmes lorsqu'on s'adresse à des élèves de force moyenne.

En même temps, l'auteur pense que l'on devrait définir et utiliser de bonne heure les rapports commensurables dans le programme de géométrie, par exemple dès qu'on aura démontré que des triangles ayant mêmes bases et mêmes hauteurs sont équivalents, ou que dans des cercles égaux des angles au centre égaux comprennent des arcs égaux.

Les démonstrations dont se sert l'auteur dans sa méthode font souvent usage de l'axiome d'Archimède et de la théorie de la « Schnitt » ou « section » dans le système des nombres irrationnels ; elles constituent donc une excellente préparation à la théorie des nombres irrationnels et au calcul infinitésimal.

Cet exposé donne lieu à une *discussion* dans laquelle on fait valoir des points de vue différents quant à la méthode ; ont pris la parole MM. Godfrey, Carson, Garstang et Bell.

4. Hatzidakis, N. (Athènes) : *Systematische Recreations-Mathematik in mittleren Schulen* (Introduction systématique des mathématiques récréatives dans les écoles moyennes). — L'auteur estime que tout en développant le côté purement scientifique des mathématiques dans les écoles moyennes, nous devons nous intéresser davantage à l'âme de l'enfant. Il y a lieu d'étudier d'une façon plus complète la puissance d'adaptation. Dans ce but il est désirable d'introduire les mathématiques récréatives d'une manière systématique partout où cela est possible. Ce serait un excellent moyen d'éveiller sans peine l'intérêt des élèves. — Remarques de M. C. Bourlet.

2me *séance ;* lundi 26 août, à 9 h. $^1/_2$ du matin ; présidence de MM. C. Bourlet et J.-W.-A. Young.

5. Gérardin, A. (Nancy) : *Sur quelques nouvelles machines algébriques.* — Il s'agit d'un procédé élémentaire et rapide destiné à montrer aux jeunes gens à décomposer les nombres en regardant seulement un tableau formé de cases noires et blanches. La solution est donnée par une ligne entièrement blanche. — Remarques de M. Cunningham, L^t-col.

6. Carson, G. St. L. (Tonbridge) : *The place of deduction in elementary mechanics.* — Une science consiste en une ou plusieurs classes d'entités, en un ou plusieurs groupes de postulats

relatifs à ces entités, et en un système de déductions basées sur ces postulats. Durant la période de formation d'une science, les postulats sont généralement surabondants ; ce n'est que lorsque leur relation réciproque a été étudiée et qu'on en a déterminé le nombre minimum, que cette science peut être qualifiée de complète. L'étude de la mécanique nous fournit une illustration de ce processus.

On a coutume de commencer l'étude de la mécanique par un système surabondant de postulats, basés sur l'évidence expérimentale. On devrait insister dès le début sur le fait que cette évidence n'est pas illimitée et que bien des facteurs (variations de la température, du corps considéré, du type de force, etc.) ont été ignorés. Il faudrait ensuite justifier l'admission provisoire de ces faits, malgré leur manque d'évidence ; cette justification nous est fournie par l'histoire, spécialement par la vérification de Faraday des lois de Coulomb sur l'attraction électrostatique. On passerait enfin aux déductions sans perdre de vue le peu de solidité des bases. Trois de ces bases sont généralement constituées par le triangle de force, le principe du levier et le principe des moments pour des forces ayant des lignes d'action concourantes. Chacun de ces principes expérimentaux peut être vrai ou faux ; il existe donc huit possibilités parmi lesquelles la vérité doit se trouver. Mais on peut montrer que deux quelconques de ces principes sont une conséquence logique du troisième ; par suite ces huit possibilités se réduisent à deux. Ainsi des procédés déductifs sont venus renforcer l'évidence. On pourrait traiter d'une façon analogue d'autres groupes de principes, de sorte que la mécanique ainsi considérée consisterait en un corps logique, s'appuyant sur certaines bases, chacune de ces bases étant formée d'hypothèses liées les unes aux autres d'une façon analogue à celle qui a été décrite.

Un cours de ce genre différerait essentiellement des deux méthodes actuellement en usage. L'une de ces méthodes consiste à admettre trois postulats sur le mouvement, sans évidence ou investigation, puis à en déduire le sujet. Dans l'autre on établit tout d'abord un système surabondant de postulats de nature expérimentale et on les applique à des problèmes variés, sans se préoccuper beaucoup de leur dépendance logique. La première méthode est un exercice de déduction appliquée, la seconde, un exercice de calcul appliqué. La méthode proposée, où l'on recherche la dépendance mutuelle des postulats, pourrait être envisagée comme un exercice de mathématiques appliquées, car elle rend possible l'application des méthodes mathématiques à une branche des sciences physiques.

7. Nunn, T. P. (Londres) : *The proper scope and method of instruction in the calculus in schools*. Le calcul différentiel et intégral

comme sujet d'enseignement scolaire). — Les principales difficultés que l'on rencontre dans l'enseignement du calcul infinitésimal à l'école, sont relatives à la notion de limite et à l'usage de la notation $\frac{dy}{dx}$. Ces difficultés n'en forment en réalité qu'une, car la notation $\frac{dy}{dx}$ maintient les erreurs de la doctrine de Leibniz sur les infiniment petits, doctrine incompatible avec la théorie moderne des limites. Il est donc nécessaire d'abandonner l'usage de cette notation pour les commençants. Au fait le mieux serait de ne se servir d'aucune notation au début et de suivre les méthodes simples de Wallis (Arithmetica Infinitorum, 1655). Celles-ci conduisent en effet à l'idée que lorsque les ordonnées d'une courbe suivent une loi déterminée (ordonnée-fonction), l'aire limitée par la courbe suit une autre loi déterminée (aire-fonction). Par cette façon de procéder, l'idée d'intégration précède celle de différentiation. Cette dernière idée ne s'introduira que dans la seconde période, une fois que la logique du premier point de vue aura été amélioré et généralisé à l'aide de la notion de limite. On pourra alors introduire les symboles $df(x) = \varphi(x)$, $df^2(x) = \Psi(x)$, etc., pour indiquer la relation entre une fonction et ses différentielles, et $d^{-1}\varphi(x) = f(x)$ $d^{-2}\Psi(x) = f(x)$, etc., pour exprimer la relation inverse d'intégration. Ces recommandations peuvent être résumées en disant que le calcul infinitésimal ne devraient pas, généralement, être enseigné dans les écoles comme sujet séparé, mais simplement comme un chapitre spécial d'algèbre.

EXPOSITION

Sur l'initiative de la *Mathematical Association* un Comité spécial, dirigé par Mr. C. S. Jackson (Woolwich) et Mr. P. Abbott (Londres), avait organisé une exposition de livres, de dessins et d'instruments mathématiques. Une place spécialement importante avait été accordée à l'enseignement des mathématiques dans les écoles anglaises.

L'exposition comprenait les sections suivantes :

A. — Modèles et appareils exécutés par les maîtres ou les élèves destinés à l'enseignement des mathématiques et de la mécanique. (17 exposants.)

B. — Manuels, cahiers d'élèves, épreuves d'examens, etc., destinés à donner une idée de l'enseignement mathématique dans les écoles anglaises, élémentaires et secondaires. (20 écoles des différents types.)

C. — Machines à calculer et appareils divers. (40 nos.)

D. — I. Livres et II. Appareils destinés à l'enseignement des mathématiques, de la mécanique et de la physique.

I. La section de librairie avait un caractère international. A côté des éditeurs anglais les principaux éditeurs allemands, américains et français avaient envoyé une série complète de leurs dernières publications. (Total : 15 exposants.)

II. La section des instruments et appareils comptait 7 exposants anglais.

L'exposition organisée par la « Mathematical Association » a été très fréquentée et on ne saurait trop féliciter et remercier le Comité d'organisation de son initiative et du soin qu'il a apporté à son organisation. Il faut espérer que dans les prochains congrès des expositions du même genre pourront être organisées. Toutefois la tâche du Comité serait plus facile s'il était rattaché, comme sous-commission, au Comité même du Congrès, c'est-à-dire si l'organisation était patronnée par le Congrès lui-même, comme cela avait été le cas au Congrès de Heidelberg (1904).

H. Fehr.

CHRONIQUE

Henri Poincaré.

Nous n'apprendrons rien à personne en signalant ici la mort de Henri Poincaré. Ce deuil immense pour la France et pour la Science a été immédiatement connu dans le monde entier. Il y a causé la surprise la plus terriblement douloureuse qui se puisse imaginer, cette perte étant imprévue pour chacun, sauf peut-être pour l'illustre défunt qui semble l'avoir pressentie et avoir laissé transparaître, dans ses derniers travaux, le regret de ne pouvoir les achever. Car Henri Poincaré a travaillé jusqu'à la dernière minute; il doit même rester, si nous ne nous trompons, des mémoires actuellement confiés à différents recueils mathématiques et qui ne sont point encore sortis des presses. Il y a quatre ans, au Congrès de Rome où il était parti plein d'entrain, sa santé donna brusquement une vive inquiétude à son entourage. Il se releva vaillamment mais garda sans doute quelque trace d'un mal qui devait s'aggraver, nécessiter une opération dont l'issue apparaissait heureuse,

lorsqu'il succomba subitement le 17 juillet dernier. Il n'avait que 58 ans. Au Congrès de Cambridge, où bien des géomètres comptaient sans doute le revoir, le deuil de cette grande figure n'a cessé de planer. Le Président Sir G.-H. Darwin, dans son discours d'ouverture, s'est fait l'interprète de la tristesse de tous et a parlé de la beauté et de la grandeur des mathématiques en empruntant au grand savant disparu ses idées philosophiques les plus chères.

Nous ne pouvons ici, en quelques lignes, nous livrer à une analyse des travaux de l'illustre géomètre. Un de nos collaborateurs s'en chargera de manière plus détaillée dans un prochain fascicule. Même avec les plus grandes précautions, ce sera sans doute une œuvre vaine car personne n'est digne d'analyser des travaux qui surpassent tous les autres. C'est seulement dans un avenir éloigné qu'on pourra apercevoir tout le génie du grand disparu, quand ses résultats, auxquels le commun des géomètres est encore fermé, auront été retrouvés par d'autres méthodes. Toutefois notre humilité n'est pas non plus une raison pour garder le silence. *L'Enseignement Mathématique* doit d'abord toute sa reconnaissance à Henri Poincaré pour sa collaboration, datant d'ailleurs de la première heure. Nous n'oublions pas qu'il a été l'un des premiers à nous donner son appui lors de la constitution du Comité de Patronage de la Revue. Nous essayerons, avec nos faibles moyens, d'élever, parmi beaucoup d'autres, un monument à sa mémoire. Si nous n'avons point le génie nécessaire, nous apporterons du moins tout notre cœur et toute notre admiration pour commémorer une telle gloire.

La Rédaction.

Les travaux de la Section de Mathématiques et d'Astronomie de l'Association Française pour l'Avancement des Sciences[1].

Congrès de Nîmes, 1er-6 août 1912.

Les travaux de la Section de Mathématiques, Astronomie, Géodésie, Mécanique, ont été organisés à Nîmes par le Président M. Ernest Lebon, et le Secrétaire A. Gérardin, de Nancy. Les nombreuses communications furent réparties sur huit séances.

1. — Hommage a Henri Poincaré. — M. Ern. Lebon a ouvert la séance par un éloge de M. Henri Poincaré, dont il a parlé en ces termes :

« Permettez-moi de vous exprimer la profonde douleur que j'éprouve à la pensée que notre éminent collègue Henri Poincaré n'est plus. Depuis 1882, date où j'entrais en relations avec lui, j'avais su pénétrer son caractère. Je

[1] Nous devons ces notes à l'obligeance de M. A. Gérardin, 32, quai Cl.-le-Lorrain (Nancy). *Réd.*

connaissais son obligeance et son absolue sincérité. Poincaré ne perdait pas son temps en paroles oiseuses; mais, quand il promettait, on pouvait compter sur lui. Il s'intéressait aux jeunes gens de valeur qui lui étaient signalés, et, sans bruit, sans ostentation, il s'occupait activement de leur avenir. Nombreux sont ceux qui, au fond de leur cœur, garderont pieusement la mémoire de leur illustre protecteur...

« Rien ne laissait prévoir que la mort dût saisir si tôt ce brillant génie. On savait que Poincaré avait ressenti à Rome en 1908, au Congrès des Mathématiciens, les premières atteintes d'une grave maladie, et que sa conférence philosophique avait dû être lue par son savant ami, M. Gaston Darboux. Mais on croyait sa santé rétablie. On ne pensait guère qu'il souffrait encore lorsqu'il exposait, en 1910-1911, les principales *Hypothèses cosmogoniques* émises depuis Kant et Laplace jusqu'à nos jours, qu'il les discutait ou que, par de nouveaux calculs, il les asseyait sur des bases plus solides...

« Cette année, alors que je préparais la seconde édition de sa *Notice biographique et bibliographique*, j'eus avec Poincaré de nombreuses entrevues... Brusquement, à la mi-juin, Poincaré était violemment repris par la maladie... »

M. Ernest Lebon termine en rappelant que le trait capital du génie de Poincaré fut, comme l'avait si bien montré Sir George Darwin en 1900 : « une immense ampleur des généralisations ».

Nous donnons seulement ici quelques passages des paroles qui ont été prononcées par M. Ernest Lebon en présentant la seconde édition de la *Notice biographique et bibliographique* sur Henri Poincaré, Notice qui vient de paraître [1].

La salle de section était trop petite pour les spectateurs, et plusieurs dames avaient bien voulu inaugurer nos travaux, et leur donner ainsi un air moins austère.

2. — M. Litre, de Toulouse, présente ensuite une communication sur la

Théorie du Pendule de Foucault (suite). — Etude de la gyration. — La gyration est un résultat toujours relatif ; c'est la différence entre les effets produits par le mouvement diurne sur le pendule mobile et sur les repères fixes ; la résultante est en sens divers, selon les cas.

---

[1] En présentant à l'Académie des Sciences le 17 juin 1912 cette seconde édition, M. Gaston Darboux, Secrétaire perpétuel, s'est ainsi exprimé :

« Il y a seulement trois ans, je présentais à l'Académie la belle Notice sur notre confrère Henri Poincaré qui inaugurait la série des *Savants du Jour*, entreprise par M. Ernest Lebon, Professeur honoraire de l'Université, lauréat de l'Académie Française et de l'Academie des Sciences.

Les travaux de notre confrère ont une telle importance, et ils touchent à tant de sujets divers qu'il fallait s'attendre à ce que cette Notice fût promptement épuisée. Sans tarder, M. Lebon s'est remis à l'ouvrage; il l'a refondu, enrichie de Notes, d'Analyses et d'extraits nouveaux en y faisant entrer les importants travaux que M. H. Poincaré a publiés depuis 1909.

Ainsi revue, complétée et mise au courant, la seconde édition de la Notice qui contient plus de 30 pages nouvelles est appelée au même succès qui a accueilli la première.

Cas du Pendule du Panthéon. Cas du Pendule battant dans le méridien. Comparaison des résultats du calcul avec les expériences de Genève.
Recherche de la position intermédiaire de gyration nulle.
Influence de la gyration sur l'amplitude.

3. — Présentation du Rapport de M. A. Aubry sur les *erreurs de mathématiciens*. Voici la préface de ces intéressantes notes :

La divulgation des erreurs où sont tombés des mathématiciens connus n'entraîne-t-elle pas avec elle une certaine déconsidération de grands hommes, qu'on fait ainsi descendre de la hauteur où l'estime générale les avait placés? N'est-elle pas le résultat d'un sentiment instinctif ou involontaire de jalousie envers ces géants, qui nous écrasent de leur génie ? Par contre, le justifie-t-elle par une utilité quelconque ?

Je ne crois pas qu'une personne de jugement sain et cultivé puisse moins estimer le diamant qui se trouve dans le travail d'un génie scientifique, parce qu'à côté se voient de simples pierres de construction et même quelques minéraux inutilisables ou soi-disant tels : ces taches dans son œuvre nous rendent le savant plus humain, plus près de nous, plus accessible ; nous le font aimer davantage, en le dépouillant de son auréole d'infaillibilité qui nous inspirait peut-être encore plus de crainte que de respect. Au lieu d'être un demi-dieu, il redevient, il est vrai, un simple mortel comme nous, mais le plus grand d'entre nous ; nous sommes fiers qu'un des nôtres ait donné des travaux que, sans de légers défauts, on eût pu croire une émanation de la divinité, et cela nous donne confiance pour mieux essayer de le comprendre et même de marcher sur ses traces. Une utilité plus grande encore de cette divulgation est de nous mettre sur nos gardes quand nous recherchons des vérités nouvelles : si ces créateurs de la Science se sont égarés parfois en traçant des sentiers nouveaux dans des régions, qu'ils ont été souvent d'ailleurs les premiers à explorer, de quelle circonspection ne devons-nous pas faire montre pour ne pas dévier! Leurs erreurs nous enseignent donc la prudence et la modestie.

4. — M. A. Aubry présente ensuite un mémoire complémentaire.

Erreurs de mathématiciens. — Depuis quelque temps la question des erreurs de mathématiciens est à l'ordre du jour. Ce n'est pas tant, il me semble, une liste d'erreurs, si complète soit-elle, qu'il importe de donner, mais surtout leur classement, leur origine et leur influence sur le progrès de la science.

Toute production scientifique doit viser à un but utile : accroissement de la science, extensions, généralisations, applications, pose de pierres d'attente en vue de théories ultérieures seulement pressenties, rattachement de théories en apparence différentes, gymnastique intellectuelle, récréations, enseignement ou vulgarisation.

Or, de prime abord, on ne voit pas à quoi peut servir la divulgation des erreurs où sont tombés des hommes qui précisément, par leur genre d'étude, s'attachent à la recherche de la vérité, de l'exactitude, de l'évidence. J'ai toutefois essayé de montrer dans un Rapport qui m'a été demandé sur ce

sujet, que celui-ci n'est pas dépourvu de toute utilité et qu'on peut en tirer quelque enseignement.

J'avais ajouté, à titre d'exemples, un certain nombre d'erreurs typiques qui n'ont pu trouver place à la suite de mon Rapport : ce sont celles-ci qui seront présentées au Congrès de Nîmes.

5. — Rapport de M. A. Gérardin *sur diverses méthodes de solutions employées en théorie des nombres*. Voici l'exposition du sujet :

Combien de mathématiciens ignorent les résultats obtenus par leurs devanciers, qui souvent usent leur vie à la solution de certaines questions ardues, parfois résolues en quelques heures par des méthodes nouvelles ou inédites. Comme exemple topique, je citerai la décomposition de $2^{58}+1$ qui a duré si longtemps, et cependant Euler avait donné la décomposition générale de $2^{4a+2}+1$, retouvée plus tard par Aurifeuille. Nous avons donc résolu d'entreprendre cette recherche en ce qui concerne la théorie des nombres, mais les matériaux sont innombrables, et nous pourrons seulement citer ici quelques types de questions.

Il y aurait aussi des recherches bien curieuses à faire, non plus sur les méthodes elles-mêmes, mais sur leurs auteurs ; étudier les ressemblances et les dissemblances de tempérament physiologique et moral, et combien d'autres questions passionnantes; espérons que cette œuvre sera tentée un jour par un de nos collègues ; nous y applaudirons vivement.

J'ai dit, dans ce rapport, quelques mots sur les différentes méthodes employées pour la décomposition des grands nombres et en particulier de ceux de Mersenne, et sur les machines à décomposer les nombres.

6. — La Municipalité de la ville de *Nancy*, d'accord avec M. Ch. Adam, recteur de notre Université, a résolu d'élever un monument à la mémoire de 3 mathématiciens lorrains illustres : Poncelet, Hermite et Henri Poincaré. La section de mathématiques du Congrès, sur la demande de M. Ernest Lebon, président, a émis à l'unanimité un vote favorable, et les listes de souscription commencent à se couvrir de signatures. Nous espérons que nos collègues mathématiciens voudront bien apporter leur pierre à cet édifice et nous restons à leur disposition pour toute communication.

7. — M. G Tarry, du Havre, présente ses

Tables à triple entrée des diviseurs des nombres de 1 *à* N. — Un nombre t s'écrit d'une seule manière sous la forme $uA + qB + r$, A étant un multiple de B et r plus petit que B. Il s'agit de reconnaître si un nombre premier p divise t. Désignons par a et a', les valeurs absolues des résidus minimés positifs et négatifs de uA ; et par b', la valeur absolue du résidu minimé

négatif de qB. Pour que p divise t, il faut et il suffit qu'on ait $a - b' + r = o$ ou

$$a' - b' + r \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p) .$$

Deux cas se présentent : 1° $a < b'$. Le nombre $a - b' + r$ étant inférieur à p en valeur absolue, pour que p divise t, il faut et il suffit qu'on ait

$$a - b' + r \equiv 0 .$$

2° — $a > b'$. Dans ce cas $- a' - b' + r = - p + a - b' + r$ est plus petit que p en valeur absolue, et il faut et il suffit qu'on ait $- a' - b' + r - o$. Ainsi, pour savoir si un nombre premier divise t, il suffit de regarder si un résidu donné par la Table est égal à la somme de deux autres résidus donnés. En choisissant convenablement les bases B et A, et à l'aide d'un petit perfectionnement, on construit une Table allant jusqu'à 100 millions, et comprenant 593 166 nombres de 4 chiffres au plus, par conséquent, moins volumineux qu'une Table de Lebesgue allant seulement jusqu'à 2 600 000.

8. — M. Ernest Lebon, de Paris, fait ensuite une intéressante présentation de ses tables, avec réussite instantanée de décompositions de nombres de huit chiffres choisis au hasard.

Sur la Table de base 510510 *donnant les facteurs premiers des nombres depuis* 1 *jusqu'à* 100 *millions* — J'ai fait établir 17 Tableaux, pour les indicateurs 1, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, avec la base $B = 510510$, à l'aide desquels on trouve, presque immédiatement, les facteurs premiers des nombres compris dans les 17 progressions arithmétiques de terme général $Bk + I$, k étant le quotient (caractéristique) et I étant le reste (indicateur), obtenu en divisant un nombre N par B. La Table complète occuperait plus de cinq fois moins de place que la Table qui serait construite par les procédés adoptés jusqu'ici.

Les principes sur lesquels cette Table repose ont été communiqués à l'Académie des Sciences de Paris (séance du 3 juillet 1905), développés dans un Mémoire (1er août 1905) que l'Académie des Sciences de Lisbonne a publié dans son *Jornal* (2e s., t. VII, n° 29, 1906), appliqués dans le Volume intitulé : *Table de Caractéristiques relatives à la base* 2310 (Delalain, Paris, 1906), communiqués de nouveaux, avec de notables simplifications de disposition des Eléments, au Congrès de l'Association française pour l'Avancement des Sciences, tenu à Clermont-Ferrand en août 1908, et au Congrès des Sociétés Savantes (Ministère de l'Instruction publique), tenu à Caen en avril 1911.

Je tiens à remercier publiquement l'Association française pour l'Avancement des Sciences d'avoir bien voulu m'accorder une Subvention, qui me permet de montrer amplement la disposition de la Table que je construis et d'en faire juger les avantages sur celles qui ont été jusqu'ici publiées.

Dans cette Table, de base B, de diviseurs premiers, il y a un nombre de Tableaux égal à la moitié du nombre des indicateurs I. J'ai trouvé une méthode qui permet de n'employer que deux Tableaux se rapportant aux indicateurs ± 1. Pour construire ces Tableaux, je résous d'abord les deux équations indéterminées

$$Ix - By = \pm 1 ,$$

pour construire un Tableau où sont les valeurs des premières solutions $y = K_1$ et $y = K_{\bar{1}}$, relative aux $I < \frac{1}{2}B$. Ce Tableau permet de résoudre presque immédiatement les deux équations

$$Ix + By = \pm 1 .$$

A l'aide du système de solutions x, y, on trouve des valeurs de la caractéristique K qui se trouvent dans les deux Tableaux d'indicateurs ± 1. J'explique dans le Mémoire comment, à l'aide de ces deux Tableaux d'indicateurs ± 1 on peut reconnaître si un nombre donné est premier ou composé.

9. — M. A. Pellet, de Clermont-Ferrand, expose ensuite sa théorie

Sur les équations aux dérivées partielles. — Soit un système de n équations entre les n fonctions u_i $(i = 1, 2, \ldots n)$ des deux variables indépendantes x et y, et leurs dérivées partielles, le nombre des dérivations pour u_i étant par rapport à x au plus égal à α_i et par rapport à y au plus égal à β_i, de sorte que, pour cette fonction u_i le nombre des dérivées qui entrent dans les équations est $(\alpha_i + 1)(\beta_i + 1) - 1$, mis sous la forme

$$v_i = f_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) ,$$

v_i ne contenant qu'un seul terme, la dérivée

$$\frac{d^{\alpha_i + \beta_i} u_i}{dx^{\alpha_i} dy^{\beta_i}} ,$$

et les seconds membres f étant des fonctions holomorphes des n fonctions u et de leurs dérivées ne figurant pas dans les premiers membres, à coefficients fonctions continues de x et y. Ce système d'équations admet toujours un système de solutions qui est unique, pour lequel on a

$$u_i = \int_0^y \ldots \int_0^y \int_0^x \ldots \int_0^x v_i dx^{\alpha_i} dy^{\beta_i} ,$$

les intégrales par rapport à x prises successivement α_i fois entre les limites o et x, et celles par rapport à y β_i fois entre les limites o et y. Extension au cas d'un nombre quelconque de variables.

10. — Présentation d'un mémoire de M. C.-A. Laisant, *sur les tables de diviseurs.*

En 1891, j'avais indiqué les principes de la construction possible d'une Table de diviseurs des nombres, jusqu'à une limite assez étendue, et reposant sur l'emploi de moyens graphiques. La question est liée aux progrès

futurs de l'arithmétique et a provoqué de nouveaux travaux de mathématiciens connus.

Mes premiers procédés étaient peu pratiques, car les Tables étaient trop étendues. Actuellement, chaque page représentant 10 cm de largeur sur 20 cm. de hauteur, soit 14 sur 22 en faisant la part des titres et des chiffres, la lecture graphique, avec un millimètre comme unité, ne serait pas pénible. Pour aller jusqu'à 100 millions, on pourrait avec environ 1300 pages, et cela sans calculs auxiliaires, d'une façon directe, déterminer les facteurs de chaque nombre.

Un exemple des Tables et des explications très claires se trouvent dans le Mémoire.

11. — M. A. Gérardin, de Nancy, expose ensuite sa

Nouvelle machine algébrique. — Nous présentons un modèle d'étude pour cette machine déjà annoncée dans notre Rapport. Le modèle définitif est au point ; nous pouvons déjà montrer l'intérêt du dispositif actuel. Le principe est simple ; il faudra d'abord ramener les problèmes donnés à des équations de la forme

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 \ . \ . = y^2 \ .$$

Comme exemple, nous prendrons un problème d'Hermite à propos des surfaces osculatrices (*Cours d'analyse*, p. 145) qui se ramène à trouver les nombres m et n tels que la somme des $(m + 1)$ premiers triangulaires doit égaler l'unité plus un triangulaire de base $(n + 1)$.

Hermite a donné $m = 5$; E. de Jonquières, en 1884, a cité $m = 1$ et 20. Hermite ajoute : « Il y aurait lieu ainsi de rechercher toutes les solutions en nombres entiers et positifs pour m et n. Mais l'Arithmétique supérieure ne donne à cet égard aucune méthode. »

Notre procédé qui donne *toutes* les solutions nous indique en quelques minutes $m = 425\,776$ et $n = 160\,403\,631$, par la solution en nombres entiers de

$$36t^3 + 108t^2 + 104t + 25 = Z^2$$

avec

$$t = 141\,925 \ .$$

La décomposition des grands nombres, l'analyse indéterminée, certains problèmes de Géométrie et combien d'autres questions seront le champ d'investigation de ce nouveau moyen de calcul.

Je vais présenter d'autres modèles de cette machine au congrès de Cambridge (21-28 août) et Dundee (4-11 septembre), mais je tiens à remercier auparavant deux collaborateurs dévoués qui m'ont livré un appareil compteur bien au point et un intéressant moyen de découvrir la solution ; ce sont MM. P. Carissan professeur au collège de Leskeven (Finistère) et M. le lieutenant Carissan de St-Brieuc qui d'ailleurs étudient d'autres modèles d'intéressantes machines arithmétiques.

12. — M. Ernest Lebon prie la section de mathématiques de voter que la ville de Nîmes veuille bien faire inscrire sur la maison n° 2, rue St-Castor, adossée à la Cathédrale, une inscription rappelant que M. Gaston Darboux, le grand géomètre français est né dans cette maison. Ce vœu a été aussi présenté le 6 août en assemblée générale, et voté par acclamations.

13. — Ensuite M. L. Montangerand de Toulouse, présente quelques *Suggestions sur la carte photographique internationale du ciel et Idées nouvelles pour la découverte des étoiles variables.*

Les clichés de la carte astrophotographique peuvent donner lieu à de nombreuses recherches outre celles signalées au Congrès de 1910. Il est désirable, par exemple, d'inscrire au nombre des travaux à exécuter d'une manière systématique sur ces clichés la mesure des étoiles doubles ou multiples, mesure à faire de préférence en coordonnées rectilignes.

Quant à la reproduction même des clichés de la carte en vue des tirages définitifs sur papier, il serait précieux d'appliquer aux opérations de comparaison de correction le principe de l'appareil optique dit *la chambre claire*, cette application devant faciliter et perfectionner le travail et permettre de rapides investigations sidérales.

Pour la découverte des étoiles variables, on peut ajouter au moyen indiqué, en ce qui concernait les clichés de la carte, au Congrès de 1910, les suivants :

— examen des traînées d'étoiles obtenues sur cliché par déréglage sensible de l'horlogerie de l'Instrument et sans conduite de la part de l'observateur, avec une durée d'exposition aussi longue que possible; à des journées différentes on peut poser sur la même plaque en plaçant en voisinage les traînées correspondantes des mêmes étoiles.

— examen des cercles stellaires obtenus, dans les mêmes conditions que pour les traînées en pratiquant l'extra-focalité de la plaque.

Pour la reconnaissance des étoiles variables, nombreuses dans les amas il sera pratique de faire des poses rapides et de leur comparer d'autres poses, de même durée ou non faites quelque temps après.

14. — M. L. Montangerand expose ensuite : *Détermination de la valeur du diamètre apparent de la Lune par l'observation photographique des occultations d'étoiles.*

L'éclipse centrale de Soleil du 17 avril 1912 a montré l'importance considérable de la connaissance de la valeur précise du diamètre apparent de la Lune. Pour la prévision des circonstances exactes des éclipses, cette connaissance est, en effet, de toute nécessité.

Or, pour de nombreuses raisons tenant à la libration, l'irrégularité du bord lunaire, l'irradiation....., la mesure de cet élément géométrique qu'est le diamètre est assez incertaine. Finalement la meilleure détermination paraît consister dans l'observation des occultations d'étoiles, en temps ordinaire ou plutôt au moment des éclipses totales de Lune.

Jusqu'ici, on s'est contenté de faire ces dernières observations visuellement Mais il est possible de les effectuer par la voie photographique. Il

suffit de prendre des clichés de la partie du ciel enveloppant la Lune, en déréglant sensiblement l'horlogerie de l'instrument si l'astre éclipsé ne peut pas impressionner les plaques, ou en guidant sur un accident lunaire si l'astre conserve encore une luminosité photogénique.

Dans les deux cas, on aura des séries de traînées d'étoiles dont quelques-unes seront écourtées par la présence d'un cercle représentant la place de la Lune dans le champ, ou son disque visible, écourtement dû à une occultation.

En mesurant au micron près, les longueurs de ces traînées réduites par rapport à celles des traînées entières, on aura les moments des occultations et au dixième de seconde à condition, bien entendu, de connaître avec précision la durée des poses.

15, 16 et 17. — M. Léon Aubry, de Jouy-les-Reims, envoie 3 notes dont voici les titres : *Démonstration directe de* 4n + 1 *premier égal à une somme de deux carrés; méthode pour résoudre* $x^2 - ay^2 = 1$ *; méthode de décomposition des nombres.*

J'attire l'attention sur le théorème 6 qui semble très important surtout pour la résolution de l'équation de Fermat et peut-être pour la décomposition des nombres. Cette étude est la suite logique de celle envoyée en 1911 à *l'Association Française pour l'Avancement des Sciences,* et j'obtiens ainsi par une méthode uniforme et très simple les principaux résultats concernant les diviseurs des formes quadratiques.

Ma démonstration que tout nombre premier de la forme $4n + 1$ est une somme de deux carrés est absolument directe et indépendante des fractions continues, et de l'équation de Fermat. Ma méthode permet d'ailleurs de se passer des fractions continues, ce qui n'est pas sans importance ; j'espère pouvoir l'étendre à des suites de la forme $Ax_i^2 - y_i^2 = E_i$, E_{i+1} ; ceci permettrait sans doute de retrouver, ainsi que l'a fait Fermat, la démonstration de $8n + 3$ égal à une somme de trois carrés sans s'appuyer sur le théorème de Lejeune-Dirichlet sur la progression arithmétique, ou sur la théorie des formes quadratiques.

18. — M. Maire, de Paris, envoie une communication sur

Quelques lettres de H.-C. Schumacher adressées à François Arago. — J'ai l'honneur de présenter quelques lettres que Henri-Christian Schumacher, directeur de l'Observatoire d'Altona, a adressées entre 1843 et 1849 à Fr. Arago et à F.-V. Mauvais, astronome à l'Observatoire de Paris, et une dernière lettre du neveu de Schumacher, écrite à Arago en 1850. Les documents paraissent inédits et enrichiront encore la correspondance d'Arago. Dans la première lettre adressée à Arago (28 mars 1843), Schumacher lui exprime tous ses remercîments pour la peine qu'il a prise d'écrire au Roi, afin de lui faciliter l'exécution de ses travaux astronomiques.

Dans la seconde lettre du vingt août 1843, l'astronome d'Altona recommande à Arago le Dr Hatter qui se rend pour la première fois à Paris.

La troisième lettre, la plus longue de toutes (26 juin 1849), est adressée à Arago en pleine révolution des duchés de Holstein et de Schleswig contre le Danemark. L'Ecole de Marine de Kiel réclame l'Observatoire d'Altona, mais le gouvernement des Duchés oppose un refus.

Schumacher se trouvant très embarrassé pour continuer ses travaux, expose ses ennuis à Arago, le sollicite pour que la France et l'Angleterre, chargées de régler la paix entre les belligérants, puissent obtenir que la question de l'Observatoire soit comprise dans les négociations.

La lettre que Schumacher écrit à Mauvais (22 juillet 1847), relate la découverte que Brorsen a faite sur les mouvements particuliers de la comète récemment découverte.

La dernière lettre, est écrite à Arago en 1850, par le neveu de Schumacher, après la mort de son oncle.

19. — On présente ensuite un mémoire de M. A. Aubry, de Dijon, sur

Les principes de la théorie des nombres complexes. — Habituellement on établit, d'après Gauss, la théorie des nombres complexes, en supposant connue celle des nombres réels ; elle peut cependant, et peut-être devrait-elle, se traiter directement, d'autant plus que c'est là qu'il faut chercher la véritable source de l'arithmétique quadratique. C'est ce qu'a exposé en partie Lejeune-Dirichlet en tête de ses *Recherches sur les f. quad. à coef. et ind. compl.* (*Cr.*, 1842 et *Werke*, t. I, p. 539) ; puis, plus complètement, dans une suite de conférences faites à Berlin en 1853-1854 et consignées en 1863 dans un opuscule de G. Arendt, qui semble assez rare, car ni la *Zahlentheorie*, ni les *Werke*, de Lejeune-Dirichlet n'en parlent : je ne vois que Bachmann, dans sa *Kreistheilung*, qui y fasse allusion. Toutefois, il restait encore dans cette exposition un emprunt à la théorie élémentaire des nombres, le théorème de Fermat, qu'il convenait de traiter dans le même esprit. D'ailleurs il y avait lieu de revoir, de compléter et de simplifier le tout, de manière à le rendre accessible à tous les amateurs de l'arithmétique.

C'est dans ce but, que j'ai pensé à présenter une série d'articles sur ce sujet : le premier contiendra seulement les tout premiers éléments basés en grande partie sur le célèbre théorème de Fermat relatif à la décomposition des nombres premiers $4+1$ en une somme de deux carrés, ce qui fait une démonstration nouvelle à ajouter à celles d'Euler, de Lagrange, de Legendre, de Gauss, de Smith et d'Ed. Lucas, que j'ai rappelées dans une Note insérée au Tome IV des *OEuvres* de Fermat, page 232.

20 et 21. — M. E. Belot, de Paris, adresse deux communications intéressantes sur

Les forces répulsives à l'origine des Mondes. — Les cosmogonies modernes admettent en général ce postulat « que la loi de Newton et la Mécanique newtonienne doivent à elles seules expliquer l'origine d'un Monde ».

L'examen des phénomènes des comètes et des novæ, la théorie de la pression de radiation et l'analyse des formules de la cosmogonie tourbillonnaire montrent, au contraire, que *dans une nébuleuse en voie de condensation, la matière obéit d'abord aux forces répulsives avant d'obéir à l'attraction.*

Par là, on comprend comment la matière s'est étalée radicalement, aussi bien dans le système planétaire que dans les nébuleuses spirales.

Les postulats dans la nouvelle cosmogonie de T. Sée. — Les raisonnements qui contiennent des hypothèses cachées risquent fort d'être erronés.

La nouvelle cosmogonie, exposée par T. Sée dans son Livre récent : *The capture theory of cosmical evolution,* renferme un certain nombre de ces postulats non explicités. En les mettant en lumière, on voit nettement sur quelles bases fragiles est édifiée la théorie de l'évolution cosmique fondée sur l'idée de la capture des astres dans le milieu résistant d'une nébuleuse.

22. — M. L. Favre, de Paris, envoie une note sur une question à l'ordre du jour

Erreurs de mathématiciens. — Distinction à faire entre les solutions erronées et les raisonnements erronés. (On peut donner d'une proposition vraie une démonstration fausse ou sans valeur : les élèves le font parfois.)

Cas de certaines démonstrations le l'impossibilité du mouvement perpétuel. On donne une définition arbitraire du mouvement perpétuel, puis on démontre, avec raison, que l'objet défini est impossible à réaliser. Puis, à tort, on dit, on pense que la démonstration (valable pour le mouvement perpétuel du mathématicien) vaut aussi pour le mouvement perpétuel de l'ignorant qui cherche, alors que, en fait, ce dernier cherche quelque chose de tout différent de ce qui a été arbitrairement défini. (L'ignorant s'accommoderait fort bien d'un mouvement qui se perpétuerait avec intervention gratuite du milieu ambiant.) Le raisonnement qui fait appliquer à tort la démonstration est défectueux.

23. — M. L. Tripier envoie un mémoire

Sur l'application de la méthode des approximations successives; résolution des équations numériques. — La méthode des approximations successives appliquée au calcul d'une valeur approchée d'une racine de l'équation

$$x = f(x)$$

donne une suite de valeurs convergentes si

$$\left| \frac{df}{dx} \right| < 1$$

dans le domaine de ces valeurs, condition nécessaire et suffisante

L'interprétation géométrique de cette application conduit immédiatement à l'introduction du facteur λ tel que la courbe

$$y = x + \lambda[f(x) - x] \tag{1}$$

donne

$$\left| \frac{dy}{dx} \right| < 1 ,$$

dans le cas où

$$\left| \frac{df}{dx} \right| > 1 ,$$

et à l'application de la méthode à la recherche des points communs à la droite

$$y = f(x)$$

et à la courbe

(1) $$y = (1 - \lambda)x + \lambda fx ,$$

la présence du facteur $\lambda \neq 1$ assurant la convergence des valeurs essayées.

24. — M. L. Gardès, de Montauban, envoie un mémoire

Contribution à l'étude du solitaire. — Ed. Lucas a fait une étude fort belle sur le jeu du solitaire (1er vol. de ses Récréations mathématiques); mais cette étude présente un semblant d'erreur et une lacune.

Lucas laisse entendre, sans le dire, qu'il a donné toutes les solutions possibles pour résoudre le problème consistant, une fiche étant ôtée, à enlever toutes les autres sauf une; cette affirmation n'est pas dans sa pensée, car elle serait fausse; le nombre des solutions est excessivement grand.

Puis ayant démontré que le problème est impossible pour 21 cases du jeu prises comme cases initiales, il ne va pas plus loin; c'est là une lacune, car si on enlève la fiche centrale 44 et une autre quelconque prise dans les 21 ci-dessus ou dans les 16 autres la réussite devient toujours possible. Elle l'est même le plus souvent lorsqu'on commence la réussite en enlevant deux fiches quelconques. *Le problème général et pour lequel il y a toujours possibilité de réussite est donc celui qui consiste à opérer sur le solitaire décentré.* Dans ce cas quelle que soit la fiche initiale choisie la réussite est toujours possible.

25. — M. E. N. Barisien, de Paris, envoie une note

Sur quelques sommations et séries. — Le but de cette Note est de présenter diverses sommes de fractions formées par des termes en progression arithmétique croissante, et d'en déduire diverses séries, dont quelques-unes sont peut-être inédites.

Ce travail m'a été suggéré comme généralisation de formules de ce genre, communiquées par M. l'abbé Cassin, curé de Domqueur, par Ailly-le-Haut-Clocher (Somme), qui est un spécialiste de l'étude des progressions.

26 à 34. — Les neuf communications suivantes ont ensuite été exposées : M. Pellet, *sur les lignes asymptotiques;* M. Chrétien, *Tables des polynômes de Legendre, Sur la distribution des étoiles dans les amas globulaires;* Welsch, *Lignes diamétrales des courbes algébriques, Sur les cercles de Joachimsthal, Triangles inscrits dans un triangle donné, Sur le théorème de Fuss;* Farid Boulad, *Sur les équations à 4 variables d'ordre nomographique 4.* Welsch, Polygones de Steiner inscrits dans une quartique. Rapprochement entre ces polygones et ceux de Poncelet. Remarques diverses.

L'assemblée générale du 6 août a élu, par acclamations, Vice-Président, M. Armand Gautier, et Vice-Secrétaire, M. Ernest Lebon.

Le prochain congrès aura lieu à *Tunis* du 22 au 27 mars 1913;

le Président de la section mathématique sera M. Maingrot de Tunis, le Secrétaire M. A. Gérardin de Nancy.

Deux séances de projections ont été organisées par M. A. Gérardin. Nous devons des remerciements spéciaux à MM. Maingaud et Marcelin de Nîmes, ainsi qu'à M. Bellieni, l'opticien bien connu de Nancy, qui avait bien voulu nous prêter de belles vues des Vosges et de l'éclipse de soleil du 17 avril 1912. La série de positifs projetés comprenait en outre des vues de Nimes, Dijon, Tunis, Bretagne, Suisse, Italie...

Lucien Lévy.

M. Lucien Lévy, examinateur des élèves à l'Ecole Polytechnique, vient de mourir à Fontainebleau, le 2 août dernier.

Triste nouvelle pour tous ceux qui ont connu ce géomètre savant et bon, qui, en sa carrière d'examinateur, savait apporter dans l'exécution stricte de ces délicates fonctions une affabilité et une délicatesse unanimement reconnues.

Né le 7 octobre 1853, Lucien Lévy, agrégé à 23 ans, débuta dans l'Université comme professeur au Lycée de Rennes. Il vint bientôt à Paris, au Lycée Louis-le-Grand, fut Directeur des études scientifiques à l'Ecole de Sainte-Barbe et, à partir de 1890, examinateur d'admission à l'Ecole polytechnique. C'est dans ce « poste de combat », suivant une expression employée par l'éminent combattant lui-même, qu'il sut merveilleusement allier le tact, la justice et la science ainsi qu'en témoignent d'innombrables élèves de toutes catégories.

Comme productions scientifiques originales, il laisse de remarquables travaux géométriques résumés en plusieurs endroits de l'ouvrage de M. Darboux sur la théorie des surfaces. Ces résultats concernent les équations aux dérivées partielles du type de Laplace auxquelles correspondent d'importantes propriétés des congruences et des réseaux conjugués.

Il fut particulièrement intéressé par la construction des systèmes triplement orthogonaux, notamment de ceux formés de surfaces qui, par des déplacements, donnent toute la famille de Lamé considérée (G. Darboux. *Leçons sur les systèmes orthogonaux*. Deuxième édition, p. 86). Son principal travail sur ce sujet fut couronné par l'Académie royale de Belgique et publié dans les *Mémoires des Savants étrangers* de ladite Académie (t. LIV). Il écrivit également un *Précis de la Théorie des fonctions elliptiques* qui présente très simplement cette théorie appuyée sur de nombreux exemples et exercices empruntés à la géométrie et à la mécanique. Enfin, en collaboration avec Rouché, il publia, en deux volumes, des *Eléments d'Analyse à l'usage des physiciens et ingé-*

nieurs, éléments en lesquels il fait profiter ses lecteurs de la belle symétrie de ses connaissances géométriques et de ses conceptions très simples relatives aux fonctions elliptiques.

Dans un récent fascicule de l'édition française de l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques,* il développe de manière considérable un article allemand relatif aux préliminaires géométriques utilisés en mécanique (vecteurs et géométrie des masses).

Lucien Lévy fut Président de la Societé mathématique de France et eut l'honneur de représenter celle-ci au récent jubilé de M. Darboux. En dehors de ses productions scientifiques propres il était d'un commerce spirituel et délicat, donnait de judicieux conseils et excellait à combattre le découragement qui s'empare fréquemment des jeunes travailleurs. Il laisse plusieurs enfants dont l'un, M. Paul Lévy, professeur à l'Ecole des mines de Saint-Etienne, s'est déjà classé parmi les brillants géomètres de la jeune génération. J'ai le bonheur d'avoir beaucoup connu et de devoir beaucoup à l'homme de grand cœur qui disparaît. J'adresse ici à sa mémoire un salut suprême et profondément ému.

A. Buhl (Toulouse).

Nouvelles diverses. — Nominations et distinctions.

Allemagne. — *Fondation Alfred Ackermann-Teubner.* — En souvenir du centenaire de la Librairie B. G. Teubner, le chef de la maison, M. Alfred Ackermann-Teubner, a fait remettre à l'Université une somme de 20,000 marks, dont les intérêts serviront à un prix de mathématiques de Mk. 1000, qui sera délivré tous les deux ans à partir de 1914. Les intérêts non utilisés s'ajouteront au capital jusqu'à ce que celui-ci atteigne 60,000 marks. A partir de ce moment le prix sera délivré chaque année. Le prix portera le nom « *Alfred Ackermann-Teubner-Gedächnispreis zur Förderung der mathematischen Wissenschaften* ». (Pour plus de détails, voir le *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, t. XXI, n°s 6-7, 1912).

— M. W. Bjerknes, de l'Université de Christiania, est nommé professeur de Géophysique à l'Université de Leipzig.

M. K. Doehlemann est nommé professeur ordinaire de Géométrie descriptive à l'Ecole technique supérieure de Munich (section d'architecture).

M. S. Finsterwalder est nommé professeur de Géométrie descriptive à l'Ecole technique supérieure de Munich (section des ingénieurs), en remplacement de M. L. Burmester, qui prend sa retraite.

Angleterre. — M. E. Picard, membre de l'Institut de France, est nommé docteur honoraire de l'Université de Cambridge.

M. A. N. WHITEHEAD est nommé lecteur de Géométrie à l'Université de Londres; il donnera ses conférences à l'University College.

Autriche. — M. G. KOHN, professeur extraordinaire, est nommé professeur ordinaire à l'Université de Vienne.

M. H. A. LORENTZ, à Leyde, est nommé membre honoraire de l'Académie des Sciences de Vienne.

Belgique. — M. C. DUSAUSOY, professeur d'Astronomie à l'Université de Gand, a été promu à l'éméritat. Il est remplacé par MM. E. MERLIN et N. VANDEVYVER.

France. — *Académie des Sciences.* — Dans sa séance du 29 juillet, l'Académie a décerné le prix Binoux (Histoire des Sciences) 2000 francs à M. J.-L. HEIBERG, professeur à l'Université de Copenhague, pour ses travaux relatifs à l'« Histoire des mathématiques anciennes », et plus particulièrement pour ses travaux sur le « Traité de la méthode d'Archimède ».

Collège de France. — M. HUMBERT, membre de l'Académie des Sciences, professeur à l'Ecole polytechnique, est nommé titulaire de la chaire de mathématiques.

Faculté des Sciences de Paris. — M. E. CARTAN, maître de conférences, est nommé professeur de Calcul différentiel et intégral (Ecole normale supérieure).

M. GUICHARD, professeur à la Faculté des Sciences de Clermont, est chargé d'un cours de mathématiques générales (chaire de M. Painlevé, député).

M. VESSIOT est nommé maître de conférences.

Observatoire de Lyon. — M. Jean MASCART, astronome adjoint à l'Observatoire de Paris, est nommé directeur de l'Observatoire de Lyon en remplacement de M. ANDRÉ, décédé; il est chargé des cours d'astronomie physique à la Faculté des Sciences de Lyon.

Italie. — MM. G. LORIA, de l'Université de Gênes, et R. MARCOLONGO, de l'Université de Naples, viennent d'être nommés membres correspondants de l'Académie Royale dei Lincei.

M. C. SOMIGLIANA, professeur à l'Université de Turin, a été nommé membre de la Société italienne des Sciences (dites des XL).

Nécrologie.

Gaston COMBEBIAC. — A l'instant où sortait des presses notre n° de juillet, nous apprenions la mort de Gaston Combebiac, commandant du Génie en retraite, décédé le 12 juillet à Limoges, à l'âge de 50 ans. C'est une perte importante pour la science française, si éprouvée depuis quelque temps. Docteur ès sciences mathématiques, ancien élève de l'Ecole polytechnique, Combebiac avait surtout apporté une importante contribution aux méthodes vectorielles. C'était un esprit philosophique, original et d'une

grande sagacité. L'*Enseignement mathématique* déplore d'autant plus cette fin prématurée qu'il perd en Combebiac un collaborateur, qui n'avait certes pas dit son dernier mot et dont la Science mathématique pouvait attendre encore beaucoup de travaux de haute valeur.

Le Lt-Colonel Touche. — M. le lieutenant-colonel d'artillerie Paul-Emile Touche, officier de la Légion d'honneur, est décédé à Paris le 20 juillet 1912, à l'âge de 84 ans. Membre de la Société mathématique de France, président honoraire de la Société de navigation aérienne, il s'était surtout intéressé aux questions d'hydrodynamique. La Société mathématique perd en lui un collègue bienveillant, aimable et sympathique qui sera regretté par tous ceux qui l'on connu personnellement.

P. Treutlein. — Le 26 juillet dernier est mort à Carlsruhe, à l'âge de 67 ans, le professeur P. Treutlein, directeur de la Gœtheschule (Reformrealgymnasium). Excellent géomètre, il était aussi un professeur très apprécié tant par son enseignement que par ses ouvrages didactiques. Sa mort laissera un vide sensible dans la Société mathématique allemande et surtout dans la Sous-commission allemande de l'enseignement mathématique dont il était l'un des collaborateurs les plus actifs.

E. L. Richards, professeur émérite de l'Université Yale, aux Etats-Unis, est décédé le 6 août dernier, à l'âge de 74 ans.

NOTES ET DOCUMENTS

Commission internationale de l'enseignement mathématique.

Compte rendu des travaux des sous-commissions nationales.

(9e article.)

HONGRIE

Ecoles normales primaires.

Der mathematische Unterricht an den Lehrerbildungsanstalten[1], von Karl Goldziher, Professor am Staatlichen Pædagogium. — Il existe actuellement en Hongrie 48 écoles normales primaires pour instituteurs et 34 pour institutrices, dont 26 officielles.

A l'exception de quelques écoles privées, la langue véhiculaire est le hongrois. Le programme des écoles privées étant le même que celui des

---

[1] 1 fasc. de 13 pages, Imprimerie Hungaria. Budapest.

écoles officielles, c'est celui-ci que l'auteur développera. Une remarque intéressante, c'est qu'au point de vue des mathématiques, les programmes sont identiques pour instituteurs et institutrices. Dans les écoles normales primaires, un nouveau programme vient précisément d'être élaboré pour remplacer celui de 1902. Les tendances modernes dans le domaine mathématique y seront prises en considération et auront une grande influence sur la nouvelle orientation de l'enseignement mathématique. Le nouveau programme porte le nombre d'heures de 10 à 12, préconise une division méthodique de la géométrie et l'introduction de l'idée de fonction par l'étude des éléments de la géométrie analytique; en 4me classe, il propose une extension pratique plus accentuée des cours d'arithmétique et d'algèbre. Des instructions complètement nouvelles ont été ajoutées de manière à obtenir un enseignement uniforme dans tous les établissements. Elles ont pour but d'accorder la capacité intellectuelle d'élèves de 15 à 18 ans avec les exigences de l'école normale : exigences doubles, demandant des connaissances nombreuses et une préparation didactique spéciale. Elles insistent sur l'importance du calcul mental dans tout l'enseignement et donnent des conseils judicieux pour la préparation des matières à enseigner. L'école normale primaire comprend 4 classes. L'âge d'entrée est de 14 ans accomplis et les élèves doivent connaître le programme des cours inférieurs de l'école moyenne (IVme classe). En Belgique, les élèves entrent à 15 ans et, condition illogique, ne doivent posséder que les matières de l'école primaire. L'enseignement est gratuit, avec internat presque partout. Les élèves subissent un examen à la fin de chaque année scolaire. Dès la première année, ils assistent aux leçons modèles qui se donnent à l'école primaire d'application; à partir de la troisième année, ils donnent déjà des leçons, mais c'est surtout en quatrième année que se fait la préparation didactique. Chaque élève donne, par semaine, 6 heures de leçons soigneusement préparées.

L'examen de sortie, après les 4 années, porte surtout sur les branches pédagogiques et celles de culture nationale. Depuis 1911, il comprend aussi une épreuve écrite et orale sur les mathématiques. L'aspirant instituteur doit aussi donner une leçon dont la préparation se fait par écrit à huis clos.

Le programme mathématique comprend : En arithmétique : opération dans le système décimal sur les nombres entiers, décimaux, fractions, — divisibilité, — puissances et racines, — nombres irrationnels, — proportions, — partages proportionnels, — questions pour cent, — monnaies, — mélange, — alliage, — systèmes monétaires étrangers, — intérêt, — escompte, — progressions, — intérêts composés et ses applications, — pratique commerciale, — affaires de bourse.

En algèbre : opérations fondamentales, — nombres négatifs, — Equations du 1er degré, — systèmes linéaires à 2 et 3 inconnues, — carrés et cubes, — équations du 2me degré, — nombres imaginaires et nombres complexes.

En géométrie : mesure de longueurs — mesure d'angles — droites parallèles, — propriétés des triangles, quadrilatères, cercle, — égalité des figures, — constructions, — similitude des figures, — Théorème de Pythagore, — triangle et quadrilatère inscrits et circonscrits, — calcul du côté du triangle, de l'hexagone régulier, — circonférence, — mesure de l'aire des figures traitées, — notions d'arpentage, — levers de plans, — génération, développement, aire, volume du prisme, cylindre, pyramide, cône, sphère, — définition et construction de l'ellipse, parabole, hyperbole.

En 3me année, on a introduit la géométrie analytique du point, de la

droite, du triangle, avec l'étude des connaissances algébriques nécessaires, basées sur l'idée de fonction et les méthodes graphiques. Au programme, figure, en 3me année, un point essentiel : c'est la discussion et l'interprétation des cours d'arithmétique et de géométrie de l'école primaire; l'étude méthodique des chapitres importants, des moyens d'intuition, des appareils, des manuels les plus répandus.

Le nouveau programme marque un progrès sur l'ancien. Les matières des cours de géométrie et d'algèbre sont plus méthodiquement réparties. Pourtant il eut été préférable de faire précéder l'étude de l'algèbre de l'étude approfondie de l'arithmétique, afin de pouvoir fixer plus naturellement les principes algébriques et les développements de la notion de nombre. La formation uniforme pourrait gagner à voir l'algèbre et la géométrie marcher parallèlement, de même la géométrie plane et solide. Il serait désirable de voir introduire les logarithmes et la trigonométrie plane. En tout cas, l'introduction de la géométrie analytique est un grand progrès à signaler et nous ajouterons que ce programme est de beaucoup supérieur à celui en vigueur dans maints pays étrangers. Ivan Tanfi avait montré les lacunes du programme antérieur et le programme qu'il a élaboré est particulièrement digne d'attention. Il prend comme base de l'enseignement mathématique la notion de fonction. A raison de 4 heures de cours par semaine et par classe, il est arrivé à former un programme continu et parfait, en insistant avant tout sur les connaissances arithmétiques, en mettant en évidence la théorie des fonctions géométriques, en insistant sur le développement de la puissance de représentation dans l'espace, en cherchant un enchaînement logique des connaissances algébriques et géométriques. Les matières forment un tout méthodiquement préparé et pratiquement applicable, correspondant à la culture générale de l'instituteur et dominé toujours par le point de vue didactique.

Tanfi insère dans son programme les logarithmes et la trigonométrie plane, il fonde ainsi les connaissances mathématiques sur une base plus large, plus solide; il a parfaitement compris les exigences des réformes modernes, tout en repoussant toute surcharge, telle que les éléments du calcul différentiel.

La formation des professeurs d'école moyenne inférieure (Bürgerschullehrer) est assurée par 7 écoles normales moyennes pour garçons et 5 pour filles. Dans ces écoles normales, il y a 2 sections : la section littéraire (langue, histoire), la section scientifique (mathématiques, sciences naturelles).

Il existe des diplômes spéciaux facultatifs pour la gymnastique, le travail manuel, le dessin. Pour y entrer il, faut être porteur du diplôme d'instituteur ou du certificat de maturité. Les cours sont gratuits, durent 3 ans et comportent des examens semestriels. Après 2 ans, le candidat doit subir une première épreuve ; après 3 ans, une deuxième épreuve comprenant des exercices pratiques.

On attache, avec raison, une grande importance à la préparation pédagogique. En 2me année, les élèves reçoivent les cours de pédagogie et donnent des leçons didactiques à l'école d'application. En 3me année, ils donnent de nombreuses leçons, dans lesquelles les tendances modernes mathématiques sont fortement prises en considération. Les candidats qui ont réussi les 2 épreuves précitées peuvent solliciter leur admission à l'« Apponyi Kollegium », où, après avoir étudié 2 ans encore, ils peuvent obtenir le diplôme de professeur d'école normale primaire.

De grands changements sont à attendre pour l'avenir, particulièrement dans la section scientifique où l'application du nouveau programme amènera la division de la section scientifique en 2 sections : section mathématique physique; section chimie et histoire naturelle. Il y aura augmentation du nombre d'heures de mathématiques et la géométrie descriptive sera enseignée comme branche indépendante.

Le programme, réparti sur 3 années à raison de 13 heures par semaine en 1re année, 7 heures en 2me, 7 heures en 3me comprend : algèbre : déterminants et résolution générale des systèmes linéaires. Analyse : éléments du calcul différentiel et intégral avec applications géométriques. Critérium de convergence des séries infinies. Développement en séries de puissances des fonctions élémentaires. Géométrie plane et solide. Trigonométrie plane et sphérique. Géométrie descriptive. Géométrie analytique plane et de l'espace. Arithmétique commerciale. Tenue des livres. Eléments de probabilités. Assurances sur la vie.

C'est en somme un programme très complet et que beaucoup d'établissements analogues de pays étrangers pourraient envier. En Belgique, les études similaires ne comportent que 2 années ; à partir de l'an prochain, on va ajouter une 3me année.

Préparation scientifique des professeurs des Ecoles moyennes.

Die Ausbildung der Mittelschulprofessoren [1] von Josef Kürschak, Professor an der Technischen Hochschule. — En Hongrie, comme en Autriche, on désigne les Gymnases et Ecoles Réales sous la dénomination « Ecoles Moyennes » et les membres enseignant portent le titre de professeurs.

Pour être professeur, il faut :

1° Avoir subi l'examen de maturité.

2° Avoir suivi pendant 4 ans les cours appropriés dans une Université ou une école polytechnique ; avoir en outre suivi les cours suivants : littérature hongroise, histoire de la littérature, pédagogie, didactique, logique, psychologie, histoire de la philosophie.

3° Après les études, le candidat doit faire un stage dans un Gymnase au moins pendant un an ou étudier durant une 5me année à l'Université, mais en tout cas prouver qu'il a acquis la pratique de l'enseignement.

4° Il doit subir les épreuves suivantes : *a)* L'épreuve fondamentale à la fin du 4me semestre. *b)* L'épreuve spéciale après le 8me semestre. *c)* L'épreuve pédagogique après l'année de stage. Chaque candidat obtient son diplôme pour 2 groupes de branches, il peut l'obtenir pour 3 ; un mathématicien peut prendre comme second groupe la physique ou la géométrie descriptive. L'examen fondamental comprend écrit et oral et porte sur les matières relatives aux 2 ou 3 groupes choisis, sur la grammaire hongroise et l'histoire de la littérature. L'épreuve spéciale porte exclusivement sur les matières des groupes choisis. Le candidat doit faire une thèse sur chaque groupe et subir un examen écrit et oral sur chaque branche. Pour les candidats mathématiciens, l'examen comporte les matières suivantes :

a) Matières de l'Enseignement moyen. *b)* Certaines parties de la géométrie, de l'algèbre, de l'analyse, communes pour tous. *c)* Etude approfondie

[1] 1 fac. de 20 pages. Imprimerie Hungaria, Budapest.

d'un des 5 chapitres suivants et connaissances superficielles des 4 autres : 1° Géométrie moderne et théorie des formes algébriques ; 2° théorie des nombres, algèbre supérieure ; 3° Théorie générale des lignes et surfaces courbes ; 4° Théorie des fonctions ; 5° Calcul intégral (partie supérieure).

Remarquons que les connaissances exigées au chapitre *a)* ne se limitent pas à celles que peut avoir un Abiturient (Rhétoricien), elles comprennent aussi des matières qui ne sont pas traitées dans les Gymnases mais qui sont indispensables pour former un esprit mathématique.

Les candidats doivent aussi subir l'examen sur la géométrie descriptive ou la physique.

L'examen pédagogique comprend une épreuve écrite et une épreuve orale. Il comporte : logique, psychologie, histoire de la philosophie, pédagogie générale, histoire de la pédagogie, méthodologie générale et spéciale, programme et règlement des Ecoles moyennes.

Cet examen montre toute l'importance que l'on attache, avec raison, à la formation didactique des professeurs, formation hélas, si négligée dans tant d'autres pays, en France, en Belgique, en Hollande, en Angleterre, en Italie.

Pour se préparer aux différentes épreuves, les étudiants peuvent suivre les cours de l'Université de Budapest ou de Kolozvar, de l'Ecole polytechnique de Budapest. Remarquons qu'à Budapest et à Kolozvar, existent des séminaires spéciaux pour la formation méthodique des professeurs. Les candidats qui veulent s'y faire inscrire reçoivent des cours spécialement organisés pour eux, suivent des cours à l'Université et sont aidés par des répétiteurs spéciaux. Ils peuvent obtenir des bourses de 1000 couronnes. Les candidats prenant la Descriptive comme second groupe se font inscrire à l'Ecole polytechnique de Budapest. Il faut signaler aussi l'Internat officiel pour candidats professeurs établi à Budapest, où les élèves trouvent non seulement les soins alimentaires mais encore des professeurs qui les aident dans leurs études. Enfin il y a le complément naturel et nécessaire : le Gymnase modèle (Übungsgymnasium) où le candidat, après ses 4 années d'études théoriques, peut faire son stage pratique, suivre des conférences pédagogiques et se mettre au courant de tous les progrès de la didactique. Il y a des bourses pour les candidats stagiaires.

Préparation pratique : Le Gymnase d'application.

Der Unterricht der Mathematik am Uebungsgymnasium [1] von Peter von Szabo, Professort am Uebungsgymnasium. — Au commencement de la nouvelle ère constitutionnelle hongroise (1867), la préparation des professeurs était dans une situation très primitive. L'Université s'en inquiétait peu et ne s'occupait pas de leur formation pédagogique. Ce fut le premier ministre de l'enseignement, Baron Joseph von Eötvös, qui créa en 1870 à Pest un séminaire pour professeurs d'enseignement moyen et prit l'initiative d'envoyer des jeunes gens à l'étranger. Parmi ceux-ci, se trouvait le Dr Moriz Kármán, jeune pédagogue de valeur qui, après un séjour à Leipzig, s'occupa activement de la préparation pratique des professeurs, et contribua à la fondation du Gymnase d'application de l'Ecole normale supérieure. Heureusement

[1] 1 fac. de 17 pages. Imprimerie Hungaria Budapest.

on avait laissé toute liberté aux organisateurs de ce Gymnase et cette liberté porta vite ses fruits. Aussi tandis que les autres Gymnases suivaient toujours le programme de 1871, l'Ecole d'application pratiquait des méthodes modernes et fécondes dérivant de cette pensée fondamentale que l'enseignement du gymnase doit synthétiser dans un cadre uniforme les connaissances qui constituent le trésor commun de l'humanité et forment un des fondements de la culture nationale.

Le Gymnase d'application réussit à améliorer fortement les méthodes et Kármán surtout, aussi bien dans les cours que dans les leçons didactiques, combattait avec un zèle inlassable pour amener les futurs professeurs à réfléchir souvent à la question didactique. Au commencement, une école préparatoire était annexée au Gymnase. Le programme suivi de 1872 à 1879 accordait 5 heures par semaine et par classe aux mathématiques. Ce programme dénotait un progrès marquant sur les autres programmes d'alors. La répartition des matières était plus méthodique et le choix était dominé par les 3 principes didactiques suivants : Intuition de la 1re à la 3me classe, classification en 4me, 5me et 6me, systématisation en 7me et 8me.

Il insistait déjà sur l'utilité des mesurages réels au commencement de la géométrie, sur l'emploi des nombres naturels en trigonométrie il assurait une place plus grande à la géométrie analytique. Pourtant les méthodes mathématiques progressaient moins que celles des autres branches parce que le professeur d'alors, déjà vieux, surchargé de cours, était peu enclin à admettre les nouvelles réformes, et par suite de cette difficulté — encore debout actuellement — que les mathématiques depuis les temps anciens ont été considérées seulement comme une école de logique formelle, et point du tout comme une discipline pouvant former l'esprit d'observation et donner les connaissances pratiques. Déjà en 1874, Kármán proposait l'introduction de l'étude des fonctions et leur représentation graphique ; malheureusement sont projet ne fut pas adopté, mais ses idées eurent leur influence sur les conférences ultérieures. Il recommandait, au degré inférieur, les mesurages, le dessin, comme initiation ; au second degré, il préférait aux éléments d'Euclide un cours trouvant ses bases dans les notions concrètes apprises au degré précédent, classant les formes et les propriétés étudiées.

En 1879, un nouveau programme remplaça celui de 1873 et une circulaire de 1883 obligea l'Etablissement à suivre de plus près le programme officiel. C'est pendant la période de 1883 à 1900 que les essais les plus marquants furent tentés pour réaliser les réformes de Kármán. Il y eut des essais remarquables ayant pour but de faire saisir la portée pratique des mathématiques, en fixant les théories mathématiques au centre de réalisations concrètes, en constituant un domaine concret relatif à chaque chapitre. Ainsi le Dr Demeczky traita en 1882 en 3me « Les méthodes de calcul à la Caisse d'Epargne et autres institutions financières et celles des Entreprises industrielles. Le Dr Grünwald fit en 1885, en 2me, un programme de calcul comprenant un domaine de connaissances pratiques très vastes et remarquablement enchaînées.

Des essais analogues, visant à rattacher à une notion mathématique les faits de la vie économique, sociale, les phénomènes de la nature, furent réalisés dans différentes classes. En cette orientation, les idées de Kármán sont particulièrement intéressantes. Pour lui, les questions traitées mathématiquement à l'école se rapportent à 3 groupes : à la vie économique, à l'art, au côté quantitatif de la nature. Au degré inférieur, le domaine matériel du

calcul comprend : la statistique et un petit cours d'économie nationale en rapport étroit avec les cours littéraires.

Pour la géométrie en I et IV, les arts et les opérations les plus simples de l'ingénieur fourniront le domaine matériel.

En IV, V, VI, les connaissances arithmétiques des classes inférieures, la géométrie, la physique serviront d'éléments basiques à l'algèbre.

Le programme suivi par Demeczky de 1889 à 1895 met clairement en évidence cette tendance de la recherche du domaine matériel concrétisant les idées mathématiques abstraites ; pour chaque classe, le programme se divise en deux parties : Partie pratique, matérielle, concrète, et matières formelles des mathématiques s'y rattachant. Notons aussi le rapport étroit existant entre les mathématiques et la physique, entre géométrie plane et solide.

En 1895, Demeczky fut remplacé par Beke. Beke conserva pour les degrés inférieurs les domaines concrets prémentionnés mais les modifia et les élimina parfois dans les degrés supérieurs.

En 1897, il introduisit en IVe les horaires graphiques ; en géométrie, à partir du théorème de Pythagore, il utilise des méthodes algébriques. Beke, tout en conservant les traditions, voulait éveiller l'intérêt pour l'étude historique des mathématiques, introduire les méthodes graphiques et réaliser un enchaînement rationnel de la théorie et des problèmes de la vie pratique. Signalons aussi que, en 1897, J. Waldapfel, professeur au Gymnase, était déjà d'avis que le calcul infinitésimal devrait entrer au programme des gymnases. En 1899, parut un nouveau programme, en partie œuvre de Beke, qui n'apporta aucun changement dans l'enseignement mathématique. Les successeurs de Beke travaillèrent de manière à ce que le gymnase d'application puisse toujours affirmer sa haute compétence dans l'enseignement mathématique.

Les essais que l'Ecole a tentés, les luttes qu'elle a soutenues, les succès qu'elle a remportés lui ont valu d'être reconnue comme un Gymnase modèle au point de vue didactique, aussi bien à l'étranger qu'en Hongrie. Son activité se manifeste d'ailleurs par les professeurs qu'elle forme, par les manuels que ceux-ci composent, par la part qu'elle prend directement ou indirectement aux travaux de la Commission de réforme, par les succès que ses élèves obtiennent chaque année dans les concours.

Ce rapport si intéressant et si instructif termine par une citation de Kármán qui mérite d'être reproduite :

« Ce n'est pas la formation mathématique formelle, la discipline intellectuelle, qui est d'une importance extraordinaire dans la vie nationale, cette formation n'est nécessaire que pour les mathématiciens ; le but du cours doit être de donner une connaissance véritable de la nature ; d'arriver par les mathématiques à une conception plus sûre, plus exacte de ses phénomènes ; de faire comprendre le travail prodigieux par lequel l'homme s'est assuré la domination des forces naturelles.

Ecole polytechnique de Budapest.

Der heutige Stand des mathematischen Unterrichts am königlich ungarischen Josefs Polytechnikum [1] *(Technische Hochschule in Budapest)* von

[1] Un fasc. de 14 pages, Imprimerie Hungaria, Budapest.

Gustav Rados, Professor an der Technischen Hochschule. — L'Ecole polytechnique de Budapest a pour but de former des ingénieurs. Les candidats qui entrent après l'examen de maturité doivent être préparés de manière à mettre en valeur d'une manière économique la connaissance des lois qui régissent la matière. Ce but particulier détermine non seulement la matière mais aussi la méthode d'enseignement. Les mathématiques doivent créer les bases sur lesquelles reposent les cours techniques. Le Sénat de la Polytechnique, persuadé que le succès de l'enseignement dépend en grande partie de la préparation antérieure des étudiants, a toujours considéré comme très importante la part d'influence qui est réservée à l'Ecole; dans la formation des professeurs de gymnases. Cette influence a sa répercussion naturelle dans l'enseignement mathématique des écoles moyennes et y éveille l'intérêt pour les institutions techniques. (Rapport de M. J. Kurschak.)

Les cours mathématiques qui figurent au programme sont : analyse et géométrie analytique; calcul différentiel et intégral; géométrie infinitésimale; équations algébriques et différentielles. Ces cours ne sont pas séparés par des cloisons étanches, mais au contraire traités le plus possible comme un tout; ainsi l'intérêt des élèves est éveillé, il y a gain de temps et résultats plus satisfaisants. Tout en insistant dans les cours sur l'intuition spatiale et excluant une tendance excessive vers l'abstraction mathématique, l'école admet que le point capital gît dans l'explication logique des théorèmes et des méthodes et attache une grande importance aux exercices réalisés sous la conduite du professeur et des assistants. C'est dans ces exercices, par la résolution de nombreuses questions de géométrie, de mécanique, de technique, que les méthodes sont réellement assimilées par les élèves. Le rapport donne ensuite le programme d'analyse et de géométrie, 1re partie, commun à tous les étudiants, comprenant pendant le 1er et le 2me semestre, 6 heures de cours et 3 heures d'exercices. Ces 3 heures d'exercices sont à noter comme caractérisant bien les tendances de l'enseignement. Les ingénieurs constructeurs et mécaniciens suivent en outre pendant le 3me et 4me semestre, à raison de 5 heures et 4 heures de cours, 3 heures d'exercices, la 2me partie d'analyse et de géométrie où les théories sont complétées et approfondies. L'enseignement de la géométrie descriptive, à cause de sa grande importance pratique et son utilité comme préparation et comme complément aux cours d'analyse et de géométrie est en rapport étroit avec les 2 cours précédents. Il s'étend sur 2 semestres et est suivi par tous les étudiants, à l'exception des chimistes. Il comprend, le 1er semestre, 6 heures de cours et 6 heures de construction; le 2me semestre, 5 heures de cours et 8 heures de construction. Depuis 1911, on donne aussi un cours d'arithmétique politique. Les cours de géodésie sont en relation avec les cours de mathématiques et en application directe de ceux-ci; ils comptent, le 1er semestre, 6 heures de cours et 4 heures de pratique; le 2me semestre, 5 heures de cours et 4 heures d'exercices aux instruments. Il y a 2 cours de mécanique, l'un suivi pendant 2 semestres par les ingénieurs-constructeurs et architectes à raison de 6 heures de cours et 2 heures d'exercices, l'autre suivi par les ingénieurs mécaniciens.

Examens : Pour juger des progrès des étudiants, il y a au moins une fois par semestre des interrogations où sont seuls admis les élèves réguliers. Les élèves réguliers n'ayant pas pris part à ces interrogations peuvent demander à subir une interrogation ultérieure, au cas où ils ont suivi les cours. Ces interrogations ne peuvent se recommencer qu'une fois.

A la 1[re] épreuve qui porte sur 4 semestres, sont seuls admis les étudiants qui prouvent avoir été élèves réguliers pendant 4 semestres et avoir obtenu la note « satisfaisant » dans les interrogations antérieures.

Cette épreuve ne peut se recommencer que 2 fois.

Cette réglementation sévère des interrogations semestrielles et des examens demande un grand travail aux professeurs, mais elle est très avantagense pour l'élève, elle l'oblige à une étude continue, l'amène à se rendre compte de ses connaissances et facilite la préparation pour les épreuves plus compliquées et plus générales.

L'enseignement se partage en cours et exercices.

Les étudiants ont à leur disposition : livres, tables, machine à calculer, collections de modèles, instruments de mesure, toutes les ressources accumulées autour des cours de mathématiques, de descriptive, de géodésie et de mécanique.

Enseignement professionnel

Der mathematische Unterricht an den höheren Gewerbeschulen und Gewerblichen Fachschulen [1], von Daniel Arany und Aladur Banhegyi. — En Hongrie il y a 2 espèces d'établissements d'instruction professionnelle : les écoles professionnelles inférieures et les écoles professionnelles supérieures. Vis-à-vis de l'Ecole Polytechnique, elles représentent uns formation technique moyenne, elles préparent plutôt le personnel technique subalterne des grandes usines. La différence entre les 2 espèces d'Ecoles est la même que celle qui existe entre la « Bürgerschule » et la « Mittelschule ».

En fait, les écoles professionnelles supérieures permettent de prétendre à une situation sociale meilleure et leurs diplômés jouissent des droits des « Einjährig » comme ceux des Gymnases.

Au point de vue historique, les écoles supérieures sont les plus anciennes. La première fut la « Königliche Josefs-Gewerbeschule » fondée à Pest en 1846 et maintenant élevée au rang d'Université ; après vint celle de Kassa en 1872, avec une section pour les machines, puis celle de Budapest en 1879 avec 4 sections, dont une 5[me] section forma en 1898 une école indépendante, enfin en 1908 celle de Szeged : soient 4 écoles supérieures avec 8 sections. Les écoles professionnelles inférieures sont d'origine récente, elles datent de 1892 et sont actuellement au nombre de 21. Elles ressortissent au ministère du commerce. Pour être complet, il faut encore signaler la « Frauengewerbeschule » et la « Kunstgewerbeschule ».

Pour être admis dans une école supérieure, il faut être âgé de 15 ans, avoir le certificat de la 4[me] classe d'une école moyenne et avoir fait une année de pratique dans la profession choisie ; pour l'école inférieure, aucune capacité technique n'est exigée, il faut avoir 12 ans et le certificat de 6[me] classe d'école primaire.

D'après la loi, celui qui a achevé les études de l'une quelconque des 2 espèces d'écoles a le droit d'entrer comme ouvrier d'élite et après 2 ans d'apprentissage d'exercer sa profession d'une manière indépendante.

Les élèves des écoles supérieures entrent plutôt comme employés techniques (dessinateurs), ceux des écoles inférieures s'emploient plutôt dans les ateliers (contremaîtres) et les industriels sont heureux de les occuper.

---

[1] 1 fasc. de 15 pages. Imprimerie Hungaria, Budapest.

Il n'y a pas d'examen au sens ordinaire du mot, et avec raison. Les professeurs jugent les progrès des élèves pendant les heures de revision hebdomadaires et à l'occasion des répétitions générales qui ont lieu à la fin de chaque semestre et durent un mois.

Le certificat de sortie n'est autre chose qu'une synthèse des notes semestrielles obtenues dans les différentes branches. Il n'y a pas de diplôme spécial exigé des professeurs. Pour les cours techniques, le diplôme d'ingénieur est nécessaire, pour d'autres le diplôme de professeur d'école moyenne.

La répartition des cours de mathématiques n'est pas la même dans les différentes écoles supérieures ; celles de Kassa et de Szeged donnent à ce cours une extension particulière, toutes accordent à la géométrie descriptive une grande importance. Le programme comprend : l'algèbre jusqu'aux équations du 2me degré à plusieurs inconnues et solutions approchées des équations de degré supérieur, la géométrie plane et solide, la trigonométrie plane, la descriptive. Quant à la méthode d'enseignement, les heures sont partagées en heures de cours et heures de revision ; dans la 1re, le professeur expose, dans la 2me il s'assure si les élèves se sont assimilés la matière. Les exercices relatifs aux connaissances théoriques sont réservés à des heures spécialement dénommées « heures de répétition mathématique » pendant lesquelles le professeur du cours technique principal de la section fait résoudre des exercices choisis directement dans la pratique industrielle de la branche de la section.

Dans toutes les écoles inférieures, les cours de mathématiques sont au contraire fixés d'une manière uniforme par un décret de 1908, avec cette restriction que dans les sections textiles, le cours d'arithmétique de 2me année comprend les cours de 2me et 3me des autres sections, et qu'en 1re année il n'est accordé à la descriptive et la géométrie que 3 heures, au lieu de 6 dans les autres sections.

Le rapport termine par le programme de calcul dans les écoles de fine mécanique et d'horlogerie, programme remarquable par l'adaptation appropriée des matières du cours aux exigences de la pratique.

Remarque générale. — Ces 5 rapports publiés jusqu'ici par la Sous-Commission hongroise donnent une idée exacte et complète de l'organisation hongroise au point de vue de la préparation des membres du corps enseignant, depuis l'école primaire jusqu'à l'université.

Ils prouvent que la formation didactique des maîtres : instituteurs, professeurs d'école normale, d'école moyenne inférieure, de gymnase, d'école réale, est faite d'une manière complète, que l'esprit scientifique est fortement imprégné des tendances modernes et que les méthodes rationnelles et fécondes font l'objet constant des recherches de maîtres avertis.

La Hongrie est certes en avance sur beaucoup d'autres pays.

Jean Renard (Liège).

ITALIE

Ecoles et Instituts techniques.

L'insegnamento della Matematica nelle scuole e negli istituti tecnici. Relazione di G. Scorza prof. nel. R. istituto technico di Palermo.

1. Historique. — Bien que quelques provinces aient possédé avant 1850

des écoles techniques ou spéciales, les origines de l'enseignement technique actuel sont contemporaines du « Risorgimento » national.

La loi Casati de 1859 définit le but de cet enseignement qui est de donner la culture générale et spéciale nécessaire aux jeunes gens qui se destinent à certains services publics, au commerce, à l'industrie, à l'agronomie, etc.

L'enseignement des 3 premières années doit porter sur : la langue italienne, la langue française, *l'arithmétique*, la comptabilité, les *éléments d'algèbre et de géométrie*, le dessin, la calligraphie, la géographie, l'histoire, les éléments d'histoire naturelle, de *physique*, de chimie.

Pour les 3 dernières années la loi prévoit : la littérature italienne, les langues anglaise et allemande, droit administratif et commercial, économie politique, marchandises, *arithmétique sociale*, chimie, *physique*, *mécanique élémentaire*, *algèbre*, *géométrie plane et stéréométrie*, *trigonométrie rectiligne*, dessin et *éléments de géométrie descriptive*, agronomie et histoire naturelle.

Les difficultés qui se présentèrent lors de la rédaction du règlement devant expliquer l'application de la loi aboutirent à la création de deux sortes d'organismes : les *écoles* techniques, qui, sans aucune spécialisation devaient donner une culture générale supérieure à l'institution primaire, et les *instituts* techniques subdivisés en 4 sections spécialement professionnelles : Commerce ; Chimie ; Agronomie ; Physique et Mathématiques ; les enseignements de l'italien, de l'histoire et de la géographie étant seuls communs aux 4 sections.

Un décret de 1864 vient modifier l'organisation des instituts, il n'est plus question de sections, mais *d'écoles spéciales* ou *écoles réunies*, et pour satisfaire aux nécessités des différentes régions, leur nombre est porté à 26 (construction, mécanique, métallurgie, gravure, typographie, céramique, tissage, etc., etc.).

Les élèves ne s'inscrivirent pas en nombre suffisant pour faire vivre toutes ces écoles spéciales et en 1865 on n'en trouve plus que 8.

Une réorganisation générale s'imposait, elle fut réalisée par l'ordonnance de 1871. Les instituts sont dès lors considérés comme établissements d'instruction secondaire devant préparer rapidement aux études supérieures. Les sections sont au nombre de 5 (physique et mathématiques ; agronomie ; commerce ; comptabilité ; industrie). Durant les 2 premières années consacrées à la culture générale, l'enseignement est commun à toutes les sections.

La section de physique et mathématique devient le centre de l'institut, elle doit préparer à la 1re année de l'école d'ingénieurs, c'est-à-dire permettre d'éviter 2 ans d'études universitaires, et se voit attribuer un très vaste programme de mathématiques et de sciences naturelles. Les horaires s'élèvent au point d'atteindre 41 heures par semaine.

Cette confusion entre deux choses aussi distinctes que la préparation aux études supérieures et la culture technique spéciale fut l'origine d'une période de désorganisation durant laquelle les réformes partielles se succèdent rapidement.

II. Statistiques, Programmes. — Les écoles techniques sont au nombre de 325, les instituts techniques au nombre de 77.

Les statistiques complètes sur les nombres d'élèves ne sont pas très récentes (1905-1907), elles permettent d'évaluer le nombre des élèves des écoles techniques à 60.000, et celui des instituts techniques à 18.000, fréquentation supérieure à celle des écoles classiques (environ 50.000).

Les études durent 3 ans à l'école technique puis 4 ans à l'Institut, pendant la première année les élèves de toutes les sections sont réunis et choisissent leur direction au commencement de la deuxième année.

Après 4 ans d'école élémentaire on peut obtenir le diplôme de maturité qui ouvre les portes de l'école technique dont la licence donne accès à l'Institut technique.

Programme de mathématiques de l'Ecole technique (type commun).

1re classe (4 heures par semaine). — Numération. Les 4 opérations fondamentales sur les nombres entiers. Divisibilité (critères). Nombres premiers. Plus grand commun diviseur, plus petit commun multiple. Fractions ordinaires et les 4 opérations. Nombres décimaux. Transformations de fractions ordinaires en décimales et inversement (fractions périodiques). Système métrique. Exercices.

2me classe (4 heures par semaine). — *Arithmétique.* Puissances. Racine carrée de nombres entiers, décimaux, fractionnaires. Nombres complexes. Conversions des mesures. Rapports et proportions Règle de trois. Partages proportionnels. Exercices. *Géométrie.* Notions préliminaires. Angles. Perpendiculaires et obliques. Triangle. Parallèles. Parallélogramme. Polygones équivalents et leurs transformations. Théorème de Pythagore. Cercle, sécante et tangente. Angle inscrit, triangle et quadrilatère inscrits et circonscrits. Mesure de segments, angles, triangles, polygones. Problèmes.

3me classe (3 heures par semaine). — *Géométrie.* Segments proportionnels, triangles et polygones semblables. Mesure de la circonférence et du cercle. Mesure des surfaces et volumes des principaux solides Exercices avec application de la règle d'extraction de la racine cubique.

Calcul littéral. Notions préliminaires. Les 4 opérations sur les quantités entières et fractionnaires. Equations et système d'équations du 1er degré.

Programme de la section physico-mathématique de l'Institut technique.

1re classe (6 heures par semaine). — *Arithmétique et Algèbre.* Théorie des 4 opérations sur les nombres entiers Théorème sur la divisibilité, sur les nombres premiers. Plus grand commun diviseur et plus petit commun multiple. Théorie des fractions ordinaires. Réduction des fractions ordinaires en décimales. Calcul littéral et formules algébriques. Nombres négatifs. Carré d'un polynôme, cube d'un binôme, d'un trinôme. Fractions algébriques, exposant nul, exposants négatifs. Equation et système d'équations du 1er degré.

Géométrie. Segments, angles, perpendiculaires, obliques. Egalité des triangles et des polygones. Parallèles. Parallélogrammes. Circonférence, sécante, tangente. Angle inscrit, triangle et quadrilatère inscrits et circonscrits. Polygones réguliers. Théorèmes relatifs aux rectangles et carrés construits sur des sommes et différences de segments. Parallélogrammes et triangles équivalents. Théorème de Pythagore. Proportions. Théorème de Thalès. Division harmonique. Triangles et polygones semblables. Transversales de la circonférence.

2me classe (5 heures par semaine). — *Arithmétique et Algèbre.* Constantes et variables, notions sur les limites. Fractions périodiques et leurs frac-

tions génératrices. Nombres irrationnels et leurs opérations. Racine carrée des entiers et des fractions. Calculs de radicaux, exposants fractionnaires. Equation du 2me degré à une inconnue, discussion. Equations réductibles au 1er et au 2me degré. Rapports, théorie des proportions. Progressions arithmétiques et géométriques. Intérêts simple et composé. Escompte. Annuité. Amortissement. Logarithmes.

Géométrie. Aires du rectangle, parallélogramme, trapèze, de polygones réguliers Rapports des périmètres et des surfaces de polygones semblables. Rapport de la circonférence au diamètre, méthodes de détermination. Mesure de la circonférence, du cercle. Arc, secteur. Droites et plans perpendiculaires, parallèles. Dièdres, trièdres. Prisme, parallélipipède, pyramide, polyèdres, leurs volume. Polyèdres semblables, rapport de leurs volumes. Cylindre, cône, tronc de cône, leurs volumes. Sphère, aire de la zone et de la sphère, volume du secteur et du segment sphériques, de la sphère.

3e *classe* (5 heures par semaine). — *Algèbre.* Inégalités du 1er et du 2me degré. Maximum et minimum. Expressions indéterminées. Fractions continues.

Géométrie. Figures symétriques, semblables, homothétiques.

Eléments de géométrie descriptive. Projection orthogonale. Représentation du point, de la droite, du plan, de solides.

Trigonométrie plane. Les fonctions trigonométriques. Formules d'addition et de soustraction, lignes trigonométriques de l'arc double et du demi-arc. Transformation de somme ou différences en produits. Déterminations directes des fonctions trigonométriques d'arcs particuliers. Tables trigonométriques, calculs. Equations trigonométriques. Relations entre les angles et les côtés d'un triangle. Résolution des triangles. Aire du triangle. Rayons des cercles circonscrits, inscrits et ex-inscrits. Quadrilatère inscriptible. Opérations sur le terrain. Problème de Pothenot.

4me *classe*. (5 heures par semaine). — *Algèbre.* Arrangements, permutations, combinaisons. Puissance d'un binôme. Analyse indéterminée du 1er degré.

Géométrie. Sections coniques. Triangle sphérique. Aire du fuseau, du triangle sphérique et de polygones sphériques Volume de l'onglet, de la pyramide et du segment sphérique. Théorème d'Euler sur les polyèdres convexes. Polyèdres réguliers.

Trigonométrie sphérique. Relation entre 4 éléments, entre 5 et 6 éléments. Résolution de triangles-sphériques.

Dans les sections de commerce et d'agronomie l'enseignement des mathématiques cesse au commencement de la 3me année.

Dans la section d'arpentage, la trigonométrie plane et la géométrie descriptive sont enseignées par les maîtres de topographie, qui ajoutent les sujets suivant au programme de géométrie descriptive : Surfaces sphériques, cylindriques, coniques, plans tangents. Sections planes, développements. Intersections. Coupe des pierres. Ombres.

Dans la section industrielle le programme varie beaucoup d'un Institut à l'autre.

But de l'enseignement des mathématiques dans les écoles et les Instituts techniques. — L'Ecole technique, qui n'a de technique que le nom, est une école de modeste culture générale, qui a en outre la tâche de préparer les élèves à l'Institut technique. Elle doit donner des définitions claires, des

règles utiles et leurs nombreuses applications, elle persuade les élèves de l'exactitude des théorèmes plutôt qu'elle ne les leur démontre.

L'Institut reprend l'éducation mathématique dès les éléments, et doit faire un exposé rationnel et systématique. On a dû y concentrer dans les deux premières classes, et en vue des applications un programme correspondant à celui de tout le lycée, il ne reste pour les deux dernières classes qu'un programme assez restreint qui permet de revenir sur les sujets trop hâtivement examinés dans les premières années.

Pratiquement le programme des 2 premières classes, de l'aveu de nombreux maîtres, ne peut être étudié à fond dans toute son étendue ; assez généralement les théories de la similitude et de l'équivalence en 1re classe, les irrationnels en 2me sont sacrifiés, les maîtres préfèrent les reprendre en 3me année avec les élèves de physique et mathématique.

Fréquemment les maîtres ajoutent au programme de 3me et de 4me quelques chapitres de leur choix : Géométrie du triangle, géométrographie, les dérivées et leur application aux maxima et minima, équations du 3me et du 4me degré, probabilité, déterminants, notions de l'histoire des mathématiques élémentaires.

Le rapporteur exprime le regret que trop souvent les préoccupations excessives de prudence rigoriste entravent les élèves dans le travail personnel de résolution de problèmes, ils en arrivent à voir dans une question assez simple une indéchiffrable énigme. L'utilité de nombreux exercices écrits est par place méconnue.

En comparant les manuels actuellement employés et ceux d'autrefois, on constate que l'enseignement a tenu compte des travaux de critique qui ont cherché à donner aux éléments des mathématiques une organisation logique parfaite, il y a même lieu de regretter quelques exagérations dans cette direction, quelques manuels se sont, de ce fait, amplifiés à l'excès sans que la substance même des matières étudiées en ait bénéficié.

Peut-être qu'en admirant trop les systèmes logiques, rigides, on a perdu de vue la lutte entreprise ailleurs (par Perry, Bourlet, Borel) contre le formalisme, et oublié d'orienter l'enseignement moyen vers l'enseignement supérieur, on a laissé une solution de continuité se créer entre les deux.

Ecoles industrielles, professionnelles et commerciales.

L'insegnamento della matematica nelle scuole industriali, professionali e commerciali. Relazione di G. Lazzeri, professore alla R. Accademia navale di Livorno. — A côté des écoles moyennes, classiques et techniques conformes aux ordonnances du Ministère de l'Instruction Publique, l'Italie doit à l'initiative privée, ou aux autorités locales, de nombreuses écoles professionnelles, industrielles, artistiques, commerciales, etc., dépendant du Ministère de l'Agriculture, de l'Industrie et du Commerce qui sont réparties en 6 catégories.

I. *Ecoles d'Agriculture.* — Il y en a 38 avec 2.000 élèves. L'enseignement des mathématiques y est restreint aux éléments d'arithmétique et de géométrie. Dans 3 d'entre elles qui portent le titre de « supérieure » on trouve la mécanique et la géométrie pratique.

II. *Ecoles des Mines.* — 3 écoles des mines comprenant 70 élèves en font

des chefs mineurs et des experts miniers. On y enseigne l'algèbre, la géométrie élémentaire, la géométrie descriptive, la mécanique.

III. *Ecoles industrielles.* — Parmi les 86 écoles de cette catégorie qui instruisent 18.000 élèves on trouve :

Des écoles d'arts et métiers qui préparent des artisans à des métiers déterminés ;

Des écoles industrielles d'où sortent des chefs d'ateliers mécaniciens, électrotechniciens, ou spécialement destinés à une industrie particulière : soierie, tissage, tannerie, teinturerie, typographie, horlogerie, etc.

Enfin l'école technique ouvrière de Turin qui donne le soir aux artisans les connaissances scientifiques nécessaires dans leur métier.

Le programme de mathématiques y est à peu près conforme à celui de la section d'arpentage de l'Institut technique.

IV. *Ecoles artistiques-industrielles.* — Ces écoles au nombre de 206 avec 22.000 élèves ont pour but de donner aux artisans les notions artistiques utiles dans leur métier, souvent dans des cours du soir, quelques-unes sont spécialement adaptées à une industrie locale : corail, albâtre, etc.

On y enseigne en général les éléments de géométrie plane et de stéréométrie utilisables dans l'enseignement du dessin, quelquefois l'arithmétique pratique et dans les écoles supérieures la théorie des ombres et la perspective élémentaire.

V. *Ecoles de commerce.* — On peut répartir les écoles de commerce en 3 groupes :

1° 34 écoles inférieures avec 6.000 élèves qui préparent le nombreux personnel des maisons de commerce. On n'y étudie en fait de mathématiques que l'arithmétique pratique, la géométrie intuitive et les premières notions d'algèbre.

2° 12 écoles moyennes avec 850 élèves préparent les experts commerciaux, les mathématiques y sont enseignées en général pendant les deux premières des quatre années d'études, et sont le plus souvent destinées à servir de préparation à l'étude des mathématiques financières. Voici, par exemple, le programme de l'Ecole moyenne de Florence.

Ire année : Arithmétique rationnelle, algèbre élémentaire, éléments de géométrie.

IIe année : Progressions arithmétiques et géométriques, logarithmes, Intérêts composés, annuités, amortissements, éléments de calcul des probabilités, rentes, différentes formes d'assurance.

3° 5 écoles supérieures avec 900 élèves reçoivent les licenciés des écoles moyennes de commerce ou du lycée ou de l'institut technique, les diplômes qu'elles décernent sont par force de loi équivalents aux grades universitaires correspondants.

Dans leur programme de mathématiques on trouve la géométrie analytique, l'analyse algébrique et infinitésimale, les mathématiques financières, la science actuarielle inégalement approfondie selon les écoles.

VI. *Ecoles professionnelles féminines.* — Ces écoles au nombre de 29 présentent une très riche diversité, leurs 6.500 élèves deviendront des dessinatrices, tailleuses, cuisinières, infirmières, caissières, télégraphistes, employées postales, etc.. Les mathématiques ne sont représentées que par l'arithmétique pratique et rarement par des notions de géométrie intuitive.

Remarques sur l'Enseignement des mathématiques dans les Écoles industrielles

Sull'insegnamento della matematica nelle scuole industriali. Relazione del Prof. Ciamberlini. — Les programmes de mathématiques dans les écoles industrielles présentent une diversité considérable, on a vu le programme d'une même école subir en quelques années des réductions et des augmentations successives très importantes.

La nécessité de pouvoir suivre tout progrès technique explique une certaine absence de rigidité dans les programmes, mais pas l'espèce de confusion actuelle.

Les efforts du Ministère de l'agriculture, industrie et commerce tendant à introduire quelque stabilité dans ce domaine se heurtent à de grandes difficultés.

Il est presque impossible de juger les méthodes généralement utilisées, à cause de l'absence de toute littérature mathématique spécialement appropriée aux besoins des écoles industrielles.

Il faut que les élèves soient mis rapidement en possession des connaissances mathématiques permettant la résolution de questions d'ordre technique; on doit les leur faire acquérir par des procédés *pratiques*, par exemple enseigner la mesure des solides en leur mettant dans les mains le corps à mesurer et un instrument de mesure.

Il est indispensable de les habituer, dès les premiers exemples qu'on rencontre, à l'idée de *fonction*, puis de faire de nombreuses représentations graphiques de fonctions d'une seule variable à l'occasion de l'étude de phénomènes naturels ; puis en étudiant la trigonométrie.

Une grave question en discussion est encore celle de l'introduction du calcul vectoriel, des éléments de géométrie analytique et de calcul infinitésimal.

Puisque les anciens élèves des écoles industrielles serviront d'intermédiaires entre les ouvriers n'ayant fait qu'un apprentissage pratique et les ingénieurs, il semble que la question mérite une réponse affirmative.

L'absence de manuels est une des grosses lacunes dans ce domaine, il serait nécessaire que le Ministère en encourage la publication.

Académie royale navale de Livourne et Académie royale militaire de Turin

L'insegnamento della matematica nella R. Accademia navale de Livorno e nella R. Accademia militare di Torino. Relazione di G. Lazzeri, professore nella R. Accademia navale di Livorno.

I. Académie navale. — L'Académie fondée en 1881 pour remplacer les anciennes écoles de marine de Naples et de Gênes s'est toujours considérée comme *école professionnelle* où l'étude des mathématiques a pour but de permettre l'étude de l'astronomie, de la balistique, de la thermodynamique et des applications.

Sans s'écarter de la rigueur scientifique, l'enseignement des mathématiques s'est maintenu dans des limites aussi restreintes que possible, comprenant en somme les matières du premier cycle universitaire bisannuel et

la mécanique rationnelle. Durant une *première période* qui a duré jusqu'en 1896 l'académie a reçu des élèves de 15 à 16 ans et comprenait 5 ans d'études :

1re classe : Algèbre (3 heures par semaine) ; *Géométrie plane et stéréométrie* (3 h.) ; Langues, culture générale (11 h.).

2e classe : Compléments d'algèbre (3 h.) ; *Trigonométrie plane et sphérique* (3 h.) ; Culture générale et enseignement professionnel (14 h.).

3e classe : Compléments d'algèbre (3 h.) ; *Géométrie analytique* (3 h.) ; *Géométrie descriptive* (3 h.) ; total des autres branches (17 h.).

4e classe : Calcul infinitésimal (3 h.) ; total des autres branches (20 h.).

5e classe : Mécanique rationnelle (3 h.) ; Astronomie, physique, chimie, enseignement professionnel (29 h.).

C'est à l'Académie navale, durant cette première période que fut introduite pour la première fois en Italie la méthode de « Fusion » entre la géométrie plane et la stéréométrie, suivant le texte des professeurs Lazzeri et Bassani.

C'est en entrant dans la *deuxième période* que l'Académie à pris le caractère d'école supérieure. Elle n'a plus admis que des licenciés du lycée ou de la section physico-mathématique de l'Institut technique, et après un examen de concours.

L'enseignement est réparti en 3 années :

1re classe : Compléments d'algèbre (4 h. par semaine) ; *Calcul infinitésimal* (4 h.) ; *Géométrie analytique* (3 h.) ; *Trigonométrie* (2 h.) ; Langues, cosmographie, navigation (11 h.).

2e classe : Equations différentielles (3 h.) ; *Mécanique rationnelle* (3 h.) ; *Géométrie descriptive* (2 h.) ; Culture générale et enseignement professionnel (15 h.).

3e classe : Mécanique appliquée (1 h.) ; *Résistance des matériaux* (1 h.) ; *Enseignement professionnel* (19 h.).

On constate dans ces nouveaux programmes un effort pour concentrer l'étude des mathématiques dans les deux premières années afin que la troisième reste consacrée aux applications.

Chaque année les *examens* ont lieu en juin ou juillet devant des commissions de cinq membres, les candidats qui n'échouent pas à plus de 4 branches peuvent se présenter en novembre à une session de « réparation ». Ceux qui échouent à la fin de la première année sont renvoyés, ceux qui échouent à la fin de la deuxième ou de la troisième recommencent l'année.

L'enseignement est donné suivant des manuels ou des textes composés par les maitres et lithographiés à l'Académie.

La plupart des examens ayant lieu par écrit, les élèves y sont habitués par de nombreux exercices écrits, ils reçoivent lithographié l'énoncé des problèmes qu'ils doivent résoudre par leurs propres moyens, sous bonne surveillance. Cette méthode a donné de bons résultats.

Au moment d'imprimer ce rapport, le professeur Lazzeri a eu connaissance d'un projet de réorganisation, mais il présente, pour ce qui est des programmes de mathématiques, tant de défauts qu'on ne peut le considérer comme définitif, mieux vaut n'en point parler.

II. Académie militaire. — L'Académie militaire reçoit des élèves âgés en moyenne de 18 ans, licenciés de lycée ou d'institut technique, après un examen d'admission.

L'enseignement, de caractère universitaire, est réparti en 3 ans, il prépare

les sous-lieutenants d'artillerie et de génie à suivre les cours de 2 ans des écoles d'application d'artillerie et de génie.

Depuis 1900 environ, le programme de mathématique est ainsi réparti :

1er cours : Analyse (algèbre, principes de géométrie analytique, calcul différentiel) : 75 leçons d'enseignement et 30 leçons d'interrogation. *Géométrie descriptive* : 50 leçons d'enseignement, 30 leçons d'interrogation.

2e cours. Calcul intégral : 90 leçons d'enseignement. 30 leçons d'interrogation. *Géométrie analytique et projective :* 90 leçons d'enseignement, 30 leçons d'interrogation.

3e cours. Mécanique rationnelle : 90 leçons d'enseignement, 30 leçons d'interrogation. *Géométrie descriptive :* 60 leçons. Les leçons durent 70 minutes.

Les promotions ont lieu à la suite d'examens sur toutes les matières enseignées.

Chaque élève est interrogé au moins 3 fois par an dans chaque branche.

On utilise des manuels ou des autographies préparées par les maîtres.

E. CHATELAIN (La Chaux-de-Fonds).

SUISSE

Enseignement technique moyen.

L'enseignement des mathématiques dans les Ecoles techniques moyennes suisses, par le Dr L. CRELIER. Georg & Co, éditeurs, Bâle et Genève. 1912. 112 p. in-8o. — Ce travail est basé sur les réponses au questionnaire adressé par la sous-commission suisse aux écoles techniques moyennes et à leurs professeurs. Il montre que, malgré la diversité d'organisation de ces écoles, il existe « un enseignement technique suisse nettement caractérisé », ayant des méthodes et des aspirations qui lui sont propres et en général fort différentes de celles des pays voisins.

Le rapport de M. Crelier se subdivise tout naturellement suivant le but des écoles envisagées. C'est ainsi que nous voyons le chapitre I traiter de *l'enseignement technique élémentaire :* Cours professionnels pour apprentis et ouvriers de l'industrie privée et écoles d'apprentissage proprement dites, destinées à former de toutes pièces les ouvriers du bâtiment, de la mécanique, de l'horlogerie et de l'art industriel, — tandis que le chapitre II s'occupe de *l'enseignement technique moyen.* représenté par les « technicums » et les sections supérieures des écoles de mécanique et d'horlogerie.

Chacun de ces chapitres contient des indications très abondantes sur l'organisation et les programmes généraux des établissements visés. Tous deux se terminent par une étude plus détaillée de la partie mathématique de l'enseignement, d'où il ressort que programmes et méthodes se résument à « arriver à un résultat utile et pratique par les moyens les plus intuitifs et les plus simples ». Un tableau (p. 70 à 72) indique la répartition horaire des différents chapitres des mathématiques dans toutes les écoles techniques moyennes.

En passant l'auteur relève, très justement selon nous, combien le professeur de mathématiques, est à nombre d'heures égal plus chargé de travail que son collègue enseignant les branches d'application ; ce dernier a toujours un assez grand nombre d'heures réservées aux travaux graphiques,

qui certes, n'exigent pas la même somme d'efforts continus que les cours de mathématiques.

Le chapitre III contient en trente pages environ les remarques relatives aux différentes parties des mathématiques, groupées en 18 paragraphes : Algèbre, géométrie, mécanique, résistance des matériaux, comptabilité, etc., etc. L'auteur constate entre autres le fait que les jeunes gens ne savent en général pas bien calculer, ni bien disposer leurs calculs quand ils entrent à l'école technique moyenne. Il donne un plan normal de géométrie qui, moins formaliste et plus pratique que celui de Legendre, lui paraît propre à atteindre le but de l'enseignement de la géométrie : Saisir les formes de l'espace et les représenter avec précision.

Il est impossible, dans le cadre restreint de ce bref compte rendu, de reproduire toutes les observations judicieuses de l'auteur sur les diverses parties du programme mathématique. Nous constaterons seulement que partout l'auteur se révèle comme un pédagogue expérimenté, ne s'exagérant pas la place que son propre enseignement occupe dans l'organisation générale de l'Ecole, mais sachant réclamer avec de bons arguments que cette place soit celle à laquelle les mathématiques ont droit. Signalons à ce propos les paragraphes : Les mathématiques commme branche d'examen (p. 97), But de l'enseignement mathématique (p. 99), ainsi que ceux du chapitre VI (Observations générales), Préparation des professeurs (p. 102), Ingénieurs et mathématiciens (p. 109), qui sont à lire et à méditer par tous ceux que les écoles techniques intéressent, autorités, parents et professeurs.

E. Steinmann (Genève).

Enseignement technique supérieur.

I. *Ecole polytechnique fédérale de Zurich.*

Der mathematische Unterricht an der Eidgenössischen Technischen Hochschulen, par M. Grossmann. — Cette intéressante brochure de 52 pages jette une lumière très vive sur l'enseignement des mathématiques à l'Ecole polytechnique fédérale, dans ses rapports avec l'organisation générale et actuelle de cet important établissement. On ne saurait la résumer, car, rédigée par son auteur d'une manière claire, courte et concise, on ne peut en moins de mots que lui, donner les renseignements précieux, les indications utiles qu'elle renferme, pour ainsi dire, à chaque ligne.

Pour être admis à l'Ecole polytechnique fédérale, il faut être âgé de 18 ans révolus et être porteur du certificat de maturité (baccalauréat) décerné par un certain nombre de gymnases suisses, liés à l'école par des conventions spéciales, ou porteur d'un titre jugé équivalent.

La moitié environ des élèves entre cependant à l'Ecole, à la suite d'un examen d'admission portant, pour les branches mathématiques, sur les éléments de l'arithmétique, de l'algèbre, de la géométrie plane et de l'espace, la trigonométrie, la géométrie analytique à deux et trois dimensions. En géométrie descriptive, on exige une connaissance suffisante des projections cotées et orthogonales. Des connaissances élémentaires de physique sont aussi demandées. D'ailleurs, comme le fait remarquer M. Grossmann, on donne plus volontiers la préférence aux candidats faisant preuve d'initiative et de sûreté dans l'exécution de problèmes élémentaires, qu'à ceux qui en sont incapables, malgré leurs connaissances en apparence plus étendues.

Le nouveau règlement de l'Ecole, en vigueur depuis l'année scolaire 1909-1910, laisse aux étudiants une grande liberté dans l'organisation de leurs études. Ils doivent toutefois, dans le choix de leurs cours, tenir compte des *plans normaux d'études* établis pour leurs divisions respectives. Pour que les cours ne soient pas suivis par des étudiants qui ne pourraient en faire leur profit, ceux-ci doivent, sous certaines formes prescrites, prouver qu'ils ont les aptitudes nécessaires. Le régime actuel est donc, d'une manière un peu mitigée, un régime de liberté, et, seul, l'avenir pourra dire si la nouvelle organisation vaut mieux que l'ancienne, où tout était, en quelque sorte, fixé d'avance par un règlement d'une assez grande rigidité.

L'enseignement des mathématiques, dans les différentes subdivisions de l'Ecole, varie avec chacune d'elles.

1. Dans les divisions *militaire* et de *pharmacie*, les mathématiques ne sont pas enseignées.

2. Dans celle d'*agriculture*, les mathématiques élémentaires entrent seules en ligne de compte. Cela est indispensable, la plupart des élèves de cette section y étant admis sans le diplôme de maturité.

3. Dans les divisions d'*architecture*, de *chimie*, dans l'Ecole *forestière* et l'Ecole *normale* pour les futurs maîtres de *sciences naturelles*, les mathématiques se trouvent représentées dans les programmes respectifs, d'une manière conforme à leur importance relative. Toutefois elles n'occupent encore dans aucun de ceux-ci la place prépondérante.

4. Dans la division du *génie civil* (pour les ingénieurs proprement dits, les topographes et les agronomes), et dans celle de *mécanique* et *électricité*, l'enseignement des mathématiques est considéré comme devant former la base même des études techniques qui suivront. Pendant les deux premières années de leurs études, les élèves de ces divisions, sans négliger la branche technique spéciale à laquelle ils se vouent, doivent s'occuper avant tout de mathématiques. Les cours qu'ils suivent durent pour la plupart une année et portent sur le calcul différentiel et intégral, la géométrie analytique, la géométrie descriptive, la mécanique et la physique. Ces différents cours ne sont pas suivis par les élèves de chacune des divisions pendant le même nombre de semestres. Ce dernier varie avec l'importance de la branche pour la division considérée.

5. Dans l'Ecole normale de *mathématiques* et de *physique*, les mathématiques sont là pour elles-mêmes et non plus comme science auxiliaire. On exige du futur maître de mathématiques ou de physique une étude très approfondie des sciences mathématiques, et cela quelle que soit la direction spéciale à laquelle il se vouera.

Il n'est point inutile de remarquer que les différentes divisions de l'Ecole n'ont pas des cours de mathématiques indépendants. Les cours de mathématiques sont, en général, organisés de façon que les élèves de plusieurs subdivisions puissent les suivre simultanément.

Les élèves des divisions du génie civil, de mécanique et de l'école normale de mathématiques et physique, ont, par exemple, en commun, le cours de calcul différentiel et intégral, qui, comme on sait, se donne parallèlement en français et en allemand.

Chaque division toutefois possède une existence propre, l'école normale de mathématiques et physique aussi bien que les autres. Des cours de mathématiques supérieures se donnent dans cette division. Ils sont d'une importance égale, pour le moins à ceux des meilleures universités. On s'en

rendra compte, en étudiant, dans le rapport de M. Grossmann l'évolution successive de cette division. Ce dernier fait entendre, à propos de celle-ci, deux desiderata importants Il voudrait qu'une nouvelle chaire de mathématiques supérieures y fût établie, et que, d'un autre côté, on donnât aux étudiants l'occasion d'acquérir d'une manière effective des notions un peu complètes sur la pratique de l'enseignement. Cela serait réalisable si l'on faisait donner à l'étudiant des leçons à de véritables classes, devant un professeur expérimenté.

Un enseignement mathématique qui ne serait accompagné d'aucun exercice pratique et d'aucune occasion pour l'étudiant de revoir d'un manière un peu approfondie, ce qu'il entend dans ses cours, serait bien incomplet. L'Ecole polytechnique pourvoit à la chose au moyen d'*exercices* et de *répétitions* que le professeur dirige en collaboration avec ses assistants. Pendant les exercices, l'étudiant résout personnellement les problèmes numériques ou graphiques qui lui sont posés, tandis que les répétitions organisées, en général, par petits groupes, permettent au professeur ou à ses assistants de revenir avec les élèves sur les questions délicates et peut-être un peu difficiles rencontrées dans le cours.

Les *diplômes* décernés par les différentes divisions de l'Ecole polytechnique, sans être des diplômes d'état, en ont, à proprement parler, toute l'importance. Le *diplôme de l'école normale de mathématiques et physique* qu'on doit considérer comme un certificat d'aptitude à l'enseignement des mathématiques ou de la physique, jouit, comme tous les autres diplômes que délivre l'école, d'une réputation justement méritée.

L'Ecole polytechnique fédérale, depuis 1908, décerne aussi les *grades de docteur*, ès sciences techniques, ès sciences naturelles, ès sciences mathématiques.

Le dernier chapitre du rapport de M. Grossmann est, toujours au point de vue des mathématiques, consacré à l'étude des programmes et à l'examen des méthodes d'enseignement de l'Ecole polytechnique et des institutions diverses, des gymnases en particulier, qui y conduisent. Les élèves de l'école ont une grande diversité d'origine. La préparation dans l'ensemble, manque, par conséquent, de l'homogénéité suffisante et ne laisse pas de causer à ceux qui enseignent d'assez sérieuses difficultés. M. Grossmann indique, dans les grandes lignes, en quoi doit consister la préparation mathématique pour l'entrée à l'école polytechnique. Il montre aussi, et, c'est sur ce point que s'achèvera ce trop court résumé, que l'enseignement des mathématiques à l'Ecole polytechnique fédérale semble satisfaire maintenant, au désir exprimé par M. Stodola, lors du premier congrès international de mathématiques. Les cours généraux, selon ce dernier, doivent être organisés pour la majorité, mais une minorité d'élite doit, en même temps, avoir la possibilité de se développer autant et aussi loin qu'elle veut. L'opportunité des différentes réformes, faites au moment de la réorganisation, se manifestera, sans doute, dans un avenir peu lointain.

II. — *Ecole d'ingénieurs de Lausanne.*

L'enseignement des mathématiques à l'Ecole d'ingénieurs de Lausanne, par M. Lacombe. — Pour ce rapport, comme pour le précédent de M. Grossmann, on doit avant tout remarquer qu'il est impossible de dire en moins

de mots que son auteur, les excellentes choses qui y sont contenues. Par la lecture du travail de M. Lacombe, on se rend immédiatement compte de l'importance de l'Ecole d'ingénieurs de Lausanne et de son organisation remarquable, distincte tout à fait de celle de l'Ecole polytechnique fédérale.

Cette Ecole, section de la Faculté des Sciences de l'Université de Lausanne, jouit d'une certaine autonomie. Elle possède un directeur permanent assisté d'un secrétaire et ses professeurs réunis constituent le Conseil de l'Ecole. Elle forme des ingénieurs civils, ingénieurs mécaniciens, ingénieurs électriciens et des ingénieurs chimistes.

L'enseignement à l'Ecole de Lausanne est caractérisé par la généralisation la plus grande possible des études. La division en sections : Ingénieurs civils, mécanique et électricité, ne commence qu'en deuxième année et même la spécialisation dans les cours est-elle peu considérable.

Pour être admis à l'Ecole, il faut être porteur d'un certificat de maturité, c'est-à-dire pouvoir être immatriculé à l'Université et, de plus, posséder les connaissances mathématiques suffisantes. Le cas échéant, suivant les titres du candidat, celui-ci peut être appelé à subir un examen sur tout ou partie des matières du *programme d'admission*. Les connaissances mathématiques demandées sont sensiblement les mêmes que pour l'entrée à l'Ecole polytechnique fédérale.

A l'Ecole est annexé un cours préparatoire d'une durée de deux semestres, permettant aux candidats porteurs d'une maturité insuffisante au point de vue scientifique, de compléter leurs connaissances. Les leçons portent sur l'algèbre, la géométrie, la trigonométrie, la géométrie analytique, la géométrie descriptive, la physique et la mécanique, conformément au programme d'admission, avec de nombreux exercices à l'appui ; en outre, on donne des leçons de français, chimie et dessin.

Durant leurs études et à la fin de chaque semestre, ces candidats sont soumis à des examens et, si les résultats sont satisfaisants, ils sont admis de droit à l'Ecole d'ingénieurs.

Tout en faisant partie de l'Université, l'Ecole ne possède pas la liberté des études. Les élèves sont soumis à ce que l'on appelle le *régime intérieur*.

Celui-ci consiste en un ensemble de travaux graphiques, d'exercices pratiques, d'opérations sur le terrain, de répétitions et d'interrogations, rationnellement combiné avec les cours, les exercices de calcul et les travaux de laboratoire. L'admission au régime intérieur ne peut avoir lieu que dans l'une des deux premières années d'études. La fréquentation des cours et l'exécution des travaux graphiques sont obligatoires. Les notes obtenues dans les interrogations d'une année fournissent, par leur combinaison avec celles des exercices et des travaux graphiques, la moyenne générale de l'année, à laquelle est subordonnée la promotion de l'étudiant.

La base de l'enseignement technique est formée par les mathématiques, soit : la géométrie analytique, le calcul différentiel et intégral, les équations différentielles, la géométrie descriptive et projective. Des cours relatifs à ces diverses branches sont suivis en commun par les ingénieurs civils, mécaniciens et électriciens. Les programmes sont sensiblement les mêmes qu'à l'Ecole polytechnique fédérale. Les ingénieurs chimistes ont un cours spécial de calcul infinitésimal.

Tous ces cours sont accompagnés d'*exercices* appropriés et choisis avec le désir d'arriver à former des techniciens capables et avisés. Comme le dit M. Lacombe, le cours doit être théorique, c'est-à-dire rigoureux, mathé-

matique, par contre on doit chercher à rendre les exercices aussi pratiques que possible.

Les étudiants sont soumis à des examens partiels et semestriels. Les *examens partiels* ont lieu par petits groupes de 8 à 10 élèves, pendant les études et sont annoncés à l'avance ; par contre les *examens semestriels* sont subis, comme leur nom l'indique, à la fin de chaque semestre. Des notes sont attribuées par les professeurs sur le vu du résultat de ces examens. Ces notes, ainsi que celles obtenues pour les exercices et les travaux graphiques décident de la promotion du candidat.

L'Ecole d'ingénieurs de Lausanne, à côté des *diplômes professionnels* qu'elle confère (diplômes d'ingénieur civil, d'ingénieur mécanicien, d'ingénieur électricien, d'ingénieur chimiste), bien que faisant partie de l'Université, ne délivre pas le *grade de docteur ès sciences techniques*. M. Lacombe le regrette et exprime le vœu que l'Ecole d'ingénieurs de Lausanne, lors d'une revision de la loi sur l'enseignement supérieur, obtienne bientôt le droit de décerner des diplômes de docteur ès sciences techniques.

Le dernier chapitre du rapport de M. Lacombe est consacré à l'étude des conditions d'enseignement des mathématiques dans les gymnases et les écoles techniques supérieures. son auteur conclut, sous une forme un peu succincte, en disant que, dans ces dernières, le professeur de mathématiques forge un instrument dont il doit apprendre aux étudiants à se servir, non seulement dans son domaine, les mathématiques, mais encore dans le leur, les mathématiques appliquées.

G. Dumas (Zurich).

Cours universitaires.

Semestre d'hiver 1912-1913 (suite).

ALLEMAGNE

Berlin; *Universität.* — Frobenius : Algebra, 4 ; Mathem. Seminar, 2. — Schwarz : Differentialrechnung, 4 ; Uebgn., 2 ; Ellipt. Funktionen, 4 ; Elementargeometr. Behandlung einiger Aufgaben der Maximums u. Minimums, 2 ; Mathem. Colloquien ; mathem. Seminar, 2. — Schottky : Allg. Theorie der analyt. Funktionen, 4 ; Potentialtheorie, 4 ; Mathem. Seminar, 2. — Cohn : Einf. in die Himmelmechanik, 4 ; Seminar f. wissenschaftl. Rechnen, 2. — Færster : Geschichte der mittelalterlichen Astronomie, 2 ; Grundlagen der astron. Messkunst. — Helmert : Schwerkraft u. Erdgestalt, 1 ; Kartenprojektionen, 1. — Plank : Allg. Mechanik, 4 ; Uebgn., 1. — Struve : Sphär. Astronomie, 3 ; prakt. Uebgn. — Lehmann-Filhés : Analyt. Geometrie, 4. — von Borkiewicz : allg. Theorie der Statistik, 2 ; Versicherungs-Rechnung, 2 ; stat. Uebgn., 2. — Hettner : Bestimmte Integrale, 2. — Knoblauch : Mathem. Probleme, 4 ; Raumkurven u. Flächen, 4 ; Math. Uebgn., 1. — Byck : Mathem. Behandlung der Naturwissenschaften, 1. — Knopp : Zahlentheorie, 4 ; höh. Funktionentheorie, 4 ; unendl. Reihen, 1. — Marcuse : Geogr. Ortsbestimmung ; allg. Himmelskunde. — Weinstein : Mechanik der Flüssigkeiten u. der elastischen Körper, 3. — Witt : Seku-

lärstörungen nach Gauss, 2; Graph. Rechnen, 1. — Groll : Kartenentwurfslehre, 2; Uebgn., 2.

Bonn. — Study : Diff.- und Integralrechnung II, 4; Sem.; Kolloquium über Invariantentheorie, 1. — London : Darst. Geometrie II, 2; Uebgn. dazu; Analyt. Mechanik, 4. — Hausdorff : Analyt. Geometrie der Ebene und des Raumes, 4; Uebgn. dazu, 1; Lineare Differentialgleichungen, 2. — Müller : Einführung in die Algebra und Determinantheorie, 3; Uebgn. zur Differential- und Integralrechnung, 1. — Küstner : Theorie der Bahnbestimmung der Kometen und Planeten, 3; Topographie des Sonnensystems, 1; Prakt. Uebgn. — Mönnichmeyer : Methode der kleinsten Quadrate, 2; Prakt. Uebgn. — Bucherer : Elemente der Vektoranalysis, 2.

Giessen. — Schlesinger : Diff.- und Integralrechnung, 4; Uebgn. 1; Zahlentheorie, 2; Funktionentheorie, 3 (in Vertretung von Netto); Seminar, 1. — Grassmann : Projektive Geometrie, analytisch, 4; Darst. Geometrie II, 5; Seminar, 1. Fromme : Elektromagnetische Lichttheorie, 2; Uebgn., 1; Mathematische Geographie und Elemente der Astronomie; 2.

Gœttingen. — Voigt : Elektronendynamik, 4; Physikalisches Praktikum, 4; Vektoranalysis, 2; Wissenschaftliche Untersuchungen. — Klein : Entwicklung der Mathematik im. 19. Jahrhundert, 4; Seminar, 2. — Hilbert : Theorie der partiellen Differentialgleichungen, 2; Mathematische Grundlagen der Physik, 2; Axiome der Physik i. mathematisch-physikalischen Seminar, 2. — Runge : Numerisches Rechnen mit Uebgn., 6; Ausgew. Kapitel der Mechanik, 2. — Wiechert : Vermessungswesen, theoretischer Teil, 4; Potentialtheorie, 4; Geonomisches Seminar, 1; Geophysikalisches Praktikum. — Prandtl : Wiss. Grundlagen der Luftfahrt, 3; Mechanikpraktikum I, 3; Mechanikpraktikum II, 3; Sem. (m. Prof. Runge) : Mechanik, 2; Kolloquium üb. Fragen d. Luftahrt, 1. — Landau : Unendl. Reihen, 4; Seminar, 1. — Hartmann : Photometrie der Gestirne, 1 : Astronom. u. astrophysikalisches Praktikum, 3; astron. u. astrophysik. Arbeiten, Astronom. Sem. (m. Prof. Ambronn), 2 g. — Ambronn : Theorie u. Gebrauch d. astron. Messinstrumente, 2; Einzelne Kapitel aus d. Geschichte d. Astronomie, 1; Astron. Uebgn. f. Anfänger, 5; Leitung astronom. Arbeiten f. Fortgeschr. tgl.; Astron. Sem. (m. Prof. Hartmann), 2. — Bernstein : Versicherungsrechnung, 2; Mathem. Statistik, 3; Sem. Wahrscheinlichkeits- u. Versicherungsrechnung, 2. — Nachtweh : Einführung in die Technologie 1 $^1/_2$. — Tœplitz : Differential- u. Integralrechnung II, 4; Uebgn. dazu, 3; Invariantentheorie, 2. — Born : Energetik, 2; Uebgn. z. Mechanik (m. v. Kármán), 2. — Weyl : Funktionentheorie, 4; Uebgn. dazu (m. Courant), 2; Integralgleichungen, 3. — v. Karman : Mechanik I, 4; Uebgn. in Mechanik I (m. Born), 2. — Schimmack : Mathem. Didaktik, 2. — v. Sanden : Darstellende Geometrie, 4; Uebgn. zur darstellenden Geometrie, 4. — Rümelin : Einführung i. d. mathem. Behandlung d. Naturwissenschaften m. Uebgn., 3. — Courant : Determinanten, 4; Uebgn. zur Funktionentheorie, 2; Determinanten u. Anwendung auf Geometrie, 4.

Greifswald. — Engel : Differentialgeometrie I, 4; Part. Differentialgleichungen und Pfaffsches Problem, 4; Transformationsgruppen, 2; Seminar. — Vahlen : Algebra, 4; Statik, insbesondere graphisch, 2; Uebgn. dazu, 2. — Blaschke : Analyt. Geometrie, mit Uebgn., 5; Variationsrechnung, 2. — Mie : Relativitätstheorie, 2; Besprechungen neuerer physikalischer Arbeiten, 2.

Halle a. S. — Wangerin : Analyt. Geometrie des Raumes, 3; Die part. Differentialgleichungen der mathem. Physik, 4; Ausgewählte Kapitel der Flächentheorie, 1; Seminar. — Gutzmer : Integralrechnung mit Uebgn, 4; Darst. Geometrie mit Uebgn, 4; Seminar. — Eberhard : Algebraische Gleichungen, 4; Kolloquium. — Dorn : Theorie der Elastizität, 2. — Buchholz : Grundlagen der theoretischen Astronomie, 2; Theorie der speziellen Störungen, 2. — Wigand : Probleme der Luftfard und Meteorologie.

Jena. — Thomae : Gewöhnliche Differentialgleichungen, 5. — Haussner : Raumkurven und krumme Flächen, 4; Diff.- und Integralrechnung II mit Uebgn., 5; Analyt. Geometrie des Raumes, 4; Proseminar, 2; Seminar, 1. — Frege : Analyt. Mechanik, 4; Begriffsschrift, 1. — Winkelmann : Darstellende Geometrie, 4 mit Uebgn., 2; Uebgn. zur Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, 1. — Thaer : Einführung in die höhere Mathematik, 2. — Knopf : Methode der kleinsten Quadrate, 3; Mathem. Geographie, 2. — Straubel : Abbildungstheorie, 1.

Könisberg i. Pr. — Meyer : Integralrechnung, 4 mit Uebgn., 1; Einleitung in die Algebra, 4; Seminar. — Faber : Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen, 4, Ausgewählte Kapitel der Geophysik, 2; Seminar. — Kaluza : Analyt. Geometrie des Raumes, 4; Uebgn. dazu, 1; Warscheinlichkeitsrechung, 2. — Bieberbach : Ausgewählte Kapitel der höheren Mathematik, 3; Ausgewählte Kapitel der Geophysik, 2; Zwanglose Vorträge über die Probleme der modernen mathematischen Forschung; Seminar. — Battermann : Sphärische Astronomie, 2; Methode der kleinsten Quadrate, mit Rücksicht auf die Praxis, 1.

Leipzig. — Hölder : Mechanik, 5; Grundlagen der Arithmetik, 2; Seminar. — Rohn : Anwendung der Differentialrechnung auf Raumkurven und Flächen, 4; Uebgn. dazu, 1; Darstellende Geometrie II, 2; Uebgn. dazu, 2. — Herglotz : Diff.- und Integralrechnung, 5; Variationsrechnung, 2; Seminar. — Koebe : Analyt. Geometrie des Raumes und Determinanten, 4; Uebgn. hierzu, 1; Funktionentheorie II, 2; Ueber das Raumproblem, 1. — König : Einführung in die Zahlentheorie II, 2; Uebungen zur Mechanik (mit Hölder); Uebgn. zur darst. Geometrie (mit Rohn). — Bruns : Himmlische Mechanik, 4; Praktische Arbeiten auf der Sternwarte. — Wiener : Mathematische Ergänzungen zur Experimentalphysik, 1; Physikalisches Kolloquium. — v. Oettingen : Das duale Harmoniesystem.

Strassburg. — H. Weber : Diff.- u. Integralrechung, 4; Elliptische Funktionen, 2; Geometrie der Zahlen, 1; Seminar, part. Differentialgleichungen. Schur : Projektive Geometrie, 4; Grundlagen der Geometrie, 2; Seminar, theor. mechanik. — Wellstein : Funktionen und ihre Integrale, 4; Riemannsche Flächen, 2. — v. Mises : Analyt. Geometrie, 4; Integralgleichungen, 2; Seminar, Anwendungen der Integralgleichungen. — Epstein : Zahlentheorie, 3. — Simon : Geschichte der Mathematik im Altertum, 3. — Speiser : Differentialgleichungen und Transformationsgruppen, 2; Proseminar. — Bauschinger : Einleitung in die Mechanik des Himmels, 4; Praktische Uebungen an den Instrumenten den Sternwarte. — Wirtz : Kartenentwurfslehre.

Tübingen. — v. Brill : Einführung in die höhere Mathematik, 4; Ueber nichtstarre Systeme und die Mechanik von Hertz, 3; Seminar. — Maurer : Niedere Analysis, 4; Ueber Integralgleichungen, 3; Seminar. — Perron :

Integralrechnung, 4; Theorie der linearen Differentialgleichungen, 3; Seminar. — HAPPEL : Sphär. Trigonometrie mit Anwendungen, 2; Uebgn., dazu, 1; Prinzipien und Differentialgleichungen der Mechanik, 2. — MEYER : Theorie des Lichtes, 3; Seminar, 1. — ROSENBERG : Allgemeine Himmelskunde, 2; Photographie der Gestirne, 1; Astronomische Arbeiten.

Würzburg. — ROST : Analyt. Mechanik I, 4; Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, 4: Sphär. und prakt. Astronomie mit Uebungen auf der Sternwarte, 4; Proseminar; Seminar; Versicherungsseminar. — von WEBER : Politische Arithmetik, 4; Algebra, 4; Analyt. Geometrie der Ebene, 4; Seminar. — HILB : Darst. Geometrie, 4; Uebgn. dazu, 4; Funktionentheorie, 4.

ANGLETERRE

Cambridge ; Lectures proposed by the Special Boards for Mathematics, 1912-1913 (à partir du 14 octobre). — Prof. HOBSON : Spherical Harmonics and allied functions; Integral Equations; The History of the Problem of « squaring the circle » and of related questions. — Prof. Sir G.-H. DARWIN : Gravitation with astronomical application; Lunar Theory. — Prof. Sir R.-S. BALL : Celestical Mechanics, Spherical Astronomy. — Prof. Sir J. LARMOR : Electricity and Magnetism (Introductory); Electrodynamic and Optical Theory. — Prof. Sir J.-J. THOMSON : Electricity and Matter; Electricity and Magnetism; Discharge of Electricity through Gases; Electricity and Magnetism. — Prof. HOPKINSON : Applied Mechanics. — Prof. NEWALL : Solar Research.

Dr BAKER : Introduction to Theory of Functions; Geometry of Birational Transformation; Theory of Functions. – Mr HERMAN : Hydrodynamics; Differential Geometry; Hydromechanics (A). — Mr H.-W. RICHMOND : Algebraic Geometry; Higher Solid Geometry (A); Synthetic Geometry; Algebraic Geometry. — Dr BROMWICH : Electric Waves and Electro-optics; Dynamics (A); Optics with experimental illustrations; Optics Geometrical and Physical (A); Potential Theory and Problems. — Mr GRACE : Theory of Numbers; Theory of Invariants; Elements of Fourier Analysis and Calculus of Variations (A). — Dr E.-W. BARNES : Linear Differential Equations (B). — Mr. A.-J. WALLIS : Spherical Trigonometry and Astronomy (A). — Mr BERRY : Theory of ordinary Differential Equations (B); Elliptic Functions and Elementary Harmonic Analysis (A); Elliptic Functions (B); Elliptic Functions (Theory of Transformation). — Mr BENNETT : Line Geometry. — M. MUNRO : Hydrodynamics and Sound (A). — Mr B. RUSSELL : The Fundamental Concepts of Mathematics. Papers; Principle of Mathematics. — Mr LEATHEM : Electron Theory. — Mr HARDY : General Theory of Dirichlet's Series; Asymptotic relations in the Theory of Functions; Double Limit Problems. — Mr BIRTWISTLE : Hydrodynamics (A); Hydrodynamics (B); Termodynamics (B). — Mr STRATTON : Orbits from Observations; Stellar Physics. — Mr NICHOLSON : Physical Optics; Electric Waves and Theory of Diffraction. — Mr HINKS (for Prof. Sir G.-H. Darwin) : Demonstrations in Practical Ascronomy; Practical Work.

Oxford. — Lecture List for Michaelmas Term (course begins 14 oct. 1912). — Prof. W. ESSON : Analytic Geometry of Plane Curves, 2; Synthetic Geometry of Plane Curves, 1. — Prof. E. B. ELLIOT : Theory of

Numbers (Congruences, &c.); Sequences and Series, 2. — Prof. A. E. H. Love : Electricity and Magnetism, 3. — Prof. H. H. Turner : Elementary Mathematical Astronomy, 3; Practical Work. — T. W. Chaundy : Solid Geometry, 3. — A. L. Dixon : Calculus of Finite Differences, 1; Calculus of Variations. — J. E. Campbell : Differential Equations, 2. — A. E. Jolliffe : Doubly Periodic Functions, 2. — F. B. Pidduck : Analytical Statics and Attractions, 2. — C. H. Thompson : Dynamics of Particles and Rigid Bodies, 3. — H. T. Gerrans : Hydrodynamics, 2. — A. L Pedder : Problems in Pure Mathematics, 1. — C. E. Haselfoot : Theory of Equations, 1. — C. H. Sampson : Plane Analytical Geometry, 2. — J. W. Russell : Differential Calculus, 2. — E. H. Hayes : Statics and Hydrostatics, 2.

SUISSE

Basel. — Fueter : Diff. u. Integralrechn. 1, 4 ; Uebgn., 1 ; Funktionentheorie 4 ; mathem. terminar, 1. — Spiess : Lineare Differentialgleichungen, 2 ; Determinanten, 1 ; Mathem. Seminar, 1. — Flatt : Pädag. Seminar der Mathem Aliteilung. 1, 3.

Berne. — Graf : Kugelfunkt. m. Repet., 3 ; Besselsche Funkt. m. Repet., 3 : Integralrechn. m. Repet., 3 ; Funktionentheorie, 2 ; Differentialgleichung, 2 ; Renten- u. Versicherungsrechn., 2 : Mathemat. Seminar, 1 $^1/_2$. — Vott : Algebr. Analysis, II, 2 ; Sphär. Trigon. m, Anwend., 2 ; Integralrechnung, 2 ; Analyt. Geometrie, II, 2. — Huber : Sphär. Astron., 2 ; Theorie d. höhern eb. Kurven, 3 ; Ellipt. u. Thetafunkt., 2 ; Theorie u. Anwend. d. Determinanten, 1 ; Mathemat. Seminar (geometr. Richt.), 1. — Manderli : Ausgew. Fragen d. kosm. Physik, 1 ; Vorausberechn. period. wiederkehr. Himmelserschein., 2 ; Prakt. Ueb. — Benteli : Darstell. Geometrie : Kurven, Strahlenflächen, regul. Poliëder, 2 : Darstell. Geometrie : Ueb. u. Repetitor., 2 ; Prakt. Geometrie, I, 1. — Crelier : Geometrie d Dreiecks, 2 ; Unterrichtsfrag. a. d. Geometrie, 1. — Moser : Reserventheorie f. d. Lebensversich. Mathemat.-versicherungswissensch. Seminar, 1—2. — Bohren : Politische Arithmetik, 2 ; Witwen- u. Waisenversich., 1.

Fribourg. — Daniëls : Diff.- und Integralrechnung, 4 ; Uebgn ; Algebraische ebene und sphärische Kurven höherer Ordnung, 1 ; Thermodynamique, 2 ; Calcul des probabilités et théorie des erreurs, 2. — Plancherel : Géométrie analytique, 3 ; exercices, 1 ; théorie des fonctions analytiques, 3.

Genève. — Cailler : Calcul différentiel et intégral, 3 ; Exercices, 2 ; Mécanique rationnelle, 3 ; Exercices, 2 ; Conférences d'analyse, Equations aux dérivées partielles et équations intégrales, 2. — Fehr : Eléments de mathématiques supérieures, 3 ; Conférence d'algèbre et de Géométrie, 1 ; Exercices pratiques sur les éléments de mathématiques supérieures, 2 ; Géométrie projective, 1 ; Séminaire d'algèbre supérieure, Th. des groupes et théorie des équations, 2 ; Séminaire de mathém. élém., questions d'enseignement. — R. Gautier : Astronomie physique, 2 ; Calculs astron., 1.

Lausanne. — Amstein : Calc. différ. et intégr., I, 6 : Exerc. de calc., I, 1 : Calcul diff. et intégr., III, 2 ; Exerc. de calc., III, 1 ; Théor. des fonct., 3. — Lacombe : Géométrie descript., 4 ; Géométrie anal., 2 ; Epures de géom. descript., 4 ; Géométrie de posit., 3 ; — Mayor : Mécan. rat., I, 4 ; Exerc.

de mécan., III, 1 ; Phys. mathémat., 2 ; Statique graph., III, 3 ; Epures de statiq., III, 1 ap.-m. ; Stat. graph., V, 2. — MAILLARD : Cal. infinités. avec applicat., 3 ; Exerc. de calc., 1 ; Astron. sphér. : la Terre, le Soleil, 3.

Neuchâtel. — G. DU PASQUIER : Calcul diff. et intégral, 3 ; Exerc., 1 ; Théorie des équations diff. ordinaires, 2 ; Géométrie analyt. à trois dimensions, 2 ; Introduction à la science actuarielle ; Calcul des probabilités, 1 ; Science actuarielle, 3e partie, 1. — L. GABEREL : Théorie des fonctions analytiques, 2. — H. STRŒLE : Méthode des moindres carrés, 1. — E LEGRANDROY : Astronomie sphérique, 2 ; Géodésie, 1 ; Calcul des orbites, 1. — L. ARNDT : Introduction à l'astrophysique, 1. — A. JAQUEROD : Mécanique rationnelle, 2.

Zurich ; *Universität.* — ZERMELO : Diff.- u. Integr.-Rechg. I, 4 ; Elemente d. Diff-Gleichg., 2 ; Mengenlehre. 2 ; Math. Ueb. f. Vrgtkt., 2. — WOLFER : Astronomie, 3 ; Ueb dazu, 2 ; Bahnbestimmung, 2. — WEILER : Darst. Geom. m. Ueb. I, 4 ; Analyt. Geom. m. Ueb. I, 4 ; Math. Geogr., 2 ; Synthet. Geom., 3. — GUBLER : Algebr. Analys., 2 ; Sphär. Trigonometr., 1 ; Diff.- u. Integralrech., 1. RUSCH : Vectoranalyse, 2.

Zurich ; *Ecole polytechnique fédérale, section normale.* — HIRSCH : Höh. Mathematik I, 5 ; Repet., 1 ; Uebgn., 2 ; III, 3 ; Uebgn., 1. — FRANEL : Mathématiques supérieures. 1, 5 ; Répét., 1 ; Exerc., 2 ; III, 3 ; Exerc., 1. — GEISER : Analyt Geometrie, 4 ; Repet., 1 ; Uebgn., 2. — GROSSMANN : Darst. Geometrie, 4 ; Repet., 1 ; Uebgn., 4 ; projektive Geometrie, 4 ; Math. Ueb., 2. — KOLLROS : Géométries descr., 4 ; Répét., 1 ; Exerc., 4 ; Géométrie de position, 3 ; Mathem. Uebgn., 2. — MEISSNER : Mechanik II, 4 ; Repet., 1 ; Uebgn., 2. — HURWITZ : Funktionentheorie, 4. — GROSSMANN u. HURWITZ : Mathem. Seminar. — MEISSNER : Mechanik II, 4 ; Repet., 1 ; Uebgn., 1 ; Biegungstheorie u. Elastizitätsth., 2. — BÆSCHLIN : Vermessungs-kunde II, 4 ; Repet., 1 ; Erdmessung, 2. — WOLFER : Einl. in die Astronomie, 3 ; Uebgn., 2 ; Bahnbestimmungen, 2. — AMBERG : Versicherungsmathematik.

BEYEL : Rechenschieber mit Uebgn ; Darst. Geometrie ; Proj. Geometrie ; Flächen 2. Grades. — CHERBULIEZ : Geschichte der Physik von Newton bis Ende des 18. Jahrhunderts, V. Teil ; Histoire de la physique de Newton à la fin du XVIIIe siècle, Ve partie ; Galilei's Leben und Werk. — DUMAS : Chapitres choisis de la théorie des fonctions algébriques de une et deux variables indépendantes. — EINSTEIN : Analyt. Mechanik ; Thermodynamik. — J. KELLER : Das Imaginäre in der Geometrie mit Anwendungen, geometrisch behandelt. — KIENAST : Elastizitätstheorie ; Funktion reeller Variabeln und bestimmte Integrale (gratis). — KRAFT : Ausdehnungslehre I (Grassmann) ; Vektoranalysis I ; Vektoranalysis II ; Vektoranalysis III ; geometrischer Kalkül V.

BIBLIOGRAPHIE

R. D'ADHÉMAR. — **Leçons sur les principes de l'Analyse.** Tome I. *Séries, Déterminants. Intégrales, Potentiels. Equations intégrales. Equations différentielles et fonctionnelles.* — 1 vol. gr. in-8° de VI-324 p. et 27 fig. 10 fr., Gauthier-Villars, Paris.

Ces nouvelles leçons semblent publiées sous les plus heureux auspices.

Comme l'auteur l'indique lui-même, le titre de l'ouvrage signifie qu'il s'agit de questions principales et non d'approfondissement de principes. De plus, ce qui caractérise, à mon avis, le bon professeur, ce n'est pas de faire un cours plus ou moins encyclopédique, mais au contraire de savoir choisir un petit nombre de principes, sur lesquels on passe rapidement, pour conduire directement les élèves vers les nouvelles régions de la Science. Les routes que l'on peut parcourir ainsi sont assez nombreuses ; si chaque professeur choisit nettement les siennes, bien des volumes peuvent paraître sans se confondre les uns avec les autres. Et je n'ai plus qu'à ajouter que le volume de M. d'Adhémar me paraît avoir été engendré par de telles considérations. Dans les premiers chapitres, parmi les questions relativement élevées, introduites avec beaucoup d'habileté, je signale la fonction ζ de Riemann, qui illustre aisément la notion de produit infini, puis les principales difficultés qui naissent avec la continuité et qui sont passées en revue, non dans la voie des abstractions, mais en présentant pour chacune un exemple élégant, tels ceux rencontrés dans le célèbre mémoire de M. Darboux sur les fonctions discontinues.

La théorie des déterminants a été reprise d'autant plus nécessairement qu'elle doit servir plus loin de fondement à celle des équations intégrales ; elle sert présentement à l'introduction de déterminants d'ordre infini mais convergents, dont l'invention appartient à M. Poincaré.

L'intégrale double paraît maniée avec simplicité et rigueur. Elle conduit au théorème fondamental de l'Algèbre, d'après Gauss, aux intégrales eulériennes, au problème d'inversion d'Abel servant de préface au problème de M. Volterra.

Les intégrales attachées à des lignes, à des aires, à des volumes sont adroitement rassemblées dans un espace très restreint et, pour nous mettre en marche vers les équations intégrales, voici les potentiels.

L'exposition de la belle découverte de M. Fredholm est faite d'après les méthodes mêmes de ce savant. Au point de vue pédagogique, M. d'Adhémar a fait une comparaison saisissante et très brève entre les équations intégrales et les équations linéaires à une infinité d'inconnues. Il paraît s'excuser de développer des calculs qu'il serait peut-être plus élégant d'escamoter mais, du moins, il ne perd jamais de vue, avec un tel procédé, les analogies intuitives qui ont sûrement guidé M. Fredholm.

Dans l'étude des équations différentielles, les théories précédentes n'ont point été perdues de vue. Ainsi, pour les équations du second ordre, de nombreuses pages sont consacrées au problème de M. Picard qui consiste à chercher une courbe intégrale passant par deux points. Ce problème correspond à celui qui, pour les équations aux dérivées partielles à deux variables, consiste à déterminer une surface intégrale passant par un contour fermé et qui est précisément abordable par les procédés précédemment décrits. En résumé, nous sommes en présence d'une œuvre simple, homogène et profonde ; on peut, je crois, lui promettre un très notable succès.

A. Buhl (Toulouse).

E. Carvallo. — **Le calcul des probabilités et ses applications.** — 1 vol. gr. in-8° de IX-169 pages et 15 fig. ; 6 fr. 50 ; Gauthier-Villars, Paris.

Ce n'est pas sans une agréable surprise que j'ai parcouru ce petit volume. L'auteur nous le montre d'abord comme devant servir à des statisticiens ou

même à de simples candidats à des fonctions de statisticiens, comme devant viser l'application du Calcul des probabilités aux faits, indépendamment des démonstrations mathématiques. Le but est atteint mais, justement parce que je suis mathématicien et que je connais par ailleurs les développements quelque peu savants de la science en litige, j'ai remarqué tout de suite qu'un autre but apparaissait visiblement : les exemples simples, les définitions claires de M. Carvallo posent admirablement et sans aucun effort les principes fondamentaux qui conduisent immédiatement aux notions d'écart, de probabilité d'un écart donné, à la loi de Bernoulli, à la formule de Stirling, etc... Pour le praticien, de telles choses sont devenues abordables, au moins en fait. Quant au jeune géomètre qui désire faire l'étude mathématique du calcul, on ne saurait trop lui recommander aussi la lecture de ces quelques pages ; en quelques heures il aurait une idée tangible et des plus claires de la position des problèmes principaux et c'est sans efforts abstraits qu'il lirait ensuite les démonstrations dues aux maîtres de l'Analyse.

Pour en revenir à l'objectif spécial de M. Carvallo, il me suffira de constater le choix très heureux d'exemples fort intéressants qu'il tire des problèmes de la statistique. Les questions de natalité sont particulièrement remarquables et quelquefois déconcertantes. Quelle surprise de constater par exemple que la proportion des naissances masculines est moindre dans le domaine des enfants illégitimes que dans celui des légitimes. Pour faire disparaître une aussi invraisemblable influence de la légalité, il faut justement faire des principes les applications les plus rigoureuses, tenir compte des morts-nés et même des simples embryons qui cessent d'exister après une gestation fort courte. On arrive alors à expliquer les choses par le fait connu que les filles sont, dans les premiers temps de leur existence, plus résistantes que les garçons, qu'il en est vraisemblablement de même dans la vie intra-utérine, que l'état de mère future *illégitime* entraîne moins de soins pour l'enfant à venir, d'où une mortalité intra-utérine plus grande pour les garçons. Je résume cela bien brièvement. On verra que M. Carvallo a su être beaucoup plus intéressant encore.

Un autre point tout à fait capital consiste en l'interprétation, par des lois aussi simples que possible, des résultats d'une statistique. Ici des résultats des plus importants sont empruntés au problème de la mortalité. A partir d'un certain âge, une courbe de mortalité se relève très vite, à la façon d'une courbe exponentielle. Qu'on la remplace par une telle courbe et on aura les lois de Gompertz et de Makeham qu'on ne peut vraisemblablement pas présenter de manière plus claire.

Bien d'autres choses tout aussi ingénieuses seraient à citer. J'ai trop eu de plaisir à les apprendre pour n'en point laisser au lecteur.

A. Buhl (Toulouse).

C. Godfrey et A. W. Siddons. — **Algebra for beginners.** — 1 vol. in-16, xi-272 p., 2 sh. with answers ; 2 s. 6 d., Cambridge University Press.

MM. Godfrey et Siddons se sont donné pour tâche de satisfaire aux exigences du rapport de 1911 du Comité de l'Association mathématique, ainsi qu'aux idées émises par la circulaire du Board of Education (1909) qui avait déjà inspiré leurs manuels de géométrie[1]. Ce volume est également

[1] Voir l'*Enseig. math.*, mars 1910, p. 156 et mars 1912, p. 163.

en concordancore avec le manuel d'algèbre désiré par la conférence des directeurs d'école.

Les équations algébriques sont introduites dès le début, mais intuitivement. Les notations algébriques et les définitions sont amenées aussi au moyen de problèmes. Il en est de même pour les nombres négatifs, les fractions algébriques et les méthodes de résolution des équations simultanées qui font l'objet des chapitres suivants. Un chapitre est cependant réservé à la terminologie.

La représentation graphique et par là la notion de fonction précède et introduit les équations du deuxième degré et celles de degrés supérieurs.

La fin du volume est consacrée à des exercices de revision et exercices divers. Au reste, dans tout le cours du livre les problèmes occupent une place prépondérante, soit comme introduction, soit comme application des sujets considérés.

H. Mandart. — **Leçons de géométrie analytique à deux dimensions** à l'usage de l'enseignement moyen. — 1 vol. in-8° 334 pages; Wesmael-Charlier, Namur.

Ce manuel se distingue de la plupart des traités élémentaires de géométrie analytique non seulement par son élégante concision, mais aussi par le contenu et la disposition des matières. Pour le caractériser nous ne saurions mieux faire que de résumer l'avant-propos par lequel M. Mandart présente son ouvrage au public.

Son but, dit-il, a été d'exposer le plus brièvement possible les diverses matières du programme; car non seulement la concision facilite la tâche du professeur en la délimitant; mais elle exclut l'abondance des détails qui est souvent une cause de découragement pour les élèves; elle permet en outre de consacrer aux applications une partie du temps limité dont on dispose et d'élargir ainsi le programme.

Sur le contenu même de son manuel M. Mandart fait les remarques suivantes. Il expose, dit-il, dès les premières pages les notions relatives à la semi-droite, aux segments, aux projections et aux angles, car dans leur enseignement il n'a jamais rencontré de difficultés sérieuses, bien qu'en général l'on ne commence pas par l'exposé de ces théories.

En outre, il s'est efforcé de mettre en relief l'analogie existant entre le point et la droite, ainsi que la corrélation des théorèmes qui s'y rapportent. C'est ainsi qu'il est amené à parler des coordonnées tangentielles dont le rôle en analyse diffère peu de celui des coordonnées ponctuelles, et cela quoique ces notions ne figurent pas au programme de l'enseignement moyen.

Pour conclure ajoutons que de nombreuses figures accompagnent le texte toujours très clair de M. Mandart. De plus un grand nombre d'exercices gradués, dont la plupart résolus, termine sous forme d'applications non seulement les chapitres, mais souvent même les paragraphes; l'élève est ainsi à même de comprendre immédiatement le théorème dont il vient de faire l'étude. Arnold Reymond (Lausanne).

H.-E. Timerding. — **Die Erziehung der Anschauung.** — 1 vol. gr. in-8°, 241 p.; 4 M. 80 (relié, 5 M. 60); B. G. Teubner, Leipzig.

Il est bon que des ouvrages tels que celui de M. E. Timerding viennent rappeler de temps à autre toute la portée des méthodes intuitives préro-

nisées par Pestalozzi. On a trop souvent perdu de vue les sages principes d'une pédagogie rationnelle adaptée aux facultés de l'enfant et l'école a été envahie par cet enseignement dogmatique et livresque qui diminue si vite l'entrain aux études même chez les meilleurs élèves.

Professeur à l'Ecole technique supérieure de Braunschweig, M. Timerding n'a pas craint d'aborder une question qui, pour beaucoup de pédagogues, semble épuisée: *l'éducation de l'intuition*. Il a traité le sujet en véritable géomètre en faisant preuve d'une grande érudition. Au moment où, dans les réunions de Milan et de Cambridge, la Commission internationale attire l'attention des professeurs sur le rôle de l'intuition et de l'expérience, le volume de M. Timerding est appelé à rendre de grands services par les intéressants développements qu'il apporte.

Après avoir examiné les méthodes intuitives dans leur développement historique, l'auteur insiste sur les besoins de l'heure actuelle et montre tout le parti que l'on peut tirer des formes géométriques au moyen des exemples les plus variés, en pénétrant dans tous les domaines des mathématiques.

Son livre sera lu avec intérêt non seulement par les professeurs de mathématiques, mais aussi par les professeurs de dessin. Il forme un heureux complément aux ouvrages bien connus de M. C.-A. Laisant, *l'Initiation mathématique* et de M. et Mme W.-H. Young, *der Kleine Geometer*.

H. Fehr.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. Publications périodiques :

Acta Mathematica, dirigé par Mittag-Leffler, T. XXXV, Stockholm.

V. Volterra : Sur les équations intégro-différentielles et leurs applications. — W. Schnee : Ueber den Zusammenhang zwischen den Summabilitätseigenschaften Dirichletscher Reihen und ihrem funktionentheoretischen Charakter.

Tome XXXVI, fasc. 1. — H. Galbrun : Sur la représentation des solutions d'une équation linéaire aux différences finies pour les grandes valeurs de la variable. — Eug. Fabry : Ordre des points singuliers de la série de Taylor.

Annali di Matematica. Série III. — Rebeschini di Turati e C., Milan.

Tome XVIII, fasc. 4. — Scarpis : Successioni ricorrenti in un campo di Galois. — E.-E. Levi : Sopra un teorema di esistenza per le equazioni alle derivate parziali del secondo ordine. — Zindler : Réclamation de priorité.

Tome XIX, fasc. 1 et 2. — Giulotto : Funzioni ipersferiche poliarmoniche ad una variabile. E.-E. Levi : Sopra un teorema di esistenza per le soluzioni delle equazioni alle derivate parziali del secondo ordine (continuazione e fine). — Russyan : Sopra il cangiamento di variabili indipendenti nell'integrale triplo. — Hudson : On Fundamental Points in Cremona Space-trans-

formations. — Sannia : Osservazioni sulla « Réclamation de priorité » del signor Zindler. — Calapso : Intorno alle superficie applicabili sulle quadriche ed alle loro trasformazioni.

Parte I-VI. — Cisotti : Sopra la traslazione uniforme di un solido in un liquido indefinito.

Annals of Mathematics, 2e série, tome XIII.

No 3. — G.-A. Miller : A Third Generalization of the Regular Polyhedrons. — L.-A. Howland : A Type of Homogeneous Linear Differential Equation. — R.-E. Gleason : On the Complete Logarithmic Solution of the Cubic Equation. — H.-T. Burgess : The Circular Numbers for a Plane Curve. — E.-W. Brown : On the Sum of a Certain Triple Series. — E.-J. Moulton : A Theorem in Difference Equations on the Alternation of Nodes of Linearly Independent Solutions. — V. Snyder : Periodic Quadratic Transformations in the Plane. — A. Dresden : On the Reduction of a System of Liuear Differential Forms of any Order. — E.-B. Van Vleck : On the Functional Equation for the Sine.

No 4. — A. Emch : On the Rectilinear Congruence Realizing a Circular Transformation of One Plane into Another. — R.-L. Moore : On Duhamel's Theorem. — M. Bacher et L. Brand : On Linear Equations with an Infinite Number of Variables. — H.-L. Rietz : On the Theory of Correlation with Special Reference to Certain Significant Loci on the Plane of Distribution in the Case of Normal Correlation.

Bulletin de la Société mathématique de France. — Tome XL.

No 1. — A. Chatelet : Contribution à la théorie des fractions continues arithmétiques. — P. Levy : Remarques sur le théorème de M. Picard. — E. Keraval : Surfaces dont les lignes asymptotiques se déterminent comme celles de la surface des ondes. — E. Cahen : Sur l'irrationalité des sommes des séries dont le terme général est une fonction rationnelle de l'indice. — E. Vessiot : Sur la théorie des multiplicités et le calcul des variations.

No 2. — E. Vessiot : Sur la théorie des multiplicités et le calcul des variations. — E. Cotton : Sur la réduction des forces d'inertie. — Bouligand : Sur les équations des petits mouvements de surface des fluides parfaits. — Kœnigs : Sur l'enseignement de la cinméatique. — L. Autonne : Sur les groupes des pseudo-nuls et non commutatifs de quantités hypercomplexes.

Bulletin des Sciences mathématiques. — Gauthier-Villars, Paris.

Janvier-juillet, 1912. — J. Haag : Sur les équations aux variables mêlées : application à la recherche de certaines familles de Lamé. — C. Guichard : Etude des propriétés métriques des courbes dans un espace quelconque. — N. Nielsen : Sur un cas particulier des séries neumanniennes de fonctions ultrasphériques. — Gaston Darboux : Sur le mouvement des corps pesants et le principe de la moindre action. — J. Mollerup : Sur l'identité du déterminant de Fredholm et d'un déterminant infini de von Koch. — Tzitzeica : Sur les réseaux conjugués à invariants égaux d'une quadrique. — Gaston Darboux : Sur différentes propriétés des trajectoires orthogonales d'une congruence de courbes.

2. Livres nouveaux :

Dr Eug. Alt. — **Das Klima** (Bücher der Naturwissenschaft herausgegeben von Prof.-Dr. Siegmund Günther). — 1 vol. in-16, 136 p. ; 80 Pf. ; Philipp Reclam jun., Leipzig.

L. Autonne. — **Sur les groupes commutatifs et pseudo-nuls** de quantités hypercomplexes. — 1 vol. in-8° ; 92 p. ; Gauthier-Villars, Paris.

G. Burali-Forti et P. Marcolongo. — **Analyse vectorielle générale, I** : Transformations linéaires. — 1 vol. in-8°, 179 p. ; 6 fr. ; Hermann & fils, Paris.

H.-D. Ellis. — **Poems Mathematical & Miscellaneous.** — 1 vol. in-16, 61 p. ; 1 sh. 6 ; Chiswick Press, Londres.

H. Fehr. — **Enquête de l'« Enseignement mathématique » sur la méthode de travail des mathématiciens,** publiée avec la collaboration de Th. Flournoy et Ed. Claparède. Deuxième édition, conforme à la première, suivie d'une Note sur *L'Invention mathématique* par H. Poincaré. — 1 vol. in-8°, VIII-137 p. ; 5 fr. ; Georg & Cie, Genève ; Gauthier-Villars, Paris.

J.-J. Feijtes. — **Verhandlung der allgemeinen Auflösung des Theorems Fermats.** — 1 vol. in-8°, 49 p. ; G.-C.-T. Van Dorp, La Haye.

Sir Th.-L. Heath. — **The Method of Archimedes** recently discovered by Heiberg. — 1 vol. in-8°, 51 p., 2 sh. 6 ; University Press, Cambridge.

Ch. Jordan et R. Fiedler. — **Contribution à l'étude des Courbes** convexes fermées et de certaines courbes qui s'y rattachent. — 1 vol. in-8°, 72 p. ; 3 fr. ; Hermann & fils, Paris.

H. Liebmann. — **Nichteuklidische Geometrie.** 2te Auflage (Sammlung Schubert). — 1 vol. in-8°, 222 p. ; M. 6,50 ; G.-J. Göschen, Leipzig.

John-N. Lyle. — **The Euclidean** or common sense theory of space. — 1 vol. in-16, 63 p. ; 60 cts. ; Lyle, Bentonville, Arkansas, E.-U.

S. May. — **Introduction à l'étude de la Géométrie.** — 1 vol. in-8°, 120 p. ; 2 fr. ; Payot & Cie, Lausanne.

W.-F. Meyer. — **Differential und Integralrechnung.** I. Band : *Differentialrechnung*, 2te Auflage (Sammlung Schubert). — 1 vol. in-8°, 418 p. ; G.-J. Göschen, Leipzig.

Ch. Pendlebury. — **Preparatory Arithmetic.** — 1 vol. in-8°, 230 p. ; with answers ; 1 sh. 6 ; G. Bell & Sons, Londres.

C. Salomon. — **L'étoile magique à 8 branches** et les étoiles hypermagiques impaires. — 1 fasc. in-8°, 22 p. ; 1 fr. 50 ; Gauthier-Villars, Paris.

Th. Schmid. — **Darstellende Geometrie, I** (Sammlung Schubert). — 1 vol. in-8°, 279 p. ; M. 7 ; J.-G. Göschen, Leipzig.

Catalogue international de la littérature scientifique, publié par une Commission internationale sous la direction de H. Forster Morley. — A. Mathematics. 10e volume (juin 1910-juin 1911). — 1 vol. in-8°, VIII-248 p. ; 15 sh. (18 fr. 75) ; Gauthier-Villars, Paris.

Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées. Edition française dirigée par J. Molk. — *Tome II*, volume 1 : *Fonctions des variables réelles* ; fasc. 2 : Recherches contemporaines sur la théorie des fonctions, rédigé sous la direction de E. Borel ; exposé par L. Zoretti, P. Montel et M. Fréchet. — Calcul différentiel, exposé d'après l'article allemand de A. Voss, par J. Molk.

Commission internationale de l'Enseignement mathématique.

COMPTE RENDU

DU

CONGRÈS DE CAMBRIDGE

21-27 août 1912

publié par

H. Fehr

Secrétaire-général de la Commission.

Sommaire :

Liste des membres de la Commission

au 27 août 1912.

Allemagne : MM. F. Klein (Gœttingue), P. Stæckel (Carlsruhe), † P. Treutlein (Carlsruhe).

Australie : M. Carslaw (Sidney).

Autriche : MM. E. Czuber, W. Wirtinger, R. Suppantschitsch (Vienne).

Belgique : M. J. Neuberg (Liège).

Brésil : M. E. R. Gabaglia (Rio de Janeiro).

Bulgarie : M. A. v. Sourek (Sophia).

Colonie du Cap : M. Hough (Observatoire royal de Capetown).

Danemark : M. P. Heegaard (Copenhague).

Espagne : M. C.-J. Rueda (Madrid).

Etats-Unis : MM. Dav.-Eug. Smith (New-York), W. Osgood (Cambridge, Mass.), J.-W.-A. Young (Chicago).

France : MM. A. de Saint-Germain, C.-A. Laisant et C. Bourlet (Paris).

Grèce : M. C. Stéphanos (Athènes).

Hollande : M. J. Cardinaal (Delft).

Hongrie : MM. M. Beke, C. Rados, Ratz (Budapest).

Iles Britanniques : Sir George Greenhill (Londres), Prof. E.-W. Hobson (Cambridge), Mr. C. Godfrey (Osborne).

Italie : MM. G. Castelnuovo (Rome), Fr. Enriques (Bologne), G. Scorza (Palerme).

Japon : M. R. Fujisawa (Tokio).

Mexique : M. Valentin Gama (Observatoire de Tacuyaba).

Norvège : M. Alfsen (Christiania).

Portugal : M. Gomes Teixeira (Porto).

Roumanie : M. G. Tzitzeica (Bucarest).

Russie : MM. N. v. Sonin, Kojalovic, K.-W. Vogt (St-Pétersbourg).

Serbie : M. Michel Petrovitch (Belgrade).

Suède : M. H. v. Koch (Stockholm).

Suisse : MM. H. Fehr (Genève), C.-F. Geiser (Zurich), J.-H. Graf (Berne).

Comité central :

Président : M. F. Klein, G. R. R., professeur à l'Université de Gœttingue ;

Vice-présidents : Sir G. Greenhill, Londres, et M. D.-E. Smith, professeur au Teachers College, Columbia University, New-York ;

Secrétaire-général : M. H. Fehr, professeur à l'Université de Genève.

APERÇU GÉNÉRAL

La Commission internationale de l'enseignement mathématique s'est réunie à Cambridge du 21 au 28 août 1912, en même temps que le Vme Congrès international des mathématiciens.

Ses séances ont constitué en quelque sorte le IIme Congrès international de l'enseignement mathématique, le 1er ayant été organisé par la Commission l'année précédente à Milan.

Suivant un accord intervenu entre le Comité du Congrès et le Comité central de la Commission, les séances ont été tenues en commun avec celles de la section IV *b* (enseignement).

Leur programme détaillé avait été annoncé par les principales revues dès le mois de janvier 1912, aussi furent-elles suivies non seulement par les membres de la Commission et les représentants des Sous-commissions nationales, mais encore par de nombreux congressistes venus à Cambridge pour les séances consacrées à l'enseignement mathématique.

Nous donnerons tout d'abord un aperçu général très bref de l'ensemble des séances, en suivant l'ordre chronologique, et nous le ferons suivre du compte rendu détaillé des trois séances générales. Quant aux autres séances du Congrès des mathématiciens on en trouvera un compte rendu dans l'*Enseignement mathématique* (N° du 15 septembre 1912, p. 365 à 391), en attendant la publication des Actes du Congrès.

Mercredi 21 août, 9 heures du matin. — *Séance du Comité central.* La séance est consacrée à l'examen des différents points inscrits à l'ordre du jour des séances concernant la Commission.

Dans une *réunion préparatoire*, qui a eu lieu au commencement de juillet chez son président, M. le Prof. Klein, le Comité central avait déjà étudié d'une manière très approfondie l'organisation des séances de Cambridge et les travaux à entreprendre pendant la nouvelle période 1912-1916. Les Rapporteurs MM. Runge et Smith avaient été invités à prendre part à ces séances.

M. le Prof. F. Klein se voyant empêché de se rendre à Cambridge, le Comité central désigna Sir G. Greenhill pour parler au nom de la Commission dans la séance d'ouverture du Congrès, tandis que M. Smith fut chargé tout particulièrement des séances en commun avec la Section IV *b* du Congrès.

Mercredi 21 août, à 3 heures. — *Séance des délégués*, sous la présidence de M. D.-E. Smith. — M. Godfrey souhaite la bienvenue au nom des délégués anglais, puis le président passe en revue les principaux objets qui figurent à l'ordre du jour de la Réunion de Cambridge. Le secrétaire-général présente ensuite le rapport financier pour la période 1908-1912 soldant par un avoir de fr. 242.55. Sur la proposition des vérificateurs des comptes, Sir G. Greenhill (Londres) et M. J.-W.-A. Young (Chicago), les comptes sont approuvés.

Jeudi 22 août, à 10 heures du matin. — *Séance d'ouverture* du Vme Congrès international des Mathématiciens. Parlant au nom du Comité central, Sir G. Greenhill, vice-président de la Commission rappelle que la Commission internationale de l'enseignement mathématique a été instituée à la suite d'une résolution du précédent congrès. Puis il indique très brièvement les résultats obtenus. Les travaux n'étant pas encore terminés dans tous les pays, le Congrès sera appelé, dans sa séance de clôture, à se prononcer sur la prolongation du mandat de la Commission.

Vendredi 23 août, à 9 h. 1/2 du matin. — *Première séance de la Commission* en commun avec la Section IV *b* du Congrès. Présidence de MM. C. Godfrey et D.-E. Smith.

I. M. C. Godfrey (Osborne), président de la section, ouvre la séance par des paroles de bienvenue et annonce le programme des cinq séances dont trois seront spécialement consacrées à la Commission internationale de l'enseignement mathématique. Il remet ensuite la présidence de cette première séance à M. le prof. D.-E. Smith (New-York). En prenant possession du fauteuil de la présidence M. Smith propose l'envoi d'un télégramme à M. le Prof. Klein pour lui exprimer les regrets de l'assemblée de ce qu'il soit empêché d'assister à la réunion et lui adresser les meilleurs vœux pour le rétablissement de sa santé. Cette proposition est adoptée par acclamations.

Sir George Darwin, président du Congrès, annonce que de son côté, il a déjà envoyé un télégramme dans le même sens, au nom de tous les congressistes.

II. M. H. Fehr, secrétaire général de la Commission, présente ensuite le *compte rendu sommaire* concernant l'organisation des travaux de la Commission pendant l'exercice 1908-1912; on y trouvera la liste des publications des Sous-commissions nationales.

III. Présentation des publications du Comité central et des Sous-commissions nationales. Les délégués déposent les publications de leurs Sous-commissions et présentent un court rapport sur les travaux entrepris dans leur pays.

Lundi 26 août, à 3 heures. — *Deuxième séance de la Commission* en commun avec la section IV *b* du Congrès; présidence de Sir J. Thomson (Cambridge).

M. le Prof. Runge (Gœttingue) rapporte au nom de la Sous-commission B sur la préparation mathématique des physiciens à l'Université. Son rapport intitulé: *The mathematical Training of the Physicist,* avait été imprimé à l'avance par les soins du Comité central; il a donné lieu à une discussion d'un grand intérêt à laquelle ont pris part MM. P. Stäckel, C. Bourlet, F. Enriques, Sir G. Greenhill, A.-G. Webster, E. Borel, Sir J. Larmor, C. Bioche, A.-E.-H. Love, E.-W. Hobson, G.-A. Gibson, Sir J.-J. Thomson et C. Runge. En outre, des remarques nous ont encore été adressées après la séance dans une lettre de M. Lanchester.

Mardi 27 août, à 9 h. ½ du matin. — *Troisième séance de la Commission* en commun avec la section IV *b* du Congrès; présidence de MM. R. Fujisawa (Tokio) et C. Godfrey (Osborne).

1. *Intuition and experiment in mathematical Teaching in the Secondary Schools* (l'intuition et l'expérience dans l'enseignement mathématique des écoles moyennes), rapport de la Sous-commission A, présenté par M. D.-E. Smith (New-York). — La conférence ayant été imprimée à l'avance par les soins du Comité central, M. Smith peut se borner à exposer les principaux points, afin de laisser le plus de temps possible à la discussion. — Ont pris part à la discussion MM. Laisant, Thær, Dintzl, Siddons, Bioche, Lietzmann, v. Dyck, Carson et Goldziher.

2. Goldziher, C.: *Bemerkungen über eine Bibliographie des mathematischen Unterrichts.* — M. D.-E. Smith résume et complète cette communication. Il s'agit d'une publication fournissant la bibliographie concernant l'enseignement mathématique, à partir de 1900. M. Goldziher espère que la Commission voudra bien lui donner son appui. La publication serait faite sous les auspices du « Bureau of Education » de Washington. Sur la proposition de M. Smith la section IV adopte à l'unanimité une résolution par laquelle elle exprime sa reconnaissance au Bureau of Education pour l'intérêt qu'elle témoigne à cette publication.

3. *Résolution.* Sur la proposition de Sir G. Greenhill, vice-président de la Commission, l'assemblée adopte une proposition tendant à prolonger le mandat de la Commission; elle sera soumise au Congrès dans sa séance de clôture.

4. M. H. Fehr parle ensuite des travaux que le Comité central compte pouvoir entreprendre pendant la nouvelle période. Le Comité tiendra compte dans la mesure du possible des vœux qui lui seront transmis. A ce sujet MM. Garstang et Carson signalent quelques sujets spéciaux sur lesquels il paraît utile de faire une enquête.

9 heures du soir. — *Séance de clôture du Congrès. — Résolution.* M. C. Godfrey rend compte des séances que la Commission a tenues avec la section IV *b* du Congrès. Les travaux des Sous-commissions nationales ne sont pas entièrement terminés dans tous les pays ; il conviendra ensuite de faire une série d'études comparées et de mettre en discussion des questions d'une importance générale. Dans ces conditions la section IV *b* estime qu'il y a lieu de prolonger le mandat de la Commission.

M. W. v. Dyck (Munich) appuie cette proposition, il insiste sur le travail considérable accompli par la Commission avec le concours des Sous-commissions nationales. Près de 150 fascicules ou volumes, comprenant un ensemble de 280 rapports, ont été présentés vendredi à la Section IV *b*. Ils renferment des documents qui sont appelés à jouer un rôle très utile dans l'étude des progrès à réaliser dans l'enseignement mathématique. M. v. Dyck pense être l'interprète de toute l'assemblée en exprimant ses plus vifs remerciements non seulement au Comité central et aux membres de la Commission, mais aussi aux membres et aux collaborateurs des Sous-commissions nationales.

Voici le texte complet de la *résolution* proposée par la Section IV, et votée ensuite à l'unanimité des Congressistes présents :

Résolution.

« *Le cinquième Congrès international des Mathématiciens adresse ses remerciements aux gouvernements, aux institutions et aux personnes qui ont accordé leur aide à la Commission internationale de l'Enseignement mathématique ;*

« *Décide de prolonger les pouvoirs du Comité central composé de MM.* F. Klein *(Gœttinge), Sir* G. Greenhill *(Londres) et* H. Fehr *(Genève) et, suivant la requête qui lui est adressée, d'adjoindre à ce Comité M.* David-Eugène Smith *(New-York);*

« *Prie les délégués de bien vouloir continuer leurs offices en s'assurant la coopération de leurs gouvernements respectifs et en poursuivant leurs travaux ;*

« *Et invite la Commission à présenter un rapport ultérieur au* 6me *Congrès international et à organiser dans l'intervalle telles réunions que les circonstances lui dicteront.* »

Texte allemand : « *Der fünfte Internationale Mathematiker Kongress zu Cambridge bringt allen Regierungen, Körperschaften und Personen, die die Arbeiten der in Rom eingesetzten Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission unterstützt haben, den wärmsten Dank zum Ausdruck und beschliesst :*

« *Dass das Zentralkomitee* (Klein, Greenhill, Fehr) *weiter be-*

stehe und durch Herrn D. E. Smith *(New-York) erweitert werde ;*

« *Dass die Delegierten gebeten werden, die Unterstützung ihrer Regierungen weiter zu sichern und das Unternehmen zu fördern ;*

« *Und dass die Kommission dem nächsten Internationalen Mathematiker-Kongress erneut berichte und inzwischen ihm nötig scheinende Zusammenkünfte veranstalte.* »

Texte anglais : The following resolution is transmitted to the Congress with the unanimous support of the International Commission on the Teaching of Mathematics, and of Section IV^b, and with the request that it be adopted.

« *Resolved :* That the Congress expresses its appreciation of the support given to its Commission on the Teaching of Mathematics by various governments, institutions, and individuals ;

« That the Central Committee composed of F. Klein (Göttingen), Sir G. Greenhill (London) and H. Fehr (Geneva) be continued in power and that, at its request, David Eugene Smith (New-York) be added to its number ;

« That the Delegates be requested to continue their good offices in securing the cooperation of their respective governments, and in carrying on the work ;

« And that the Commission be requested to make such further report at the Sixth International Congress, and to hold such conferences in the meantime, as the circumstances warrant. »

Texte italien : *La Commissione internazionale dell'insegnamento matematico e la Sezione IV^b hanno approvato all'unanimità il seguente voto, che viene trasmesso al Congresso, colla preghiera di volerlo accogliere :*

« *Si delibera che il Congresso esprima la sua riconoscenza per il contributo dato alla Commissione dell'insegnamento matematico dai varii Governi, Istituti e persone ;*

« *Che il comitato Centrale* (Klein, Greenhill, Fehr) *resti in carica e che* David Eugene Smith *(New-York) venga aggiunto agli altri tre membri ;*

« *Che i Delegati siano invitati a continuare i loro buoni uffici nell'assicurare la cooperazione dei rispettivi governi e nel prestare la loro opera ;*

« *E che la Commissione sia invitata a presentare al sesto Congresso internazionale le nuove relazione che essa riterrà utili e a tenere nell'intervallo di tempo quelle riunioni che giudicherà opportune.* »

PREMIÈRE SÉANCE

Vendredi 23 août, à 9 heures et demie du matin.

Présidence de MM. Godfrey (Osborne) et D.-E. Smith (New-York).

Ordre du jour :

I. Discours d'ouverture.
II. La Commission internationale de l'Enseignement mathématique pendant l'exercice 1908-1912. Compte rendu sommaire, suivi de la liste des publications, par M. H. Fehr, secrétaire-général de Commission.
III. Présentation des publications concernant la Commission.

I. DISCOURS D'OUVERTURE

M. C. Godfrey, président de la Section IV *b*, ouvre la séance en adressant la bienvenue aux assistants. Voici le principal passage de son allocution :

« After the words of welcome spoken by Sir George Darwin yesterday, no further words of mine should be needed to make our visitors from abroad feel that they are « at home » among us. But it is fitting that I should avail myself of this occasion to offer to our visitors a very special welcome on behalf of the Mathematical teachers of this country. We Mathematical teachers welcome you, first because we are glad to have you with us and because we are glad to have the opportunity of making new friendships. We welcome you for another reason — because there is much that we can learn from you in the exercise of our craft. M. Bourlet has expressed the opinion that it is futile to transplant the teaching methods of one country into another, and to expect that these methods will always flourish in a new environment. I agree with his remarks ; but I repeat that we have much to learn from you, and I assure you that many of us propose so to learn.

» It is a matter of deep regret to all of us that our natural leader, Professor Klein, is unable to be present at this Congress. I will not anticipate the resolution of regret that Sir George Darwin will submit to you. For myself, I have done my best to acquaint myself with Professor Klein's views on Mathematical teaching, with which I am strongly in sympathy. If I may try to characterize in mathematical language the leading motif of the movement of which Professor Klein is the head, it is this — that mathematical teaching is a function of two variables : the one variable is the subject-matter of mathematics, the other variable

is the boy or girl to whom the teaching is addressed; the neglect of this second variable is at the root of most of the errors that Professor Klein combats.

» I learn from a letter addressed to Sir George Darwin that there is one matter which interests Professor Klein greatly and that he would have desired to call the attention of the Subsection to it. It is the publication of the Encyclopaedic work *Die Kultur der Gegenwart* which is in course of compilation. This work will consist of a series of volumes in which every branch of culture is explained by experts in non technical language, so that the articles will be within the reach of the reader of general education. This undertaking does not, it is true, appertain to education in the narrower sense of the word, but it does not seem too great an extension of the word to regard it as belonging to our special division. Professor Klein remarks in his letter that it was a matter of much difficulty to determine how so specialised a subject as mathematics could be made a suitable one for memoirs of the general character described, but he is glad to say that a good beginning has been made by Professor Zeuthen of Capenhagen in an article on the Mathematics of Classical times and of the Middle Ages. Those who are interested in this will be able to see copies of the article in the Exhibition.

» The meeting will now be asked to receive the report of the International Commission, and I hope that I shall be allowed to delegate my duties as Chairman to Professor D. E. Smith, to whose initiative the creation of the International Commission is due. »

Allocution de M. Dav.-Eug. Smith.

« As has already been mentioned Professor Klein, to whose great energy and wisdom the success of the International Commission on the Teaching of Mathematics is largely due, is unable to be present, on account of illness. It was my privilege to propose to the delegates at our meeting on Wednesday the sending of a telegram to Professor Klein, and I now propose the same message to Section IV, as follows: « The International Commission on the Teaching of Mathematics, and Section IV, at their first Combridge meeting express regret at your absence and best wishes for your recovery [1]. »

« The Commission was organized for the purpose of reporting upon the present status of the teaching of mathematics in the various countries of the world. Special sub-committees have also been appointed from time to time to consider questions of inter-

[1] By unanimous vote the telegram was duly sent.

national rather than merely national interest. About one hundred and fifty reports on the work done in the various countries have been prepared, and at least fifty more are in contemplation. A world-wide interest in the improvement of mathematical teaching has been awakened, and the influence of the movement is certain to be very far-reaching.

« Nine countries have completed the task set for themselves. In chronological order of completion these countries are Sweden, Holland, France, Switzerland, Austria, Japan, the United States of America, the British Isles and Denmark. In process of publication is the monumental work of Germany, with twenty-five out of thirty-six reports already printed, and the reports of Hungary, Italy, Roumania, Spain and Russia. In contemplation are the reports of Greece, Norway, Australia, Portugal, Serbia and doubtless of several other countries.

« As to the future work of the Commission, the Central Committee earnestly desires that it be authorized to see to the completion of the reports. It is therefore very desirable that it be continued in power, both for this purpose and for the consideration of certain questions of great international significance. Such topics as the proper training of engineers, of calculus in the secondary schools, of the general value of intuition in the teaching of mathematics, of the training of teachers, and of the educational (cultural, disciplinary, non-technical) value of mathematics, may properly occupy the attention of the Commission in the next four years. Special conferences having already been held at Bruxelles and Milano, it is proposed, if the Committee is continued in power, to hold, others between now and the time of the meeting of the Congress of 1916, if that shall be the date. Possibly such conferences may be held in France in 1914, in Germany in 1915, and in Stockholm in 1916.

« It is also hoped that each country will prepare a summary of the large features of the reports of other countries, to the end that the work that has been accomplished may have its full effect. It is further hoped that the various countries will continue the financial support that has been given to the Central Committee in the past.

« A word should be said at this time in memory of those distinguished teachers who have been connected with the movement, but who have been called from their labours to solve the Great Problem. Soon after the last Congress adjourned, Professor Vailati of Rome, a distinguished writer and an accomplished scholar, passed away. Scarcely in his full prime of life, his loss is felt not by Italy alone but by all who appreciate scholarship and high educational standards. Professor Bovey, President of the Imperial Technical College at South Kensington, and who

was charged with the labour of reporting for Canada, has also been called from us. In his death the world lost a scholar and an administrator of prominence. And as he was planning to attend this Congress, four weeks ago to-day, Geheimrat Professor P. Treutlein of Carlsruhe, passed suddenly away. In his death Germany lost one of her foremost educators, and the International Commission one of its best supporters. »

II. — LA COMMISSION INTERNATIONALE DE L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE DE 1908 A 1912

Rapport présenté à la séance du vendredi 23 août 1912

par

H. FEHR

Secrétaire-général de la Commission.

COMPTE RENDU SOMMAIRE

A. — Introduction.

La Commission internationale de l'Enseignement mathématique a été instituée par le 4e Congrès international des mathématiciens tenu à Rome du 6 au 11 avril 1908. Dans sa séance du 11 avril le Congrès adopta la résolution [1] suivante :

« *Le Congrès ayant reconnu l'importance d'un examen comparé des méthodes et des plans d'études de l'enseignement mathématique dans les écoles secondaires des différentes nations, confie à MM.* Klein, Greenhill *et* Fehr, *le mandat de constituer une Commission internationale qui étudiera ces questions et présentera un rapport d'ensemble au prochain Congrès.* »

---

[1] Cette résolution fut proposée par la section *Philosophie, Histoire et Enseignement*, à la suite d'une série de rapports sur l'enseignement mathématique dans les principaux pays. Sur l'initiative de M. le prof. Dav.-Eug. Smith, auteur du rapport concernant les Etats-Unis, elle décida de soumettre au Congrès une résolution tendant à créer une Commission internationale chargée de faire une étude d'ensemble des progrès de l'enseignement mathématique dans les différentes nations. Cette proposition avait déjà été formulée par le savant professeur de New-York, en 1905, dans sa réponse à une enquête sur les « réformes à accomplir » entreprise par M. H. Fehr dans la Revue internationale *L'Enseignement mathématique* Vol. VII, 1905, (p. 469).

Le comité de trois membres désigné par le Congrès a pris le nom de *Comité central;* il s'est constitué de la manière suivante :

Président : M. le Prof. F. Klein, G. R. R., Göttingue.

Vice-président : Sir George Greenhill, F. R. S., Londres.

Secrétaire-général : M. le Prof. H. Fehr, Genève.

Dans une réunion tenue à Cologne, en septembre 1908, le Comité central établit le *Rapport préliminaire* destiné à renseigner les délégués sur l'organisation de la Commission et à leur fournir des indications générales concernant le plan des travaux.

Il convient de rappeler ici les principaux points qui ont servi de base à l'organisation de la Commission et à l'élaboration des nombreux travaux rédigés dans les principaux pays.

B. — Organisation de la Commission.

I. — Les Délégations.

a) La Commission est formée par des délégués représentant les pays qui ont pris part au moins à deux des Congrès internationaux des mathématiciens avec une moyenne d'au moins deux membres. Chacun de ces pays a droit à un délégué. Les pays qui ont eu une moyenne d'au moins dix représentants peuvent avoir deux ou trois délégués. Dans les votations et les discussions de la Commission, chaque pays n'a cependant qu'une voix.

Les pays, dits *pays participants,* appelés à prendre part aux travaux de la Commission, sont les suivants :

Allemagne (3 délégués).
Autriche (3).
Belgique (1).
Danemark (1).
Espagne (1).
Etats-Unis d'Amérique (3).
France (3).
Grèce (1).
Hollande (1).
Hongrie (3).
Iles britanniques (3).
Italie (3).
Japon (1).
Norvège (1).
Portugal (1).
Roumanie (1).
Russie (3).
Suède (1).
Suisse (3).

Les pays qui ne répondent pas aux conditions ci-dessus, mais qui par leurs institutions peuvent contribuer aux progrès de la science, ont été invités à se faire représenter par un délégué qui suivrait les travaux de la Commission, sans toutefois prendre part aux votations.

Ces pays sont dits *pays associés*; le Comité central s'est adressé aux pays suivants :

Argentine (Rép.).
Australie.
Brésil.
Bulgarie.
Canada.
Chili.
Chine.
Colonie du Cap.
Egypte.
Indes anglaises.
Mexique.
Pérou.
Serbie.
Turquie.

et il a pu obtenir des représentants pour l'Australie, le Canada, la Colonie du Cap, le Mexique et la Serbie. Des pourparlers se poursuivent pour quelques Etats, et nous espérons qu'à l'occasion du Congrès de Cambridge il sera possible de les faire aboutir définitivement[1].

Voici la liste des membres de la Commission qui ont fonctionné pendant la période de quatre ans qui s'est écoulée entre les deux Congrès.

Délégués des pays participants :

Allemagne : MM. F. Klein (Gœttingue), P. Stæckel (Carlsruhe), P. Treutlein (Carlsruhe).

Autriche : MM. E. Czuber, W. Wirtinger, R. Suppantschitsch.

Belgique : M. J. Neuberg (Liège).

Danemark : M. P. Heegaard (Copenhague).

Espagne : M. Z.-G. de Galdeano (Saragosse).

Etats-Unis : MM. Dav.-Eug. Smith (New-York), W. Osgood (Cambridge, Mass.), J.-W.-A. Young (Chicago).

France : MM. A. de Saint-Germain, C.-A. Laisant et C. Bourlet.

Grèce : M. C. Stéphanos (Athènes).

Hollande : M. J. Cardinaal (Delft).

Hongrie : MM. M. Beke, C. Radoz, Ratz (Budapest).

Iles Britanniques : Sir George Greenhill, Prof. E.-W. Hobson, Mr. C. Godfrey.

Italie : MM. G. Castelnuovo (Rome), Fr. Enriques (Bologne), G. Scorza (Palerme).

Japon : M. R. Fujisawa (Tokio).

Norvège : M. Alfsen (Christiania).

Portugal : M. Gomes Teixeira (Porto).

Roumanie : M. G. Tzitzeica (Bucarest).

Russie : MM. N. v. Sonin, Kojalovic, K.W. Vogt (St-Pétersbourg).

Suède : M. H. v. Koch (Stockholm).

Suisse : MM. H. Fehr (Genève), C.-F. Geiser (Zurich), J.-H. Graf (Berne).

[1] Pendant le Congrès, le Comité central a enregistré l'adhésion du Brésil, représenté par M. E. R. Gabaglia (Rio de Janeiro) et de la Bulgarie, représentée par M. A.-v. Sourek (Sofia).

Délégués des pays associés :

Australie : M. Carslaw (Sidney); suppléant en Europe : Prof. Bragg (Leeds).
Canada : M. Bovey (Londres).
Colonie du Cap : M. Hough (Capetown).
Mexique : M. Valentin Gama (Tacuyaba).
Serbie : M. Michel Petrovitch (Belgrade).

Décès. — La Commission a eu le regret d'enregistrer les décès de trois de ses membres. Ce fut d'abord M. G. Vailati, l'un des délégués italiens, qui a été remplacé par M. Scorza (Palerme). Puis au cours de la présente année elle a été privée du concours de M. Bovey, recteur du Collège Impérial technique de South-kensington à Londres qui s'était spécialement chargé de nous renseigner sur l'enseignement mathématique au Canada et de M. P. Treutlein, G.H.R., membre de la délégation allemande; celle-ci perd en lui un collaborateur très actif et fort apprécié pour ses ouvrages didactiques. M. Treutlein est décédé subitement le 26 juillet dernier à l'âge de 67 ans. Sur la proposition de la Société mathématique allemande, le Comité central l'a remplacé dans la Commission par M. le Prof. Dr A. Thaer (Hambourg).
Démission. — M. le Prof. Z.-G. de Galdeano (Saragosse) a désiré se retirer de la Commission à la fin de cette première période. Le Comité central lui a exprimé ses vifs remerciements pour tout l'intérêt qu'il n'a cessé de témoigner à la Commission. M. C. J. Rueda (Madrid) a été désigné comme délégué espagnol.

II. — Sous-commissions nationales.

Les différentes délégations ont été invitées à s'adjoindre des Sous-commissions nationales, comprenant des représentants des divers degrés de l'enseignement mathématique dans les établissements d'instruction générale ou dans les écoles techniques ou professionnelles. Ces Sous-commissions ont apporté un concours très précieux aux délégués pour la préparation des rapports. C'est à leurs membres que l'on doit en grande partie les nombreuses publications qui ont été entreprises sur l'initiative de la Commission.

III. — Dispositions financières.

Le 4me Congrès international n'ayant fourni aucun subside les gouvernements des *pays participants* ont été invités à mettre à la disposition de leur délégation une somme permettant de couvrir entièrement les frais de la délégation et de la sous-commission nationale et de contribuer aux frais généraux de la Commission.

Pour subvenir aux frais généraux de la Commission comprenant notamment les frais du secrétariat-général et du Comité central, il a été constitué un fonds formé par des contributions annuelles de cent francs par *pays participant*.

IV. — Organe officiel de la Commission. Publication des Rapports des Sous-commissions.

La Revue internationale *L'Enseignement mathématique*, dirigée par MM. Laisant et Fehr, sert d'organe à la Commission. Elle publie les Rapports du Comité central et rend régulièrement compte des travaux de la Commission et des Sous-commissions.

Les Sous-commissions publieront leurs rapports suivant leur propre convenance. Le Comité central a toutefois exprimé le désir que ces rapports soient imprimés suivant le format de *L'Enseignement mathématique* et que les délégations des divers pays en adressent 75 exemplaires au secrétariat-général qui les fait distribuer aux membres de la Commission.

V. — Langues officielles.

La correspondance et les rapports doivent être rédigés dans l'une des quatre langues admises aux Congrès internationaux des mathématiciens, au gré des auteurs. Ces langues sont : l'allemand, l'anglais, le français et l'italien.

C. — **Objet des travaux de la Commission.**

Dans le texte même de la résolution du Congrès de Rome, il n'est question que de l'enseignement mathématique dans les écoles secondaires. Mais étant donné que le but de ces écoles et la durée de leurs études sont très variables d'un Etat à un autre, le Comité central a jugé utile de faire porter son travail sur l'ensemble du champ d'instruction mathématique depuis la première initiation jusqu'à l'enseignement supérieur. En outre il ne s'est pas borné aux établissements d'instruction générale conduisant à l'Université, mais il a également fait étudier l'enseignement mathématique dans les écoles techniques ou professionnelles. Ces établissements ont en effet une importance croissante ; il y avait donc lieu d'accorder une attention toute spéciale à l'enseignement mathématique qui s'y donne.

Le Comité central a donc entrepris une étude d'ensemble de l'enseignement mathématique dans les différents types d'écoles et à ses divers degrés. Il s'agit d'une *étude objective destinée à présenter l'état actuel et les tendances modernes de cet enseignement*. Comme on l'a dit dans les Réunions de Bruxelles et de

Milan, la Commission ne cherche nullement à uniformiser l'enseignement mathématique, mais avant tout à mettre en lumière les tendances modernes. La Commission ne peut et ne veut rien imposer, mais ses travaux permettront aux professeurs de savoir ce qui se fait dans les nations voisines et ils les renseigneront aussi sur l'organisation de son propre pays. La comparaison des documents et l'étude des expériences faites ailleurs contribueront à réaliser de nouveaux progrès dans tous les domaines de l'enseignement mathématique.

Le *plan général des travaux* élaboré par le Comité central était destiné à servir de guide aux délégués et aux membres des Sous-commissions nationales, afin de leur donner des indications sur les principaux points à prendre en considération. Toutefois, en raison de la diversité même de l'organisation dans les différents pays, il n'était pas possible d'imposer un plan unique, s'adaptant à la fois aux conditions des divers pays. La plus grande liberté a donc été laissée aux rapporteurs.

Voici les titres des principaux objets signalés dans le Rapport préliminaire :

Première partie : *Etat actuel de l'organisation et des méthodes de l'instruction mathématique.* — I. Les divers types d'écoles. — II. But de l'instruction mathématique et branches d'enseignement. — III. Les examens. — IV. Les méthodes d'enseignement. — V. Préparation des candidats à l'enseignement.

Deuxième partie : *Les tendances modernes de l'enseignement mathématique.* — I. Les idées modernes concernant l'organisation scolaire. — II. Les tendances modernes concernant le but de l'enseignement et les branches d'études. — III. Les examens. — IV. Les méthodes d'enseignement. — V. La préparation des candidats à l'enseignement. — Remarque générale.

Les rapports sommaires que présenteront les délégués en déposant leurs publications indiqueront les points caractéristiques des travaux des Sous-commissions nationales.

D. — Séances du Comité central et de la Commission.

Le *Comité central* s'est réuni pour la première fois à Cologne, en septembre 1908; puis à Carlsruhe, au commencement d'avril 1909; à Bâle, fin décembre 1909; à Bruxelles en août 1910; à Milan en septembre 1911 et enfin dans les premiers jours de juillet à Hahnenklee, dans le Harz, auprès de son président, que des raisons de santé empêchent malheureusement d'assister au Congrès de Cambridge. Son absence sera vivement regrettée non seulement par les membres de la Commission, mais par tous les Congressistes.

En outre de nombreux pourparlers ont eu lieu entre le Secrétaire-général et les membres de la Commission.

Réunion de Bruxelles (9-10 août 1910). — Le Comité central a saisi l'occasion de l'Exposition universelle de Bruxelles pour organiser une réunion partielle de la Commission, à laquelle elle avait tout particulièrement invité les délégués des pays voisins. Son appel a rencontré le meilleur accueil auprès de la plupart des délégations. Onze pays se trouvaient représentés par plus de trente membres des sous-commissions nationales. Nous nous bornons à rappeler ici la brillante conférence de M. C. Bourlet (Paris) sur la pénétration réciproque des mathématiques pures et des mathématiques appliquées dans l'enseignement secondaire. Elle a été reproduite *in extenso* dans le Compte rendu détaillé [1] publié par le Secrétaire-général dans la *Circulaire n°* 3, qui comprend en outre un résumé des conférences organisées à l'exposition du 11-16 août 1910.

Réunion de Milan (18-21 septembre 1911). — La Commission a tenu sa première réunion plénière [2] à Milan, en septembre 1911. En dehors des séances du Comité central et des Commissions spéciales, la réunion qui, en réalité, avait pris l'ampleur d'un véritable congrès international de l'enseignement mathématique, comprenait quatre séances, dont la première était consacrée à la présentation des rapports des Sous-commissions nationales. Pour les deux séances suivantes, le Comité central a estimé qu'il était utile de concentrer le débat sur deux questions importantes concernant l'une l'enseignement moyen, l'autre l'enseignement supérieur. Les questions mises à l'ordre du jour à Milan étaient les suivantes :

A. I. Les mathématiques dans l'enseignement moyen : *Dans quelle mesure peut-on tenir compte, dans les écoles moyennes* (lycées, collèges, gymnases, écoles réales, etc.), *de l'exposé systématique des mathématiques ?* II. *La question de la fusion des différentes branches mathématiques dans l'enseignement moyen.* — Rapport de la Sous-commission A ; rapporteurs MM. Castelnuovo et Bioche. — Discussion.

B. *L'enseignement mathématique théorique et pratique destiné aux étudiants en sciences physiques et naturelles* — Rapport de la Sous-commission B ; rapporteur : M. Timerding. — Discussion.

Mentionnons également la séance générale publique avec les belles conférences de M. le sénateur Colombo et de M. le Prof. F. Enriques.

A la suite de l'extension considérable qu'ont pris ses travaux la Commission ne voit pas la possibilité de donner à Cambridge une étude comparée des différents rapports nationaux. Pour plusieurs pays les rapports ne sont du reste pas encore terminés. Dans sa réunion de Milan la Commission a donc estimé nécessaire de

---

[1] Voir l'*Ens. mathém.* du 15 septembre 1910.
[2] Le compte rendu détaillé fait l'objet de la *Circulaire n°* 5 (75 p.), *Ens. math.* du 15 nov. 1911.

soumettre au Vme Congrès une proposition tendant à renouveler son mandat jusqu'au congrès suivant.

Réunion de Cambridge (août 1912) et réunions ultérieures. — Les séances de la Commission ont été organisées sur le même plan que celles de Milan. Comme suite à la *question A*, l'ordre du jour comprend une discussion sur « *l'intuition et l'expérience dans l'enseignement mathématique des écoles moyennes* » (rapporteur : M. D.-E. Smith). Tandis que pour la *question B* il convenait, après la discussion générale de Milan, de se limiter plus particulièrement à « *la préparation mathématique des physiciens* » (rapporteur : M. C. Runge).

Au cas où le mandat de la Commission serait prolongé, le Comité central aborderait ensuite l'étude d'autres questions d'une importance fondamentale; elles seraient discutées dans des réunions à placer entre le 5me et 6me Congrès international. Il apportera notamment une attention toute spéciale à la préparation théorique et pratique des professeurs de mathématiques.

E. — Publications concernant la Commission.

Grâce au concours dévoué des membres des Sous-commissions nationales, la Commission se trouve en possession d'un ensemble de documents fort précieux. Si nous nous bornons aux rapports proprement dits sur l'enseignement mathématique dans les différents pays, leur nombre dépasse 280, répartis sur plus de 150 fascicules ou volumes et représentant actuellement un ensemble de plus de 9000 pages in-8°.

Nous donnons ci-après la liste complète des publications parues jusqu'à ce jour ou actuellement en préparation.

Les rapports sont terminés dans les pays suivants : Suède, Hollande, France, Suisse, Autriche, Japon, Etats-Unis, Iles britanniques, Danemark (9 pays).

Sont en cours de publication les rapports concernant l'Allemagne, la Belgique, l'Espagne, la Hongrie, l'Italie, la Norvège, la Roumanie et la Russie (8 pays).

Dans d'autres Etats, il se prépare également des rapports. Nous pouvons déjà mentionner l'Australie, où notre délégué M. H. C. Carslaw, a entrepris une étude sur les mathématiques dans les écoles moyennes et dans l'enseignement supérieur.

Cette vaste enquête sur l'état actuel et les tendances modernes de l'enseignement mathématique une fois terminée, il s'agira d'en tirer parti en la faisant connaître au corps enseignant et aux autorités intéressées. Dans une étude comparée de différents rapports qui les concernent, les conférences ou sociétés de professeurs examineront les vœux et conclusions à transmettre aux autorités respectives, dans le but de faire progresser l'enseignement des mathématiques.

ANNEXE

LISTE DES PUBLICATIONS DU COMITÉ CENTRAL

ET DES

SOUS-COMMISSIONS NATIONALES

PUBLICATIONS DU COMITÉ CENTRAL

PUBLICATIONS DU COMITÉ CENTRAL, 1re série : 1908 à 1911, rédigées par H. FEHR, Secrétaire-général de la Commission. — I vol. de 200 p. : 5 fr., Georg & Cie, Genève.

Elles comprennent :

1. *Rapport préliminaire* sur l'organisation de la Commission et le plan général de ses travaux (*Ens. math.*, no de nov. 1908). [16 p.].
2. *Circulaire no 1 :* Constitution de la Commission. — Sous-commissions nationales (*E. M.*, no de mai 1909). [12 p.].
3. *Circulaire no 2 :* Nouveaux membres. — Sous-commissions nationales. — Etat des travaux au commencement de 1910 (*E. M.*, mars 1910). [16 p.].
4. *Circulaire no 3 :* Réunion de Bruxelles. Compte rendu des séances de la Commission et des conférences sur l'enseignement scientifique et sur l'enseignement technique moyens faites à Bruxelles du 10 au 16 août. Conférence de M. C. BOURLET sur la pénétration réciproque des mathématiques pures et des mathématiques appliquées dans l'enseignement secondaire (*E. M.*, no de sept. 1910). [63 p.].
5. *Circulaire no 4 :* Etat des travaux au 1er mars 1911 (*E. M.*, mars 1911). [16 p.].
6. *Circulaire no 5 :* Compte rendu du Congrès tenu à Milan du 18-21 septembre 1911 (*E. M.*, no de nov. 1911). [75 p.] :

   Rapport de la Sous-commission A : 1. la question de la rigueur dans l'enseignement moyen ; 2. la fusion des différentes branches mathématiques. Rapporteurs : MM. CASTELNUOVO et BIOCHE. — Annexe : Note de M. YOUNG (Chicago).

   Rapport de la Sous-commission B : L'enseignement mathématique destiné aux étudiants en sciences physiques, en sciences naturelles, etc. Rapporteur : M. TIMERDING.

   Sull'insegnamento matematico nelle scuole per gli ingegneri. Par le Prof. COLOMBO.

   Mathématiques et Théorie de la connaissance. Par le Prof. F. ENRIQUES.

SOUS-COMMISSIONS NATIONALES

ALLEMAGNE

A. Berichte und Mitteilungen

veranlasst durch die Internationale Mathematische Unterrichts-Kommission. Herausgegeben von W. Lietzmann. In zwanglosen Heften. gr. 8. Steif geh. (B. G. Teubner, Leipzig).

I. Fehr, H., Vorbericht über Organisation und Arbeitsplan der Kommission. Deutsche Uebersetzung von W. Lietzmann. [S. 1-10.] 1909. M. —.30.

II. Noodt, G., Ueber die Stellung der Mathematik im Lehrplan der höheren Mädchenschule vor und nach der Neuordnung des höheren Mädchenschulwesens in Preussen. [S. 11-32.] 1909. M. —.80.

III. Klein, F., und H. Fehr, Erstes Rundschreiben des Hauptausschusses. Deutsch bearbeitet von W. Lietzmann. [S. 33-38.] 1909. M. —.20.

IV. Klein, F., und H. Fehr, Zweites Rundschreiben des Hauptausschusses. Deutsch bearbeitet von W. Lietzmann, sowie P. Zühlke, Mathematiker und Zeichenlehrer im Linearzeichenunterricht der preussischen Realanstalten. [S. 39-54.] 1910. M. —.50.

V. Lietzmann, W., Die Versammlung in Brüssel. Nach dem von H. Fehr verfassten dritten Rundschreiben des Hauptausschusses. [S. 55-74.] 1911. M. —.60.

VI. Fehr, H., Viertes Rundschreiben des Hauptausschusses. Deutsch bearbeitet von W. Lietzmann. [S. 75-88.] 1911. M. —.50.

VII. Lietzmann, W., Der Kongress in Mailand vom 18. bis 20 Sept. 1911, sowie Schimmack, R., Ueber die Verschmelzung verschiedener Zweige des mathematischen Unterrichts. [S. 89-126.] 1912. M. 1.60.

B. Abhandlungen

über den mathematischen Unterricht in Deutschland, veranlasst durch die Internationale Mathematische Unterrichts-Kommission. Herausgegeben von F. Klein. — 5 Bände, in einzeln käuflichen Heften. gr. 8. Steif geh. (B. G. Teubner, Leipzig).

ERSTER BAND — **Die höheren Schulen in Norddeutschland.** Mit einem Einführungswort von F. Klein.

1. Heft: Lietzmann, W., Stoff und Methode im mathematischen Unterricht der norddeutschen höheren Schulen auf Grund der vorhandenen Lehrbücher. [XII u. 102 S.] 1909. M. 2.—.

2. Heft: Lietzmann, W., Die Organisation des mathematischen Unterrichts an den höheren Knabenschulen in Preussen. Mit 18 Figuren. [VIII u. 204 S.] 1910. M. 5.—.

3. Heft: Lorey, W., Staatsprüfung und praktische Ausbildung der Mathematiker an den höheren Schulen in Preussen und einigen norddeutschen Staaten. [V. u. 118 S.] 1911. M. 3.20.

4. Heft: Thaer, A., N. Geuther und A. Böttger, Der mathematische Unterricht an den Gymnasien und Realanstalten der Hansestädte, Mecklenburgs und Oldenburgs. [VI u. 93 S.] 1911. M. 2.—.

5. Heft : Schröder, J., Die neuzeitliche Entwicklung des mathematischen Unterrichts und den höheren Mädchenschulen, insbes. in Norddeutschland. (Unter der Presse.)

ZWEITER BAND — **Die höheren Schulen in Süd- und Mitteldeutschland.** Mit einem Einführungswort von P. Treutlein.

1. Heft : Wieleitner, H., Der mathematische Unterricht an den höheren Lehranstalten sowie die Ausbildung und Fortbildung der Lehrkräfte im Königreich Bayern. Mit einem Einführungswort von P. Treutlein. [XII u. 85 S.] 1910. M. 2.40.

2. Heft : Witting, A., Der mathematische Unterricht an den Gymnasien und Realanstalten nach Organisation, Lehrstoff und Lehrverfahren und die Ausbildung der Lehramtskandidaten im Königreich Sachsen. [XII u. 78 S.] 1910. M. 2.20.

3. Heft : Geck, E., Der mathematische Unterricht an den höheren Schulen nach Organisation, Lehrstoff und Lehrverfahren und die Ausbildung der Lehramtskandidaten im Königreich Württemberg. [IV u. 104 S.] 1910. M. 2.60.

4. Heft : Cramer, H., Der mathematische Unterricht an den höheren Schulen nach Organisation, Lehrstoff und Lehrverfahren und die Ausbildung der Lehramtskandidaten im Grossherzogtum Baden. [IV u. 48 S.] 1910. M. 1.60.

5. Heft : Schnell H., Der mathematische Unterricht an den höh. Schulen nach Organisation, Lehrstoff und Lehrverfahren und die Ausbildung der Lehramtskandidaten im Grossherzogtum Hessen. [VI u. 51 S.] 1910. M. 1.60.

6. Heft : Hossfeld, Der mathematische Unterricht an den Gymnasien und Realanstalten Thüringens nach Organisation, Lehrstoff und Lehrverfahren. [IV u. 18 S.] 1912. M. 0.80.

7. Heft : Wirz, J., Der mathematische Unterricht an den höheren Knabenschulen sowie die Ausbildung der Lehramtskandidaten in Elsass-Lothringen. [VI u. 58 S.] 1911. M. 1.80.

DRITTER BAND — **Einzelfragen des höheren mathematischen Unterrichts.** Mit einem Einführungswort von F. Klein.

1. Heft : Schimmack, R., Die Entwicklung der mathematischen Unterrichtsreform in Deutschland. Mit einem Einführungswort von F. Klein. [VI u. 146 S.] 1911. M. 3.60.

2. Heft : Timerding, H. E., Die Mathematik in den physikalischen Lehrbüchern. Mit 22 Figuren. [VI u. 112 S.] 1910. M. 2.80.

3. Heft : Zühlke, P., Der Unterricht im Linearzeichnen und in der darstellenden Geometrie an den deutschen Realanstalten. Mit 14 Figuren. [IV u. 92 S.] 1911. M. 2.60.

4. Heft : Hoffmann, B., Mathematische Himmelskunde und niedere Geodäsie an den höheren Schulen. Mit 9 Figuren. [VI u. 68 S.] 1912. M. 2.—.

5. Heft : Timerding, H. E., Die kaufmännischen Aufgaben im mathematischen Unterricht der höheren Schulen. Mit 5 Figuren im Text. [IV u. 45 S.] 1911. M. 1,60.

6. Heft : Gebhardt, M., Die Geschichte der Mathematik im mathematischen Unterrichte der höheren Schulen Deutschlands, dargestellt vor allem auf Grund alter und neuer Lehrbücher und der Programmabhandlungen höherer Schulen. [VII u. 157 S.] 1912. M. 4.80.

7. Heft : Wernicke, A., Mathematik und Philosophische Propädeutik. [VII u. 138 S.] 1912. M. 4.

8. Heft : Katz, D., Psychologie und mathematischer Unterricht. (In Vorbereitung.)

9. Heft : Lorey, W., Das Studium der Mathematik an den deutschen Universitäten. (In Vorbereituug.)

VIERTER BAND — **Die Mathematik an den technischen Schulen**. Mit einem Einführungswort von P. Stäckel.

1. Heft : Grünbaum, H., Der mathematische Unterricht an den mittleren technischen Fachschulen der Maschinenindustrie. Mit einem Einführungswort von P. Stäckel. [XII u. 99 S.] 1910. M. 2.60.

2. Heft : Ott, Karl, Die angewandte Mathematik an den technischen Mittelschulen der Maschinenindustrie. (Unter der Presse.)

3. Heft. Girndt, M., Der mathematische Unterricht an den Baugewerkschulen. (In Vorbereitung.)

4. Heft : Schilling, C., und Meldau, H., Der mathematische Unterricht an den deutschen Navigationsschulen. [VI. u. 82 S.] 1912 M. 2.—

5. Heft : Trost, Die mathematischen Fächer an den gewerblichen Fortbildungsschulen. (In Vorbereitung.)

6. Heft : Penndorf, B., Rechnen und Mathematik im Unterricht der kaufmännischen Lehranstalten. [VI u. 100 S.] 1912. M. 3.—

7. Heft : Jahnke, E., Die Mathematik an Hochschulen für besondere Fachgebiete. [VI. u. 55 S.] 1911. M. 1.80.

8. Heft : Furtwängler, Ph., Die mathematische Ausbildung der Landmesser. (In Vorbereitung.)

9. Heft : Stäckel, P., Die mathematische Ausbildung der Architekten, Chemiker und Ingenieure an den deutschen Hochschulen. (In Vorbereitung.)

FÜNFTER BAND — **Der mathematische Elementarunterricht und die Mathematik an den Lehrerbildungsanstalten**. Mit einem Einführungswort von F. Klein.

1. Heft : Lietzmann, W., Stoff und Methode des Rechenunterrichts in Deutschland. Ein Literaturbericht. Mit 20 Figuren im Text. Mit einem Einführungswort von F. Klein. [VII u. 125. S.] 1912. M. 3.—

2. Heft : Lietzmann, W., Stoff und Methode des Raumlehreunterrichts in Deutschland. Ein Literaturbericht. Mit 38 Figuren im Text. [VIII u. 88 S.] 1912. M. 2.80

3. Heft : Der mathematische Unterricht an den Volksschulen und Lehrerbildungsanstalten Süddeutschlands mit einem Einführungswort von P. Treutlein und mit den Einzelabhandlungen von H. Hensing über die Verhältnisse in Hessen, von E. Geck über Württemberg, von H. Cramer über Baden, von Kerschensteiner und Bock über Bayern. [XIV u. 163 S.] 1912. M. 5.

4. Heft : Dressler, H., Der mathematische Unterricht an den Volksschulen und Lehrerbildungsanstalten in Sachsen und Thüringen. (In Vorbereitung.)

5. Heft : Umlauf, K., Der mathematische Unterricht an den Seminaren und Volksschulen der Hansestädte. (In Vorbereitung.)

6. Heft : Lietzmann, W., Die Organisation der Volksschulen, gehobenen Volksschulen, Präparandenanstalten, Seminare usw. in Preussen (In Vorbereitung.)

AUTRICHE

Berichte über den mathematischen Unterricht in Oesterreich. Veranlasst durch die internationale mathematische Unterrichtskommission. Heraus-

gegeben von E. Czuber, W. Wirtinger, R. Suppantschitsch, E. Dintzl. (Alfred Hölder, Wien). 1912.

Heft 1. — Begleitwort, von E. Czuber.

Realschulen von F. Bergmann.

Volks- und Bürgerschulen von K. Kraus. — (V u. 81 S.; 1 M. 80).

Heft 2. — Bildungsanstalten für Lehrer und Lehrerinnen von Th. Konrath.

Höhere Handelsschulen von M. Dolinski.

Höhere Forstlehranstalt Reichstadt von M. Adamicka. — (52 p.; 1 M. 20.)

Heft. 3. — Gymnasien von E. Dintzl. — (VIII-78 p.; 1 M. 80.)

Heft 4. — Mädchenlyzeen von Th. Konrath.

Die praktische Vorbildung für das höhere Lehramt in Oesterreich von J. Loos.

Gewerbliche Lehranstalten von W. Rulf. — (64 p.; 1 M. 60.)

Heft 5. — Technische Hochschulen von E. Czuber. — (V-39 p.; 1 M. 20.

Heft 6. — Die mathematischen Schulbücher an den Mittelschulen und verwandten Lehranstalten von Ph. Freud. — (53 p.; 1 M. 20.)

Heft 7. — Universitäten von R. v. Sterneck. — (50 p.; 1 M. 20.)

Heft 8. — Bericht über die speziellen Verhältnisse des öffentlichen mathematischen Unterrichtes an den Volks- und Mittelschulen Galiziens von St. Zaremba. — (V-25 p.; 1 M. 20.)

Heft 9. — Der Unterricht in der darstellenden Geometrie an den Realschulen und Realgymnasien von A. Adler.

Der Unterricht in der darstellenden Geometrie an den Technischen Hochschulen von E. Müller. — (24 p.; 2 M. 40.)

Heft. 10. — Hochschule für Bodenkultur von O. Simony.

Montanistische Hochschulen von E. Kobald.

Militär-Erziehungs- und Bildungsanstalten von A. Mikuta.

Technologisches Gewerbemuseum von K. Reich. — (39 p.; 1 M. 20.)

Heft 11. — Die Mathematik im Physikunterricht der österreichischen Mittelschulen von A. Lanner. — (56 p.; 1 M. 20.).

Heft 12. — Die neuesten Einrichtungen in Oesterreich für die Vorbildung der Mittelschullehrer in Mathematik, Philosophie und Pädagogik von A. Höfler. — (103 p.; 2 M.)

BELGIQUE

1er volume. Rapports sur l'enseignement des mathématiques, du dessin et du travail manuel dans les écoles primaires, les écoles normales primaires, les écoles moyennes, les athénées les collèges belges. — 1 vol. de 348 p.; prix : 5 fr.; J. Gœmære, Bruxelles. Ce volume comprend :

Rapport sur l'enseignement des mathématiques dans les *écoles primaires et dans les écoles normales primaires*, par M. Dock (33 p.).

Rapport sur l'enseignement du dessin et du travail manuel dans les écoles primaires, les écoles moyennes, les athénées et les collèges par M. L. Montfort (154 p.).

Rapport sur l'enseignement des mathématiques dans les écoles moyennes, les athénées et les collèges, par M. H. Ploumen (87 p.).

Les tendances actuelles de l'enseignement mathématique en Belgique et leur influence sur les méthodes et les programmes, par H. Ploumen (67 p.).

En préparation ; pour paraître en 1913, 2me *volume* :

Les mathématiques dans les écoles industrielles et professionnelles, par M. Rombaut, inspecteur honoraire.

L'enseignement des mathématiques dans les Universités et les Ecoles supérieures, par M. Neuberg.

DANEMARK

Bericht über den Mathematikunterricht in Danemark, par Paul Heegaard. — 1 vol. de 107 p.; 3 fr. 80; Gyldenalske, Copenhague; Georg & Cie, Genève.

1. — Die Schultypen.
2. — Elementarschulen.
3. — Die höheren allgemeinen Schulen.
4. — Die Volkshochschule.
5. — Elementarschulen für Technik, Handel und Seefahrt.
6. — Militärschulen.
7. — Schulen für Land-, Fortwirtschaft u.s.w
8. — Die Kunstakademie.
9. — Die Universität und die technische Hochschule.
10. — Die Lehrerausbildung.

ESPAGNE

L'enseignement mathématique en Espagne, rapports de la Sous-commission espagnole, par le délégué Z.-G. de Galdeano (Saragosse). Travaux préparatoires. 2 fasc., 8 et 18 p. ; 1910 et 1911.

Mémoires, Tome 1, 139 p., 1912. Sommaire de ce premier volume :

M. Torroja et l'évolution de la Géométrie en Espagne, par Miguel Vegas.

Enseignement de la Géométrie métrique à la Faculté des Sciences, par Cecilio-Jiménez Rueda.

Les cours d'Analyse mathématique aux Facultés des Sciences espagnoles, par Luis-Octavio de Toledo.

L'enseignement du Calcul infinitésimal aux Facultés des Sciences espagnoles, par Patricio Penalver.

Les Mathématiques à l'Ecole d'Ingénieurs des Eaux et Forêts, par Jorge Torner.

L'enseignement des Mathématiques à l'Ecole centrale des Ingénieurs industriels, par Carlos Mataix et Alfonso Toran.

L'enseignement des Mathématiques à l'Ecole supérieure de Guerre, par Miguel Correa.

Enseignement des Mathématiques aux Ecoles normales, par Leopoldo Ferreras.

ETATS-UNIS

Report of the United States of North America (11 fascicules).

Comité I et II : Mathematics in the Elementary Schools of the United States (186 p.), 1911.

Comité III et IV : Mathematics in the Public and Private, Secondary Schools of the United States (188 p.), 1911.

Comité V : Training of Teachers of Elementary and Secondary Mathematics (24 p.). 1911.

Comité VI : Mathematics in the Technical Secondary Schools in the United States (36 p.), 1912.

Comité VII Examinations in Mathematics other than those set by the Teacher for his own classes (72 p.), 1911.

Comité VIII : Influences tending to Improve the Condition of Teachers of Mathematics (47 p.), 1912.

Comité IX : Mathematics in the Technological Schools of Collegiate Grade in the United States (44 p.), 1911.

Comité X : Undergraduate Work in Mathematics in Colleges of Liberal Arts and Universities, (30 p.), 1911.

Comité XI : Mathematics at West Point and Annapolis (26 p.), 1912.

Comité XII : Graduate Work in Mathematics in Universities and in other Institutions of like Grade in the United States (64 p.), 1911.

General Report of the American Commissioners, with *Index* of all the American Reports (84 p.), 1912.

Ces onze fascicules sont publiés et édités par les soins du Bureau of Education, à Washington.

FRANCE

Rapport de la Sous-commission française, 5 volumes. (Librairie Hachette, Paris.)

Tome I. — Enseignement primaire, publié sous la direction de M. Bioche, prof. de mathématiques au Lycée Louis-le-Grand. 85 p. (3 fr. 50) :

Avant-propos.

a) Rapport sur l'ensemble des établissements dans lesquels se donne, en France, un enseignement mathématique, par M. Ch. Bioche.

b) Rapport sur l'enseignement mathématique dans les Ecoles primaires élémentaires, par M. J. Lefebvre.

c) Rapport sur l'enseignement mathématique dans les écoles primaires supérieures, par M. G. Tallent.

d) Rapport sur l'enseignement mathématique dans les écoles normales primaires d'instituteurs, en France, par M. A. Vareil.

e) Rapport sur l'Ecole normale supérieure d'enseignement primaire de Saint-Cloud, par M. Goursat.

Appendice.

Tome II. — Enseignement secondaire, publié sous la direction de M. Bioche, prof. de mathématiques au Lycée Louis-le-Grand. — 159 p. (5 fr.) :

Avant-propos.

a) Rapport sur la place et l'importance des mathématiques dans l'enseignement secondaire en France, par M. Ch. Bioche.

b) Rapport sur les classes de mathématiques spéciales et de Centrale, par M. E. Blutel.

Pièces annexes.

c) Rapport sur l'arithmétique par M. A. Lévy

d) Rapport sur l'algèbre, par M. Guitton.

e) Rapport sur la géométrie, par M. Th. Rousseau.

f) Rapport sur l'enseignement de la mécanique, par M. H. Beghin.

g) Rapport sur l'enseignement de la cosmographie, par M. A. Muxart.

h) Rapport sur l'enseignement des mathématiques dans les écoles nouvelles, par Frank Lombard.

Appendice.

Tome III. — Enseignement supérieur, publié sous la direction de M. Albert de Saint-Germain, Doyen honoraire de la Faculté des sciences de Caen, président de la Sous-commission française. — 123 p. (4 fr.).

Aperçu général sur l'enseignement supérieur des mathématiques.

a) Rapport sur l'enseignement du calcul différentiel et intégral, de la mécanique rationnelle, de l'astronomie et des mathématiques générales dans les Facultés des sciences en France, par M. E. Vessiot.

b) Rapport sur les enseignements mathématiques d'ordre élevé dans les Facultés des Sciences d'Universités françaises, par M. Emile Borel.

Annexe. — Faculté des Sciences de Paris : programmes des certificats d'études supérieures pour l'année 1911.

c) Rapport sur les diplômes d'études supérieures de sciences mathématiques, par M. A. de Saint-Germain.

d) Rapport sur l'enseignement mathématique dans les instituts techniques des Facultés des sciences, par M. H. Vogt.

e) Rapport sur l'enseignement des mathématiques à l'Ecole normale supérieure et sur l'agrégation des sciences mathématiques, par M. Jules Tannery.

f) Note sur l'enseignement mathématique au Collège de France, par M. A. de Saint-Germain.

g) Rapport sur l'enseignement mathématique à l'école polytechnique, par M. G. Humbert.

h) Rapport sur l'enseignement mathématique à l'Ecole nationale des Ponts et Chaussées, par M. Maurice d'Ocagne.

i) Rapport sur l'enseignement des mathématiques à l'Ecole nationale supérieure des Mines par M. René Garnier.

j) Rapport sur l'enseignement mathématique à l'Ecole nationale des Mines de Saint-Etienne, par M. Friedel.

k) Note sur l'Ecole d'application du Génie maritime, par M. A. Janet.

Tome IV. — Enseignement technique, publié sous la direction de M. P. Rollet, Directeur de l'Ecole municipale professionnelle Diderot à Paris. — 212 p. (5 fr.) :

Introduction.

Ecoles pratiques de commerce et d'industrie. Programmes officiels (28 août 1909). Extraits concernant l'enseignement mathématique.

a) Rapport de M. Harang.

b) Rapport de M. Ch. Lagneaux.

c) Rapport de M. Ch. Lagneaux.

Ecoles nationales professionnelles. Programme de l'enseignement technique théorique.

d) Rapport sur l'enseignement des mathématiques dans les écoles nationales professionnelles (E. N. P.), par M. Larivière.

e) Rapport sur l'enseignement des mathématiques dans les écoles nationales professionnelles, par M. E. Tripard.

Ecoles d'arts et métiers. Programmes officiels du 9 mai 1910.

f) Rapport sur l'enseignement des mathématiques dans les écoles d'arts et métiers (1re année), par M. J. Roumajon.

g) Rapport sur l'enseignement des mathématiques dans les écoles d'arts et métiers (2e année), par M. Bezine.

h) Rapport sur l'enseignement de la mécanique dans les écoles d'arts et métiers (3e année), par M. Bazard.

Ecoles de commerce. — *i)* Rapport sur l'enseignement mathématique dans les établissements de la Chambre de Commerce de Paris par M. P. Mineur.

Conservatoire national d'arts et métiers. — *j)* Rapport sur l'enseignement des mathématiques au Conservatoire national des arts et métiers, par M. Carlo Bourlet.

Ecole centrale des arts et manufactures. — *k)* Rapport sur l'enseignement mathématique à l'école centrale des arts et manufactures, par M. P. Appell.

Appendice.

Tome V. — Enseignement des jeunes filles, publié sous la direction de Mlle Amieux, prof. au Lycée Victor-Hugo à Paris. — 95 p. (3 fr. 50) :

Aperçu général.

Enseignement secondaire. Introduction.

a) Rapport sur la place des mathématiques dans les plans d'études, l'organisation générale et l'enseignement obligatoire, par Mlle A. Amieux.

b) Rapport sur l'enseignement des mathématiques dans la 2e période et sur la préparation au baccalauréat et aux examens de l'enseignement secondaire féminin, par Mme Baudeuf.

c) Rapport sur l'enseignement des mathématiques à l'Ecole normale de Sèvres, par M. P. Appell.

Enseignement professionnel. Rapport sur les mathématiques dans l'enseignement professionnel des jeunes filles, par Mme Pivot et Mlle Fredon.

Enseignement primaire. Introduction.

a) Note sur l'Enseignement mathématique dans les écoles primaires élémentaires.

b) Rapport sur l'enseignement mathématique dans les écoles primaires supérieures de jeunes filles, par M. Tallent.

c) Sur l'enseignement mathématique dans les écoles normales d'Institutrices primaires.

d) Rapports sur l'enseignement mathématique à l'Ecole normale supérieure d'institutrices de Fontenay-aux-Roses, par MM. G. Fontené et G. Kœnigs.

HOLLANDE

Rapport sur l'enseignement mathématique dans les Pays-Bas, publié par la Sous-commission nationale, sous la direction de J. Cardinaal. — 1 vol. de 151 p.; 3 fr.; J. Waltman, Delft.

1. L'enseignement mathématique à l'école primaire.
2. L'enseignement mathématique aux « Burgeravondscholen » (écoles dites bourgeoises), écoles professionnelles, écoles de dessin, écoles professionnelles pour filles et écoles techniques.
3. Ecoles de marine.
4. L'enseignement mathématique aux écoles moyennes (Hoogere Burgerscholen). Ecoles moyennes à 3 années d'études.
5. Ecole moyenne à 5 années d'études.
6. Ecoles moyennes pour jeunes filles.
7. L'enseignement mathématique aux gymnases.

8. Les universités.

9. Académie technique.

10. L'enseignement mathématique aux instituts militaires de l'armée de terre dans les Pays-Bas.

11. Ecole de machinistes pour la marine à Hellevœtsluis.

12. Institut Royal de marine à Willemsoord.

13. Rapport complémentaire sur les propositions de la Commission d'Etat pour la réorganisation de l'enseignement, établie par Arrêté Royal du 21 mars 1903, n° 49.

HONGRIE

1. *Abhandlungen über die Reform des mathematischen Unterrichts in Ungarn.* — Im Auftrage der Mathematischen Reform Kommission des Landesvereins der Mittelschulprofessoren nach dem ungarischen Original deutsch herausgegeben von E. Beke und S. Mikola (1911). — 160 p.; 4 M. — B. G. Teubner, Leipzig.

Cette étude d'ensemble se trouve complétée par les dix rapports spéciaux ci-après (fr. 0,50 le fascicule; Librairie Georg, Genève)

2. Die Ausbildung der Mittelschulprofessoren, von J. Kürschak (1911). — 20 p.

3. Der heutige Stand des mathematischen Unterrichts am Königlich ungarischen Josefs-Polytechnikum (Technische Hochschule in Budapest), von G. Rados (1911). — 14 p.

4. Der Unterricht der Mathematik am Uebungsgymnasium, von P. v. Szabo (1912). — 17 p.

5. Der mathematische Unterricht an den Lehrerbildungsanstalten, von K. Goldziher (1912). — 13 p.

6. Der mathematische Unterricht an den höheren Gewerbeschulen und gewerblichen Fachschulen, von D. Arany (1912). — 15 p.

7. Der mathematische Unterricht an den Handelsschulen, von M. Havas und S. Bogyo (1912). — 13 p.

8. Der mathematische Unterricht an den Bürgerschulen, von J. Volenszky (1912). — 18 p.

9. Der mathematische Unterricht an den Mittelschulen (Gymnasien u. Realschulen, von E. Beke (1912). — 24 p.

In Vorbereitung :

10. Der mathematische Unterricht an den Volksschulen, von M. Bittenbinder.

11. Der mathematische Unterricht an den höheren Mädchenschulen, von A. Visnya.

ILES BRITANNIQUES

The following papers on the *Teaching of Mathematics in the United Kingdom* have been published by the Board of Education (Editeurs : Wyman and Sons, London) :

N° 1. Higher Mathematics for the Classical Sixth Form. By Mr. W. Newbold. — 14 p. Price 1 d.

N° 2. The Relations of Mathematics and Physics. By Dr. L. N. G. Filon. — 9 p. Price 1 d.

N° 3. The Teaching of Mathematics in London Public Elementary Schools. By Mr. P. B. Ballard. — 28 p. Price 2 d.

N° 4. The Teaching of Elementary Mathematics in English Public Elementary Schools. By Mr. H. J. Spencer. — 32 p. Price 2 1/2 d.

N° 5. The Algebra Syllabus in the Secondary School. By Mr. C. Godfrey. — 34 p. Price 2 1/2 d.

N° 6. The Correlation of Elementary Practical Geometry and Geography. By Miss Helen Bartram. — 8 p. Price 1 d.

N° 7. The Teaching of Elementary Mechanics. By Mr. W. D. Eggar. — 13 p. Price 1 d.

N° 8. Geometry for Engineers. By Professor D. A. Low. — 15 p. Price 1 1/2 d.

N° 9. The Organisation of the Teaching of Mathematics in Public Secondary Schools for Girls. By Miss Louisa Story. — 17 p. Price 1 1/2 d.

N° 10. Examinations from the School Point of View. By Mr. Cecil Hawkins. — 104 p. Price 9 d.

N° 11. The Teaching of Mathematics to Young Children. By Miss Irene Stephens. — 19 p. Price 1 1/2 d.

N° 12. Mathematics with relation to Engineering Work in Schools. By Mr. T. S. Usherwood. — 26 p. Price 2 d.

N° 13. The Teaching of Arithmetic in Secondary Schools. By Mr. G. W. Palmer. — 33 p. Price 2 1/2 d.

N° 14. Examinations for Mathematical Scholarships. By Dr. F. S. Macaulay and Mr. W. J. Greenstreet. — 53 p. Price 3 d.

N° 15. The Educational Value of Geometry. By Mr. G. St. L. Carson. — 17 p. Price 1 1/2 d.

N° 16. A School Course in Advanced Geometry. By Mr. C. V. Durell. — 14 p. Price 1 1/2 d.

N° 17. Mathematics at Osborne and Dartmouth. By Mr. J. W. Mercer and Mr. C. E. Ashford. — 41 p. Price 2 1/2 d.

N° 18. Mathematics in the Education of Girls and Women. By Miss E. R. Gwatkin, Miss Sara A. Burstall, and Mrs. Henry Sidgwick. — 32 p. Price 2 1/2 d.

N° 19. Mathematics in Scotch Schools. By Professor G. A. Gibson. — 49 p. Price 3 d.

N° 20. The Calculus as a School Subject. By Mr. C. S. Jackson. — 18 p. Price 1 1/2 d.

N° 21. The Relation of Mathematics to Engineering at Cambridge. By Professor B. Hopkinson. — 13 p. Price 1 1/2 d.

N° 22. The Teaching of Algebra in Schools. By Mr. S. Barnard. — 26 p. Price 1 1/2 d.

N° 23. Research and Advanced Study as a Training for Mathematical Teachers. By Professor G. H. Bryan. — 21 p. Price 1 1/2 d.

N° 24. The Teaching of Mathematics in Evening Technical Institutions. By Dr. W. E. Sumpner. — 9 p. Price 1 d.

N° 25. The Undergraduate Course in Pass Mathematics generally, and in relation to Economics and Statistics. By Professor A. L. Bowley. — 14 p. Price 1 1/2 d.

N° 26. The Preliminary Mathematical Training of Technical Students. By Mr. P. Abbott. — 17 p. Price 1 1/2 d.

N° 27. The Training of Teachers of Mathematics. By Dr. T.-P. Nunn. — 17 p. Price 1 1/2 d.

N° 28. Recent Changes in the Mathematical Tripos at Cambridge. By Mr. Arthur Berry. — 15 p. Price 1 1/2 d.

N° 29. Mathematics in the Preparatory School. By Mr. E. Kitchener. — 15 p. Price 1 1/2 d.

N° 30. Course in Mathematics for Municipal Secondary Schools. By Mr. L.-M. Jones. — 15 p. Price 1 1/2 d.

N° 31. Examinations for Mathematical Scholarships at Oxford. By Mr. A.-E. Jolliffe. — Examinations for Mathematical Scholarships at Cambridge. By G.-H. Hardy. — 22 p. Price 2 d.

N° 32. Parallel Straight Lines and the Method of Direction. By Mr. T.-James Garstang. — 8 p. Price 1 d.

N° 33. Practical Mathematics at Public Schools : Introduction. By Dr. H.-H. Turner. — Practical Mathematics at Clifton College. By Mr. R.-C. Fawdry. — Practical Mathematics at Harrow School. By Mr. A. W. Siddons. — Practical Mathematics at Oundle School. By Mr. F. W. Sanderson. — Practical Mathematics at Winchester College. By Mr. G.-M. Bell. — 36 p. Price 1 d.

N° 34. Mathematical Examinations at Oxford. By Mr. A.-L. Dixon. — 117 p. Price 16 d.

Ces rapports ont été réunis en *deux volumes* sous le titre : *The Teaching of Mathematics in the United Kingdom.* Part I & Part II. (*Special Reports on Educational subjects,* Volumes 26 et 27.) — Prix : T. I, 3 sh ; T. II, 1 sh. 9.

ITALIE

Atti della Sottocommissione italiana. (Les fascicules ne seront mis en vente qu'une fois réunis en volume).

1. Scuole infantili ed elementari, prof. Conti (Roma). — 39 p.

2. Scuole normali, prof. Conti (Roma), 71 p.

3. Scuole classiche :

a) I successivi programmi dal 1867 al 1910, prof. Scarpis (Bologna). — 11 p.

b) Critiche e proposte, prof. Fazzari (Palermo). — 16 p.

4. Scuole ed istituti tecnici, prof. Scorza (Cagliari). — 34 p.

5. Scuole industriali, professionali e commerciali, prof. Lazzeri (Livorno). — 19 p.

6. R. Accademia Navale di Livorno e R. Accademia Militare di Torino, prof. Lazzeri (Livorno). — 14 p.

7. Intorno all'ordinamento degli studi matematici nel primo biennio universitario in Italia, prof. Somigliana (Torino). — 11 p.

8. Sugli studi per la laurea in Matematica e sulla sezione di Matematica delle Scuole di Magistero, prof. Pincherle (Bologna). — 16 p.

9. Osservazioni e proposte circa l'insegnamento della matematica nelle scuole elementari, medie e di magistero, prof. Padoa (Genova). — 22 p.

10. Sui libri di testo di geometria per le scuole secondarie superiori, prof. Scorza (Cagliari). 15 p.

En préparation :

11. Sulla evoluzione degli insegnamenti geometrici nelle Università, prof. Severi (Padova).

JAPON

Tome I. — *Report on the teaching of mathematics in Japan*, prepared by the japanese Sub-commission. — 1 vol. de 550 p.

The Teaching of Mathematics :

I. Elementary Schools. — 61 p.

II. Middle Schools. — 69 p.

III. Higher Middle Schools. — 48 p.

IV. Faculty of Science of Imperial Universities. — Pour la traduction anglaise, voir chap. VIII. of the Summary Report.

V. Faculty of Technology of the Tokio Imperial University. — 7 p.

VI. Normal Schools. — 34 p.

VII. Training of (male) Teachers for Intermediate Schools. — 38 p.

VIII. Girl's High Schools. — 32 p.

IX. Normal Schools for Women. — 45 p.

X. Higher Normal Schools for Women. — 44 p.

XI. Commercial Schools and Colleges. — 25 p.

XII. Technical Schools and Colleges. — 42 p.

XIII. Schools under the Army Department. — 48 p.

XIV. Schools under The Navy Department. — 13 p.

XV. Schools under the Department of Communications. — 30 p.

Tome II. — *Summary Report on the Teaching of Mathematics in Japan*, by R. Fujisawa. — 238 p.

NORVÈGE

Les plans d'études des écoles techniques moyennes norvégiennes étant en revision, M. Alfsen, délégué, a dû retarder la publication de son rapport. Celui-ci portera le titre *Bericht über den mathematischen Unterricht in Norwegen* et comprendra les objets suivants :

I. Einleitung : Uebersicht über die Organisation des norwegischen Schulwesens.

II. Die Mathematik an den niederen und höheren Volkschulen.

III. Die Mathematik an den höheren Schulen (« Mittelschule » und « Gymnasium »).

IV. Die Mathematik an den Hochschulen (Universität in Christiania und Technische Hochschule in Drontheim).

V. Die Mathematik an den Spezialschulen.

VI. Die Seminare für Volkschullehrer.

VII. Die pädagogische Ausbildung der Lehrer der höheren Schulen.

ROUMANIE

L'enseignement mathématique en Roumanie. Enseignement secondaire, par G. Tzitzeica (Bucarest). — 16 p.

RUSSIE

1. *L'enseignement mathématique dans les universités, les écoles techniques supérieures et quelques-unes des écoles militaires*, par C. Possé. — 100 p. (3 fr.)

2. *L'enseignement mathématique dans les écoles de Finlande*, rédigé par une commission instituée par le Sénat impérial de Finlande. 52 p.

3. *Bericht über den mathematischen Unterricht an den russischen Realschulen*, von K. W. Vogt. — 16 p. (fr. 0,60)

4. *L'enseignement mathématique dans les écoles primaires et les écoles normales*, par M. S.

L'enseignement mathématique dans les gymnases de garçons du Ministère de l'Instruction publique et dans les *instituts de jeunes filles* du ressort des établissements de l'Impératrice Marie, par M. Kondratiev. — 29 p. (fr. 1,—)

5. *L'enseignement mathématique dans les Corps des cadets*, par M. Poprugenko.

Notice sur les cours pour la préparation des maîtres des Corps de cadets, par M. Makchéev. — 20 p.

6. *a)* Sur l'organisation de l'enseignement mathématique dans les *gymnases de jeunes filles* du ressort du Ministère de l'Instruction publique et à l'*Institut pédagogique de jeunes filles*. Par M. Michelson, prof. à cet institut.

b) Sur l'enseignement mathématique dans les *écoles industrielles* du ressort du Ministère de l'Instruction publique. Par MM. Kotournitzky et Hatzouk, professeurs à l'Institut technologique de St-Pétersbourg.

c) Sur l'enseignement des mathématiques dans les *gymnases de jeunes filles* dans l'arrondissement scolaire de Varsovie. Par M. Goriatchev, prof. à l'Université de Varsovie. — 37 p.

Rapports déjà rédigés en langue russe ; (en traduction).

a) Les mathématiques dans l'*Institut technologique de St-Pétersbourg*. Par Boris Coïalovitsch, prof. à cet institut.

b) Les mathématiques dans les *cours supérieurs de femmes (université de femmes)* à St-Pétersbourg. Par le même.

c) Les mathématiques dans les *cours supérieurs de femmes à Moscou*. Par M. Mlodzievski, anc. prof. à l'Université de Moscou.

d) Les mathématiques dans l'*Institut polytechnique de Varsovie*. Par M. Mordoukhaï-Boltowskoï, prof. à l'Université de Varsovie.

e) *Sur la préparation des maîtres pour les écoles moyennes secondaires*. Par M. Kagan, prof.-adjoint à l'Université d'Odessa.

f) Les mathématiques dans les *écoles de l'administration générale de l'agriculture*. Par M. N. N.

g) Les mathématiques à l'*Institut de Géodésie* de Moscou, par feu B. Struve.

SUÈDE

Der mathematische Unterricht in Schweden, herausgegeben von Dr. H. von Koch und Dr. E. Göransson. — Editeur : C. E. Fritze, Stockholm, 229 p., 4 fr.

Ecoles primaires et écoles normales, par H. Dahlgren : Die Mathematik an den Volksschulen und Volksschullehrerseminaren Schwedens, 52 p.

Ecoles réales, par E. Göransson et E. Hallgren : Die Mathematik an den schwedischen Realschulen, 28 p.

Gymnases, par E. Göransson : Die Mathematik an den schwedischen Gymnasien, 51 p.

Etablissements de jeunes filles, par O. Josephson et Anna Rönström : Die Mathematik an den höheren Mädchenschulen in Schweden, 23 p.

Ecoles professionnelles élémentaires, par K.-L. Hagström, G. Erikson et C. Heuman : Die Mathematik an elementartechnischen Gewerbeschulen, 22 p.

Ecoles techniques moyennes, par O. Gallander : Der mathematische Unterricht an den technischen Mittelschulen, 8 p.

Ecoles techniques supérieures, par H. von Koch : Die Mathematik an der technischen Hochschule in Stockholm, 13 p.

Universités, par A. Wiman : Die Mathematik an den schwedischen Universitäten, 18 p.

SUISSE

L'Enseignement mathématique en Suisse. Rapports de la Sous-commission suisse publiés sous la direction de H. Fehr. — 1 vol., XVI et 756 p., 18 fr., en 8 fascicules en vente séparément. Georg et Cie, Genève et Bâle.

Fasc. 1. — Les travaux préparatoires : Rapport préliminaire sur l'organisation de la Commission et le plan général de ses travaux, publié au nom du Comité central par H. Fehr, secrétaire-général de la Commission (en français et en allemand).

Organisation des travaux en Suisse. — 43 p., 1 fr. 50.

Fasc. 2. — Aperçu général, par H. Fehr.

Der mathematische Unterricht an den schweizerischen Primarschulen, von Just. Stöcklin.

Der mathematische Unterricht an den schweizerischen Sekundarschulen, von Badertscher, Bern. — 106 p., 2 fr. 25.

Fasc. 3. — Der mathematische Unterricht an den höheren Mädchenschulen der Schweiz, von E. Gubler, Zürich.

Der mathematische Unterricht an den Lehrer- und Lehrerinnenseminarien der Schweiz, von F. R. Scherrer, Küsnacht.

Organisation und Methodik des mathematischen Unterrichts in den Landerziehungsheimen, von K. Matter, Frauenfeld. — 109 p., 2 fr. 25.

Fasc. 4. — Der mathematische Unterricht an den schweizerischen Gymnasien und Realschulen, von K. Brandenberger, Zürich. — 167 p., 3 fr. 50.

Fasc. 5. — Les mathématiques dans l'enseignement technique moyen en Suisse, par L. Crelier, Bienne. — 112 p., 2 fr. 25.

Fasc. 6. — Les mathématiques dans l'enseignement commercial suisse, par L. Morf, Lausanne. — 70 p., 2 fr.

Fasc. 7. — Der mathematische Unterricht an der Eidgenössischen Technischen Hochschule, von M. Grossmann, Zürich. — 52 p., 2 fr.

Fasc. 8. — L'Enseignement mathématique à l'Ecole d'Ingénieurs de l'Université de Lausanne, par M. Lacombe, Lausanne.

Der mathematische Unterricht an den Schweizerischen Universitäten, von J. H. Graf, Bern. — 72 p., 2 fr. 25.

Dépôt central de vente des publications concernant la Commission internationale.

La Librairie Georg & Cie, Genève et Bâle, se charge de fournir toutes les publications concernant la Commission internationale de l'enseignement mathématique.

---

einiges über den III. Band hinzufügen, in welchem gewisse allgemeine Fragen des höheren mathematischen Unterrichts erörtert werden.

Ueber die Reform des mathematischen Unterrichts ist in den letzten Jahrzehnten in Deutschland viel verhandelt worden, es ist deswegen — zumal es sich um eine Bewegung handelt, die die ganze Kulturwelt ergriffen hat, — in der ersten Abhandlung die Entwicklung der mathematischen Unterrichtsreform in Deutschland übersichtlich dargestellt worden.

Die zweite Abhandlung beschäftigt sich mit der Beziehung der Mathematik und der Physik im Schulunterricht. Es wird an einer Reihe von Beispielen nachgewiesen, welchen Gewinn der physikalische Unterricht aus einem zweckmässigen Mathematikunterricht ziehen kann. Wir dürfen annehmen, dass diese Abhandlung namentlich auch in dem Vaterlande und an der Universität eines Newton Beachtung finden wird.

Die nächsten drei Abhandlungen beschäftigen sich wesentlich mit Anwendungen der Mathematik, nämlich mit der darstellenden Geometrie, mit der Astronomie und mit den kaufmännischen Aufgaben im mathematischen Unterricht der höheren Schulen. Daran schliesst sich eine umfangreiche Abhandlung über die Geschichte der Mathematik als ein belebendes Element im höheren Schulunterricht.

Die letzte der bis jetzt vorliegenden Abhandlungen dieses III. Bandes schlägt die Brücke von der Mathematik zur Philosophie. In ihr wird gezeigt, wie sich auf der obersten Stufe der höheren Schulen die Mathematik nach philosophischer Richtung verwerten lässt. Ich meine, dass diese Darstellung sehr viele Anregungen enthält, die geeignet sind, einen zusammenfassenden Abschluss des Mathematikunterrichts zu ermöglichen und die allgemeine kulturelle Bedeutung der Mathematik in das rechte Licht zu setzen.

Obwohl in allen Bänden des deutschen Berichts wiederholt die Ausbildung der Lehrer für höhere Schulen berücksichtigt wird, erschien es doch zweckmässig, eine eigene Abhandlung über das Studium der Mathematik an den deutschen Universitäten seit 1870 herauszugeben. Leider ist es nicht möglich gewesen, den bereits in Angriff genommenen Bericht über diesen Gegenstand in Cambridge vorzulegen. Seine besondere Wichtigkeit brauche ich nicht zu betonen, denn es liegt auf der Hand, dass der Kern jeder Unterrichtsreform in der Heranbildung geeigneter Lehrkräfte besteht.

Wenn unsere Abhandlungen auch noch nicht vollständig vorliegen, so ergibt sich — wie wir hoffen — doch schon jetzt ein deutliches Bild von den deutschen Schulverhältnissen. Wir erkennen, dass seit einiger Zeit überall ein moderner mathematischer Unterricht Platz greift, in welchem einerseits die Ausbildung der Raumanschauung, andererseits die Entwicklung des Funktionsbegriffs eine beherrschende Rolle spielen, und in dem alles, was auf reine Routine hinausläuft, möglichst eingeschränkt wird. Sein Endziel bildet Ueberführung zur Infinitesimalrechnung, logische und philosophische Durchdringung der Mathematik und Verständnis für die Bedeutung unserer Wissenschaft und ihrer Anwendungen für die Kultur der Gegenwart. Mit dieser Modernisierung des mathematischen Unterrichts, der entsprechende Bewegungen in andern Schulfächern parallel gehen, ist naturgemäss eine gewisse Uniformisierung des Unterrichts in den verschiedenen Teilen Deutschlands eingetreten. Trotzdem besitzt dieser ein grosses Mass von Freiheit, die geradezu für Deutschland charakteristisch ist, und der sich in andern Ländern kaum etwas Aehnliches an die Seite stellen lässt. Um diese Freiheit zu kennzeichnen, will ich erwähnen, dass die Lehrer nur

an allgemeine methodische Richtlinien gebunden sind, dass sie also nicht dem Zwange des eingeführten Lehrbuches unterliegen. Ein fernerer Beweis liegt in der Tatsache, dass die Aufgaben für die Abschlussprüfung nicht von einer Zentralstelle gestellt, sondern von den Lehrern selbst vorgeschlagen und der Schulbehörde zur Genehmigung vorgelegt werden.

Wie schon hervorgehoben worden ist, bildet die Reform des mathematischen Unterrichts nur einen Teil der Umgestaltung, die der Unterricht an den höheren Schulen während der letzten Jahrzehnte erfahren hat und die zum Ziele hat, die Erziehung der Jugend zur Mitarbeit an der modernen Kultur in den Mittelpunkt zu stellen. Von diesem Standpunkte aus gewinnt der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht eine ebenbürtige Bedeutung und Stellung neben dem historisch-philologischen. Seine Aus- und Umgestaltung war daher eine Aufgabe, deren Lösung nicht nur die Schulmänner, sondern auch die Vertreter der Naturwissenschaft und der Technik als dringend erkannten. Aus dieser Einsicht heraus ist 1904 die Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Aerzte hervorgegangen, die sich später zum Deutschen Ausschuss für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht erweitert hat. Ich möchte mir deshalb erlauben, gleichzeitig mit den Abhandlungen des deutschen Unterausschusses der Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission die bisher erschienenen Schriften des genannten Deutschen Ausschusses auf den Tisch des Hauses zu legen. »

Autriche. — En présentant le volume des rapports de la Sous-commission autrichienne, M. le prof. E. Czuber (Vienne), délégué, s'est exprimé en ces termes :

Der mathematische Unterricht in Oesterreich. — « Das Schulwesen in Oesterreich ist in seinen Grundzügen einheitlich organisiert ; es war daher möglich, über die einzelnen Schulkategorien einheitliche Berichte zu erstatten. Nur das Land Galizien nimmt eine gewisse Sonderstellung in Bezug auf die Regelung seines Schulwesens ein ; die daraus entspringenden, übrigens nicht tiefgreifenden Unterschiede sind in einem besondern Berichte zusammengefasst.

Die Universitäten Oesterreichs blicken zum Teil auf eine lange ruhmvolle Vergangenheit zurück. Ihr oberstes Prinzip ist unbeschränkte Lehr- und Lernfreiheit.

Die Technischen Hochschulen, zu diesem Range 1872 erhoben, sind die Fortbildung von Instituten, deren Gründung am Beginn des vorigen Jahrhunderts ihren Anfang nahm. Auch ihnen liegt das Prinzip der Lehr- und Lernfreiheit zugrunde, allerdings mit jenen Einschränkungen, die mit der Aufstellung von Lehrplänen und mit Prüfungsordnungen naturgemäss verknüpft sind.

Aehnliches gilt von den einer späteren Zeit entstammenden Montanistischen Hochschulen.

Das Mittelschulwesen basiert in der Hauptsache noch auf der denkwürdigen Organisation vom Jahre 1849, der eine bleibende Stellung in der Schulgeschichte Oesterreichs gesichert ist. In höherem Masse gilt dies von dem Gymnasium als von der Realschule, die im Laufe der 60 Jahre ihres Bestandes mancherlei durch den Gang der materiellen Kultur bedingte Wandlungen durchzumachen hatte. Eine eingreifende Reorganisation ist unserem Mittelschulwesen in jüngster Zeit zuteil geworden, zu der zwei

einiges über den III. Band hinzufügen, in welchem gewisse allgemeine Fragen des höheren mathematischen Unterrichts erörtert werden.

Ueber die Reform des mathematischen Unterrichts ist in den letzten Jahrzehnten in Deutschland viel verhandelt worden, es ist deswegen — zumal es sich um eine Bewegung handelt, die die ganze Kulturwelt ergriffen hat, — in der ersten Abhandlung die Entwicklung der mathematischen Unterrichtsreform in Deutschland übersichtlich dargestellt worden.

Die zweite Abhandlung beschäftigt sich mit der Beziehung der Mathematik und der Physik im Schulunterricht. Es wird an einer Reihe von Beispielen nachgewiesen, welchen Gewinn der physikalische Unterricht aus einem zweckmässigen Mathematikunterricht ziehen kann. Wir dürfen annehmen, dass diese Abhandlung namentlich auch in dem Vaterlande und an der Universität eines Newton Beachtung finden wird.

Die nächsten drei Abhandlungen beschäftigen sich wesentlich mit Anwendungen der Mathematik, nämlich mit der darstellenden Geometrie, mit der Astronomie und mit den kaufmännischen Aufgaben im mathematischen Unterricht der höheren Schulen. Daran schliesst sich eine umfangreiche Abhandlung über die Geschichte der Mathematik als ein belebendes Element im höheren Schulunterricht.

Die letzte der bis jetzt vorliegenden Abhandlungen dieses III. Bandes schlägt die Brücke von der Mathematik zur Philosophie. In ihr wird gezeigt, wie sich auf der obersten Stufe der höheren Schulen die Mathematik nach philosophischer Richtung verwerten lässt. Ich meine, dass diese Darstellung sehr viele Anregungen enthält, die geeignet sind, einen zusammenfassenden Abschluss des Mathematikunterrichts zu ermöglichen und die allgemeine kulturelle Bedeutung der Mathematik in das rechte Licht zu setzen.

Obwohl in allen Bänden des deutschen Berichts wiederholt die Ausbildung der Lehrer für höhere Schulen berücksichtigt wird, erschien es doch zweckmässig, eine eigene Abhandlung über das Studium der Mathematik an den deutschen Universitäten seit 1870 herauszugeben. Leider ist es nicht möglich gewesen, den bereits in Angriff genommenen Bericht über diesen Gegenstand in Cambridge vorzulegen. Seine besondere Wichtigkeit brauche ich nicht zu betonen, denn es liegt auf der Hand, dass der Kern jeder Unterrichtsreform in der Heranbildung geeigneter Lehrkräfte besteht.

Wenn unsere Abhandlungen auch noch nicht vollständig vorliegen, so ergibt sich — wie wir hoffen — doch schon jetzt ein deutliches Bild von den deutschen Schulverhältnissen. Wir erkennen, dass seit einiger Zeit überall ein moderner mathematischer Unterricht Platz greift, in welchem einerseits die Ausbildung der Raumanschauung, andererseits die Entwicklung des Funktionsbegriffs eine beherrschende Rolle spielen, und in dem alles, was auf reine Routine hinausläuft, möglichst eingeschränkt wird. Sein Endziel bildet Ueberführung zur Infinitesimalrechnung, logische und philosophische Durchdringung der Mathematik und Verständnis für die Bedeutung unserer Wissenschaft und ihrer Anwendungen für die Kultur der Gegenwart. Mit dieser Modernisierung des mathematischen Unterrichts, der entsprechende Bewegungen in andern Schulfächern parallel gehen, ist naturgemäss eine gewisse Uniformisierung des Unterrichts in den verschiedenen Teilen Deutschlands eingetreten. Trotzdem besitzt dieser ein grosses Mass von Freiheit, die geradezu für Deutschland charakteristisch ist, und der sich in andern Ländern kaum etwas Aehnliches an die Seite stellen lässt. Um diese Freiheit zu kennzeichnen, will ich erwähnen, dass die Lehrer nur

an allgemeine methodische Richtlinien gebunden sind, dass sie also nicht dem Zwange des eingeführten Lehrbuches unterliegen. Ein fernerer Beweis liegt in der Tatsache, dass die Aufgaben für die Abschlussprüfung nicht von einer Zentralstelle gestellt, sondern von den Lehrern selbst vorgeschlagen und der Schulbehörde zur Genehmigung vorgelegt werden.

Wie schon hervorgehoben worden ist, bildet die Reform des mathematischen Unterrichts nur einen Teil der Umgestaltung, die der Unterricht an den höheren Schulen während der letzten Jahrzehnte erfahren hat und die zum Ziele hat, die Erziehung der Jugend zur Mitarbeit an der modernen Kultur in den Mittelpunkt zu stellen. Von diesem Standpunkte aus gewinnt der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht eine ebenbürtige Bedeutung und Stellung neben dem historisch-philologischen. Seine Aus- und Umgestaltung war daher eine Aufgabe, deren Lösung nicht nur die Schulmänner, sondern auch die Vertreter der Naturwissenschaft und der Technik als dringend erkannten. Aus dieser Einsicht heraus ist 1904 die Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Aerzte hervorgegangen, die sich später zum Deutschen Ausschuss für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht erweitert hat. Ich möchte mir deshalb erlauben, gleichzeitig mit den Abhandlungen des deutschen Unterausschusses der Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission die bisher erschienenen Schriften des genannten Deutschen Ausschusses auf den Tisch des Hauses zu legen. »

Autriche. — En présentant le volume des rapports de la Sous-commission autrichienne, M. le prof. E. Czuber (Vienne), délégué, s'est exprimé en ces termes :

Der mathematische Unterricht in Oesterreich. — « Das Schulwesen in Oesterreich ist in seinen Grundzügen einheitlich organisiert ; es war daher möglich, über die einzelnen Schulkategorien einheitliche Berichte zu erstatten. Nur das Land Galizien nimmt eine gewisse Sonderstellung in Bezug auf die Regelung seines Schulwesens ein ; die daraus entspringenden, übrigens nicht tiefgreifenden Unterschiede sind in einem besondern Berichte zusammengefasst.

Die Universitäten Oesterreichs blicken zum Teil auf eine lange ruhmvolle Vergangenheit zurück. Ihr oberstes Prinzip ist unbeschränkte Lehr- und Lernfreiheit.

Die Technischen Hochschulen, zu diesem Range 1872 erhoben, sind die Fortbildung von Instituten, deren Gründung am Beginn des vorigen Jahrhunderts ihren Anfang nahm. Auch ihnen liegt das Prinzip der Lehr- und Lernfreiheit zugrunde, allerdings mit jenen Einschränkungen, die mit der Aufstellung von Lehrplänen und mit Prüfungsordnungen naturgemäss verknüpft sind.

Aehnliches gilt von den einer späteren Zeit entstammenden Montanistischen Hochschulen.

Das Mittelschulwesen basiert in der Hauptsache noch auf der denkwürdigen Organisation vom Jahre 1849, der eine bleibende Stellung in der Schulgeschichte Oesterreichs gesichert ist. In höherem Masse gilt dies von dem Gymnasium als von der Realschule, die im Laufe der 60 Jahre ihres Bestandes mancherlei durch den Gang der materiellen Kultur bedingte Wandlungen durchzumachen hatte. Eine eingreifende Reorganisation ist unserem Mittelschulwesen in jüngster Zeit zuteil geworden, zu der zwei

immer dringlicher gestellte Forderungen den Anstoss gaben : Entlastung der Jugend und Herstellung eines bessern Verhältnisses zwischen der Ausbildung des Geistes und des Körpers. Gleichzeitig mit der Reorganisierung der bestehenden Mittelschulen sind bei diesem Anlasse auch neue Schultypen ins Leben gerufen worden, die einerseits den mannigfachen Bildungsbedürfnissen besser Rechnung tragen und die von vielen Seiten gewünschte Hinausschiebung der Entscheidung über die Berufswahl ermöglichen sollen.

Die intensive gewerblich-industrielle Entwicklung seit der Mitte des vorigen Jahrhunderts hat eine sehr breit angelegte Gattung von Schulen zur Folge gehabt : die gewerblichen Lehranstallten mannigfacher Zwecke und der verschiedensten Unterrichtsniveaus.

Das Volksschulwesen ist nach den Grundsätzen des Reichsvolksschulgesetzes vom Jahre 1869 aufgebaut.

Für die über die Grenzen der Volks- und Bürgerschule hinausgehende Heranbilduug des weiblichen Geschlechts wird von staatswegen seit 1900 gesorgt.

Neben diesen Lehranstalten allgemeinen Charakters besitzt Oesterreich noch einige besondere Unterrichtsstätten, die ihre eigene Organisation haben ; dazu gehören auch die militärischen Bildungsanstalten.

Die Erkenntnis von der hohen Bedeutung der Mathematik für die geistige Ausbildung wie für das praktische Leben hat in Oesterreich längst Wurzel gefasst ; dem mathematischen Unterricht wird in allen Schulgattungen die grösste Aufmerksamkeit zugewendet. Es sind gute Unterrichtsmethoden ausgebildet werden, auf die Anschaulichkeit wird überall besonderer Nachdruck gelegt. Die Schulbücherliteratur ist verhältnismässig reich und gut entwickelt ; auch die für die nichtdeutschen Schulen bestimmten Unterrichtsmittel nehmen an Zahl und Selbständigkeit zu.

Die vorhin erwähnte Mittelschulreform hat sich auf dem Gebiete der Mathematik als Unterrichtsgegenstand von drei Grundgedanken leiten lassen : Einschränkung des Lehrstoffs auf Materien von wirklichem Bildungswert und seine Vereinfachung ; intensive Verbindung des theoretischen Unterrichts mit den Bedürfnissen des praktischen Lebens ; Einführung des Funktionsbegriffs zur Vertiefung des Verständnisses und seine weitere Verfolgung bis zu den Grundbegriffen der Infinitesimalrechnung, die im physikalischen Unterrichte praktische Verwendung finden sollen. Es wird einer längeren Erfahrung bedürfen, um die Wirkung dieser Massnahmen beurteilen zu können.

Unsere Berichte geben ein Bild der heutigen Gestaltung des Unterrichtsin den einzelnen Schulgattungen und in den singulären Schulorganismen. Dabei ist auch die darstellende Geometrie, die sich in Oesterreich seit jeher einer guten Pflege zu erfreuen hatte, als Teil des mathematischen Unterrichts einbezogen worden. Des weiteren bringen die Berichte eine kritisch vergleichende Uebersicht über die an den Mittelschulen und ihnen nahe stehenden Anstalten gebräuchlichen mathematischen Lehrbücher. Ein besonderer Bericht ist der Stellung der Mathematik im physikalischen Unterricht gewidmet, wo das richtige Verhältnis zwischen naturwissenschaftlicher Anschauung und mathematischer Deduktion immer noch eine umstrittene Frage bildet. Von dem Grundsatze geleitet, dass für den Fortschritt auf unterrichtlichem Gebiete in erster Linie die Qualität der Lehrer massgebend ist, hat unsere Kommission auch zwei Berichte veranlasst, die sich mit der Frage der Heranbildung der Mittelschullehrer mathematischer Fachrichtung beschäf-

tigen; einer dieser Berichte hat die neuesten Massnahmen zum Gegenstande, welche die österreichische Unterrichtsverwaltung in dieser Richtung getroffen hat.

Indem ich die Berichte auf den Tisch des Hauses lege, spreche ich die Hoffnung aus, dass wir aus unserer Beteiligung an dem grossen internationalen Unternehmen für die Zukunft unserer Schulen grossen Nutzen ziehen werden. Es sei mir aber auch gestattet, dem Wunsche Ausdruck zu geben, dass unsere Berichte einen kleinen Beitrag liefern mögen zu dem hohen Ziele, das dem Kongress bei Einsetzung der Internationalen Kommission für den mathematischen Unterricht vorgeschwebt hat. »

Belgique. — Le délégué belge M. J. Neuberg ayant été empêché pour des raisons de santé de se rendre à Cambridge, M. Clevers, professeur à l'Athénée royal de Gand, a été chargé de le remplacer. Il dépose le premier volume des rapports de la Sous-commission belge et résume à grands traits les quatre rapports qui y sont contenus et dont on trouvera la liste plus haut. Deux autres rapports paraîtront sous peu ; ce sont ceux de MM. Rombaut « Sur les mathématiques dans les Ecoles industrielles et professionnelles » et de M. J. Neuberg « Sur les mathématiques dans l'enseignement supérieur ».

Brésil. — M. R. Gabaglia, délégué, annonce que le Gouvernement brésilien adhère officiellement à la Commission internationale, puis il donne un aperçu de l'organisation des études dans son pays. Une étude complète, portant sur l'ensemble des établissements fournissant un enseignement mathématique, sera publiée d'ici au prochain congrès.

Danemark. — En l'absence du délégué, M. le Prof. P. Heegaard, empêché d'assister au Congrès, le Secrétaire-général présente le volume contenant les rapports sur l'enseignement mathématique en Danemark. Rédigé d'abord en danois, sous la direction de M. Heegaard, les rapports ont ensuite été traduits en allemand. Ils fournissent un tableau très complet des tendances actuelles qui se manifestent dans l'enseignement mathématique de ce pays.

Espagne. — Le nouveau délégué espagnol, M. Rueda (Madrid), nommé en remplacement de M. G. de Galdeano, a été empêché d'assister à la réunion. Parlant en son nom, M. O. de Toledo présente le premier volume des mémoires rédigés par la Sous-commission espagnole. Le second volume, actuellement en préparation, comprendra notamment les rapports sur l'enseignement mathématique dans les lycées, dans les écoles d'ingénieurs et dans les écoles militaires.

Etats-Unis. — M. J. W. A. Young (Chicago) dépose le volume renfermant les travaux de la Sous-commission américaine et donne lecture du rapport ci-après :

The Report of the United States of North America. — I. *Address of presentation.* The American Report has already been published in full and widely circulated, so that only a few words are needed in making its formal presentation to the Congress.

The Report consists of a general report giving a bird's eye view of the

entire field and twelve special reports, each subdivided further, giving detailed views of particular fields and together covering the entire ground of mathematical instruction in the United States. In the preparation of these reports, nearly 300 of the leading mathematicians and teachers of the country have collaborated.

The excellent « Preliminary Report » of the Central Committee was in the hands of all as sounding the keynote and giving the general program of the work. Accordingly the reports are essentially descriptive in character giving an account both of actual conditions and present day tendencies, but making no attempt to provide solutions for the problems, large and small, with which the United States has to deal. Naturally, however, many such problems have been mentioned in the reports. These latter must therefore surely prove stimulating and helpful to our country by explicitly bringing the conditions and needs of the entire mathematical field to the simultaneous attention of the whole country in a single, systematic presentation.

Time will not permit me to speak to-day of more than one of the problems in the teaching of mathematics which the United States now confront. In this international gathering, perhaps the most interesting one to mention, is one springing out of the exceptional measure of freedom which American educational institutions enjoy. There are in the United States thousands of independent centres of educational authority, each legally as free to treat its work without regard to any other or to any common superior, as are England, Russia and Japan. This absence of central authority and legislation with its attendant constraint, is accompanied by a corresponding absence of central and authoritative study of problems with its attendant stimulus and helpfulness. How to secure for the work in mathematics some of those benefits which can be attained only by concerted study and action, without sacrificing an undue measure of that local liberty which the spirit of the country demands, is one of the most serious problems now confronting the United States.

Mr Chairman : I have the honor now formally to present to the Congress, the Report of the United States of North America.

II. *Written sketch of American conditions.* In the United States of North America there are 48 States, each of which is self-governing, except in those items specially entrusted to the central Government by the Constitution. Among these items the formation and administration of an educational system is not found. Consequently there exists no national authority in educational matters in the United States, the largest unit of authority being the State. That there are not 48 or more widely different educational systems in the country, that a large measure of uniformity does exist in the educational work of the whole country, that it is possible to speak of a single educational system found (with local variations) throughout the whole country, is due simply to the homogeneity of thought and life of the country and not to any constitutional requirement.

Normally the pupil passes in order through the following types of schools : *Kindergarten*, 3 years : (age at entrance 3 years) ; *Elementary School*, 8 years : (age at entrance 6 years) ; *Secondary School*, 4 years : (age at entrance 14 years) ; *College, or institution of Collegiate rank*, 4 years ; (age at entrance 18 years) ; *University, or institution of University rank*, 3 or more years : (age at entrance 22 years). Generally speaking, the completion of the work of an elementary school is required for admission to a secon-

dary school; similarly, completion of the work of a secondary school is prerequisite for admission to an institution of collegiate rank, and finally the diploma of a collegiate institution is the basis of formal admission to university work. There is practically but one type of the elementary school, which is the common basis for all subsequent work. In the other institutions there are various types and curricula, but generally speaking it is possible to pass (with more or less supplementary work) from any type of secondary school to any collegiate institution and thence to any university, or to change from one type of institution or curriculum to another while passing through it.

One of the gravest problems of American instruction in mathematics, from the lowest to the highest, is that of the adequate preparation of the teachers. This is, of course, more or less of a problem everywhere, but the peculiar difficulty of American conditions will appear from a study of our reports. Suddenly, within less than two generations, a nation has been confronted with the demand for universal education. This demand would be serious enough with a population that was static as to numbers or static as to residence; but when the population has been multiplied by three, when children have been continually changing from place to place, when the school has had to teach not only mathematics but also conversational English to the children of a million immigrants a year, when the country has had not only to maintain its schoolhouses on the original territory but to provide for a million square miles besides, and when the increase in trade, in manufacture, and in wealth in general has been such as to draw its most active men into business, the solution of the educational problem has not been a simple one. Since the best type of men could not be secured in any considerable number, owing to the financial opportunities offered by a new country, since teaching was one of the few financial openings for women, and since in the earlier school years the work of the woman is more satisfactory than that of the man, there has come about a state of affairs not to be found in any of the older countries. To-day four-fifths of the teachers in our elementary schools are women, and only a relatively small number remain in the profession more than a few years. The problem of training such an army of women teachers, most of whom remain in the schools but a relatively short time, has been and is one of great difficulty, and its influence upon American education in general and upon elementary mathematics in particular is serious.

The question of improving the work in arithmetic has been much agitated during recent years, and this agitation has led to several good results. In the first place, the past quarter of a century has seen a weeding out of most of the obsolete applications of arithmetic. To-day it must be said for the subject that a large per cent of the problem material represents modern conditions of life, and is of a sufficiently varied character to meet the reasonable needs of all classes.

A second improvement of great importance has resulted from the consideration of child psychology. Apart from details of no particular significance, one feature stands out prominently — that the subject-matter of arithmetic is better arranged than formerly to arouse the interest and to meet the immediate needs of the child.

A third point worthy of mention is the growing recognition of the fact that no textbook can meet all local conditions with respect to appropriate

material for problems. Teachers are recognizing the value of themselves securing practical problems that represent the industries of their respective localities, both for the interest that they have for the pupils and for their value in the life of the community. With the abandonment of a number of obsolete topics during the past quarter of a century has come the possibility of reducing the time devoted to arithmetic, of supplying other topics of the modern businessworld, or of taking advantage of this saving of time by introducing a year of algebra and geometry. As a matter of fact, all three of these results have been partly attained.

The rapid growth of industry in recent years has had its effect upon the mathematics of the elementary schools, chiefly in respect to the nature of the topics and problems in the last two years (the seventh and eighth grades). The early occupations of the people of the country were agriculture and retail trade, and the topics of arithmetic were selected accordingly. At present the urban population is increasing much more rapidly than the rural, and industry has come to be controlled by large corporations. As a result, the agricultural problem is less in vogue, and the problem of the city and industrial type is more prominent.

The secondary schools of the United States may be classified as general and technical, the former having general culture as their primary aim, while the latter aim to prepare more or less directly and completely for certain occupations. As the technical schools have arisen largely during the past decade only, and are of the most varied character, their diverse curricula are as yet in the earliest stages of their evolution, and the problem of the modification of the work in mathematics as found in the general schools, so as to adapt it more effectively to the purposes of the various types of technical schools, is one that now calls for careful study.

The last few decades have witnessed no thorough-going remodelling throughout the United States of the secondary curriculum in mathematics at all comparable with those that have taken place in several European countries. A great interest in improving the work in mathematics has recently been aroused, however, due in no small degree to the world agitation of the International Commission.

The curriculum in mathematics in secondary institutions with a full course of four years varies but little in the great majority of cases from the following average :

First year : First Course in Algebra.

Second year : Plane Geometry begun and completed.

Third year : First half year, Second Course in Algebra (through, quadratics).
Second half year, Solid Geometry begun and completed.

Fourth year : First half year, Third Course in Algebra.
Second half year, Plane Trigonometry.

The Courses of the first two years are generally required, the others are usually elective.

Marked tendencies to change the curriculum in various details are distinctly noticeable in the country, and seem to be gaining in strength. Thus, there are tendencies to omit geometric proofs that are either obvious or too difficult ; to transfer the more difficult portions of the algebraic matter hitherto given in the first year to a later year ; to avoid algebraic manipulations, of greater complexity than is requisite to prepare pupils thoroughly

for the work that lies beyond ; to give more prominence to the equation ; and to introduce more problems from physics and other sciences and from practical life. It has also been proposed to redistribute the subject-matter of algebra and geometry as now taught in the secondary schools (without altering either the ground ultimately covered or the total amount of the time given to mathematics) so that algebra and geometry should be taught simultaneously during the years in which they are now taught successively. This question, the answer to which depends largely upon the preparation of teachers and other local conditions, should have serious consideration in the near future.

It has been suggested that with a little enrichment of collegiate instruction, it would be possible to require the following minimum preparation for teaching in the secondary schools :

a) Trigonometry, college algebra, analytic geometry.

b) Surveying, or descriptive geometry, or elementary astronomy.

c) The differential and integral calculus with applications to geometry, mechanics and physics.

d) Modern geometry.

e) The elements of analytic mechanics.

f) The elements of theoretic and laboratory physics.

g) Algebra from a modern standpoint.

h) One or more courses introductory to important fields of modern mathematics.

i) One or more courses on the history of mathematics.

j) One or more courses on the teaching of mathematics.

The requirements in mathematics with which all pupils who are to be admitted to the better colleges and technological schools of the country are to-day obliged to conform are elementary algebra through quadratic equations, plane geometry, and sometimes solid geometry. In the first collegiate year, additional algebra, trigonometry and analytic geometry are usually successively taught. In the first course in the calculus, generally taken in the second year, the integral as the limit of a sum is introduced at an early stage, and numerous applications of the calculus to centers of gravity, moments of inertia, fluid pressures, attractions, kinetic energy, catenaries and arches, strings on rough surfaces, and the dynamics of a particle, as well as to the traditional subject of curves and surfaces — differential geometry — are taken up. It is in the course in the calculus that the convergence of infinite series and the application of power series to computation and to the development of functions are treated. This work is generally elective save in schools of engineering. The elective courses also include those courses which are usually taken just after the first course in the calculus or simultaneously with it, namely : *a)* Modern geometry ; *b)* Mechanics ; *c)* Second Course in the calculus ; *d)* Differential equations ; *e)* Determinants and the theory of equations. To these may be added descriptive geometry and surveying. In technological schools some of these courses are prescribed for certain classes of students.

The purpose of advanced instruction has been well defined as fourfold :

I. To impart knowledge.

II. To develop power and individual initiative.

III. To lead the student to express adequately and clearly what he knows.

IV. To awaken the love of knowledge and to impart scholarly ideals.

The requirements for the master's degree almost invariably consist in at least one year's work beyond a bachelor's degree granted by an institution of good standing. The work must be largely in one field, as, for example, in mathematics.

For the doctor's degree a distinctly higher requirement is enforced. In all American universities of good standing it is distinctly a research degree. In several of the stronger universities it has a standard at least as high as the best European standards.

France. — M. C. Bourlet (Paris) excuse tout d'abord M. A. de Saint-Germain, président de la délégation française, puis il donne un aperçu des cinq volumes publiés par sa Sous-commission et rappelle les remarques générales sur l'enseignement mathématique en France qu'il avait fournies l'année précédente à Milan.

Compte rendu sommaire des publications de la Sous-commission. — Ces publications consistent principalement en une série de rapports répartis en cinq volumes qui sont consacrés le 1er à l'*enseignement primaire*, le 2e à l'*enseignement secondaire*, le 3e à l'*enseignement supérieur*, le 4e à l'*enseignement technique*, le 5e à celui des *jeunes filles*. Chaque rapporteur indique l'organisation, les programmes, les méthodes, les tendances et les améliorations qui lui semblent désirables pour la section dont il s'occupe. Il est entendu, quand je parlerai d'une école, d'une classe, que j'envisage exclusivement l'enseignement mathématique qui y est donné. La préparation des maîtres n'a pas été étudiée dans un livre spécial, mais, pour chaque section, elle l'est dans le volume correspondant. J'ajoute qu'à la fin des volumes 1, 2, 4 nous donnons, d'après le Cercle de la librairie française, la liste des principaux livres classiques utilisés dans les enseignements qui s'y rapportent.

Le *Ier volume*, 87 p. a été publié sous la direction de M. Bioche, qui donne d'abord un tableau général des établissements français où les mathématiques sont enseignées. Puis viennent un rapport sur les Ecoles primaires élémentaires, un rapport étendu sur les Ecoles primaires supérieures, à la fois théoriques et pratiques (M. Tallent), un autre sur les Ecoles normales d'instituteurs (M. Vareil), enfin une note sur l'Ecole normale de St-Cloud, qui est comme l'Ecole normale supérieure de l'enseignement primaire.

Le *2e volume*, 159 p. est encore dû à M. Bioche; il comprend toutes les parties des sciences mathématiques qui sont enseignées dans nos lycées et collèges et qui, dans d'autres pays, sont réparties en deux sous-sections. Nous trouvons d'abord une dissertation de M. Bioche sur la place et l'importance des mathématiques dans l'enseignement secondaire français; puis un important rapport de M. Blutel sur la classe de mathématiques spéciales, qui n'a guère d'équivalent dans les autres pays et qui, à vrai dire, devrait ressortir à l'enseignement supérieur. Viennent ensuite cinq monographies relatives à l'arithmétique, à l'algèbre, à la géométrie, à la mécanique élémentaire et à la cosmographie; enfin un rapport sur l'Ecole des Roches, type d'écoles privées, dites nouvelles, où on se préoccupe grandement de l'éducation physique des élèves.

Le *3e volume*, 123 p. a été publié sous la direction de M. de Saint-Germain. Après un aperçu général sur l'enseignement mathématique supérieur en France, nous trouvons quatre rapports consacrés à l'enseignement de

nos Universités : 1° les parties fondamentales, calcul différentiel et intégral, mécanique rationnelle, astronomie ; 2° les parties de l'ordre le plus élevé avec une suite de programmes ; 3° les diplômes d'études supérieures ; 4° les Instituts techniques annexés à plusieurs Facultés des sciences. On remarquera que chez nous la mécanique est rattachée aux sciences mathématiques plutôt qu'aux sciences physiques. Viennent ensuite un rapport du regretté J. TANNERY sur l'Ecole normale supérieure, où se forment les professeurs de nos Lycées et les maîtres de nos Universités ; puis une note sur le Collège de France et cinq rapports relatifs à l'Ecole polytechnique et à plusieurs écoles qui s'y rattachent : Ecole des Ponts et Chaussées, Ecole supérieure des Mines à Paris, Ecole des Mines à St-Etienne, Ecole du Génie maritime.

Le 4e *volume*, 212 p., a été publié par M. ROLLET, directeur de l'Ecole professionnelle Diderot, à Paris, qui expose d'abord l'organisation générale des établissements d'enseignement technique ,ou professionnel. Ces établissements, qui dépendent plus ou moins étroitement du Ministre du Commerce et de l'Industrie, pourraient être classés en trois groupes, primaire, secondaire, supérieur : au premier appartiennent les Ecoles pratiques de Commerce et d'Industrie (3 rapports) et les Ecoles nationales professionnelles (2 rapports) ; au deuxième les Ecoles commerciales, créées par les Chambres de Commerce (1 rapport), et les Ecoles nationales d'Arts et Métiers, dont chacune des trois années d'études fait l'objet d'un rapport détaillé ; du groupe supérieur relèvent le Conservatoire des Arts et Métiers et l'Ecole centrale des Arts et Manufactures : l'un et l'autre sont l'objet d'un rapport. Dans tous ces établissements on ne perd pas de vue le rôle éducatif des mathématiques, mais on se préoccupe avant tout de leur rôle pratique, ce qui permet d'aborder des matières d'ordre élevé, telles que l'analyse infinitésimale dans les Ecoles d'Arts et Métiers. Il n'y a pas encore d'école normale technique.

Le 5e *volume*, 95 p. est dû à Mlle AMIEUX, professeur au Lycée V. Hugo, à Paris. Dans deux importants rapports, Mlle Amieux et Mme Baudeuf étudient les lycées et collèges de jeunes filles et constatent que leurs élèves ont de réelles aptitudes pour les mathématiques, dont il faut, par conséquent, développer l'étude. M. Appell parle de l'Ecole normale de Sèvres. Puis un rapport sur l'enseignement professionnel, qui est en voie d'organisation, enfin cinq rapports très sommaires relatifs à l'enseignement primaire et à l'Ecole normale de Fontenay-aux-Roses.

Grèce. — M. C. STEPHANOS, délégué, retenu dans une autre section du Congrès, se fait excuser. Jusqu'ici la Grèce n'a publié aucun rapport. Le délégué espère que d'ici au prochain Congrès, il lui sera possible de publier un rapport concernant l'enseignement mathématique en Grèce.

Hollande. — M. le Prof. J. CARDINAAL (Delft), délégué, présente le *Rapport sur l'Enseignement mathématique dans les Pays-Bas*. Le volume comprend, en 151 pages, un exposé de l'état de cet enseignement aux écoles des types suivants :

l'école primaire ;

les « Burgeravondscholen » (écoles du soir), écoles professionnelles, écoles de dessin, écoles professionnelles pour filles et écoles techniques ;

les écoles de marine ;

les écoles moyennes à 3 années d'études ;
les écoles moyennes à 5 années d'études ;
les écoles moyennes pour jeunes filles ;
les gymnases ;
les universités ;
l'académie technique ;
les instituts militaires de l'armée de terre ; l'école de machinistes pour la marine ; l'institut royal de marine,
et enfin un rapport complémentaire sur les propositions de la Commission d'Etat, pour la réorganisation de l'enseignement.

Vu la rédaction déjà très sommaire du rapport, il semble impossible d'en donner encore un raccourci, d'ailleurs, comme l'indique l'addition du « rapport complémentaire », une réorganisation de l'enseignement en entier est projetée ; on en trouve les tendances générales dans ce complément même.

Nous pourrions ajouter que ces projets ne sont pas encore proposés aux Etats-Généraux, qu'ils ont donc en tout le temps d'être discutés par les professeurs, des diverses branches de l'enseignement et devant l'opinion publique. Ces discussions ont généralement pris la forme de critiques, parfois de critiques très véhémentes. Mais il faut dire que ces critiques viennent avec véhémence égale des côtés les plus opposés les partisans de la culture classique protestant contre la négligence de cette culture, les gens des sciences exactes se plaignant des préférences qu'ils voient accordées aux branches classiques.

Ce qui revient peut-être à dire que la Commission qui a formulé les projets, ne pouvant satisfaire tout le monde, a trouvé le juste compromis qui doit être imposé à tout le monde.

Hongrie. — *Kurzer Bericht über die Tätigkeit der ungarischen Subkommission*, von E. Beke. — Die Organisation der Reformtätigkeit in Ungarn wurde schon zwei Jahre vor dem IV. Math. Kongresse angefangen, als der Verein der Mittelschulprofessoren eine Kommission einsetzte um die Reform des math. Unterrichtes, wohl nur im Hinblick auf die Gymnasien und Realschulen, zu behandeln. Diese Kommission, vollbrachte teilweise ihre Aufgabe, als sie in einem grösseren Werke, welches auch in deutscher Sprache (Teubner's Ausgabe) erschien, die sämtlichen, bei uns aktualen, und mit den Reformbestrebungen in engem Zusammenhange stehenden Fragen des math. Unterrichtes in einzelnen Referaten und in zusammenhängenden Beschlüssen veröffentlichte. Dieselbe Kommission wurde mit einigen Zuziehungen zur Subkommission der I. M. U. K. und in dieser Zusammensetzung debate sie ihre Tätigkeit auch auf andere Unterrichtsanstalten aus.

Hier will ich nur in aller Kürze erwähnen, dass ausser der genannten grösseren, auf die Gymnasien und Realschulen, sowie auf die Lehrerbildung sich beziehenden Werke bisher acht Referate erschienen, und noch drei druckfertig sind. In diesen wird der jetzige Zustand des math. Unterrichtes in den verschiedenen Schulgattungen behandelt. Ich hebe besonders das Heftchen über das Mustergymnasium hervor, welches eine Institution behandelt, die anderswo in dieser Form nicht vorzutreffen ist. In dieser Schule wird nämlich ein ziemlich grosser Teil der angehenden Mittelschullehrer nach Absolvierung ihrer Universitätsstudien praktisch ausgebildet.

Ich möchte noch besonders hervorheben, dass wir vor einigen Wochen im Rahmen der Generalversammlung des ungarischen Mittelschulprofessoren-

Vereins eine eingehende Besprechung der Reformbestrebungen hatten. Zu diesem Zweck stellten wir etwa 30 Fragen an die Mittelschullehrer, welche sich auf die sämtlichen Fragen der Reform, besonders auf die in unserem genannten Werk behandelten Unterrichtsfragen bezogen. Es liefen, trotz der kurzen Zeit eine ziemliche Anzahl von Antworten ein, und auf Grundlage dieser Antworten hielten wir eine zwei Tage dauernde Besprechung, um allen Lehrern Gelegenheit zu geben, sich über ihre bisherigen Erfahrungen zu äussern. Diese Besprechung war über alle Erwartungen gelungen. Es wurde klar, dass die internationale Bewegung, welche von dieser Kommission ausging, bei uns in Ungarn ohne jedwedem officiellen, administrativen Eingreifen, tiefe Wurzel geschlagen, dass in vielen Schulen des Landes der math. Unterricht in dieser kurzen Zeit mit gutem Erfolg umgestaltet wurde : die praktische Seite des Unterrichtes besonders berücksichtigt, mathematische Experimente durchgeführt, der Funktionsbegriff von Anfang an angewendet, die Differential- und Integralrechnung in vielen Schulen behandelt, das wirtschaftliche Interesse entwickelt, Geometrie und Algebra besser verschmolzen, das rein formalistische Element zurückgedrängt wird, jedoch ohne den logischen Aufbau der Mathematik — welche aus allgemeinen pädagogischen Rücksichten als eine wichtige Aufgabe des Unterrichtes ist — stark zu schädigen.

An dieser Besprechung, an welcher die Lehrer in ungewöhnter Zahl, und mit besonderem Interesse teilnahmen, wurden auch einzelne, auf die Einrichtung des Unterrichtes, methodische Verbesserungen, sowie auf die Lehrerbildung sich beziehenden Beschlüsse gebracht, die ich nicht einzeln besprechen will.

Ich will nur noch die Ueberzeugung beinahe sämtlicher ungarischer Lehrer aussprechen, dass schon die bisherige Tätigkeit der I. M. U. K. auf den math. Unterricht befruchtend einwirkte. Um den Erfolg noch zu steigern, und den Anschluss sämtlicher Lehrer zu sichern, gedenken wir, wenn wir über die nötigen materiellen Mittel verfügen werden, von den bisher erschienen Publikationen der I. M. U. K. die wichtigsten Gedanken in zusammenfassender Weise den ungarischen Lehrern zur Verfügung stellen, dass es zum Gemeingut werde.

Wir im Ungarn hegen die Hoffnung, dass die I. M. U. K., welche die breite wissenschaftliche Grundlage der Reform schon beinahe fertig brachte, in ihrer weiterern Tätigkeit im engen Anschlusse an die Lehrer, und, von nun an auch wenn nötig, mit den Unterrichts-Verwaltungen, die bisherigen Resultate ins praktische Leben übertragen wird.

Iles britanniques. — Les deux volumes renfermant le rapport de la Sous-commission britannique ont été présentés par M. C. Godfrey (Woolwich) qui s'est exprimé en ces termes :

« The object of the British Sub-commission has been to secure, in time for presentation to the Commission, a series of Reports showing the actual condition of mathematical education in this country.

The examination system of this country is regarded as a valuable means of encouraging sound instruction and of transmitting important ideas.

An important part of the Report is devoted to a critical discussion of activities in this direction.

Those devoted to mathematics as a science, those employing mathematics as an art, and those concerned with the development of the immature mind

have different points of view and their action consequently tends to diverge.

This divergence appears clearly from several portions of our Reports.

If the consideration which it is to be hoped that the Report will receive from every class of mathematician or teacher of mathematics in this country leads to a diminution of this divergence, and to an acknowledgment by each party that the views of the others merit partial recognition or at least consideration, the Report will serve its purpose although the date may yet be distant when these distinct aims will find complete reconciliation in an acknowledged sequence of work in elementary mathematics. »

Italie. — M. G. Castelnuovo, délégué, rappelle que l'an dernier, au Congrès de Milan, la Sous-commission italienne avait présenté les rapports de MM. Scarpis et Fazzari, sur l'enseignement secondaire classique (2 fasc.), de M. Scorza, sur les instituts techniques (Oberrealschule), et de MM. Pincherle et Somigliana, sur l'enseignement universitaire. Depuis la dernière réunion six nouveaux rapports ont été achevés :

1. Lazzeri. *L'insegnamento della matematica nelle Scuole industriali, professionali e commerciali.*

2. Lazzeri. *L'insegnamento della matematica nella R. Accademia Navale di Livorno e nella R. Accademia Militare di Torino.*

3. Conti. *L'insegnamento della matematica nelle Scuole Normali.*

4. Conti. *L'insegnamento della matematica nelle Scuole infantili ed elementari.*

5. Padoa. *Osservazioni e proposte circa l'insegnamento della matematica nelle Scuole elementari, medie e di magistero,*

6. Scorza. *Sui libri di testo di geometria per le Scuole scondarie superiori.*

L'*article 1* envisage un groupe d'écoles qui ont été instituées dernièrement, grâce à des initiatives locales, pour répondre aux exigences de la vie commerciale et industrielle de l'Italie. Ces écoles ne sont pas jusqu'ici organisées d'une manière uniforme. C'est pourquoi M. Lazzeri a dù se borner à exposer les buts que se proposent les différentes écoles, et à rapporter les programmes d'une école moyenne de commerce (Florence) et d'une école supérieure de commerce (Bari). M Lazzeri signale en outre quelques considérations de M. Ciamberlini, qui enseigne les mathématiques dans un institut industriel et introduit avec avantage dans son cours les notions de fonction et de représentation graphique.

Dans l'*article 2* M. Lazzeri parle des différentes conditions d'admission qui ont été successivement imposées à l'Académie Navale après sa fondation (1881), en conséquence desquelles les premiers cours de cet institut avaient, dans une première phase, le caractère des cours des écoles moyennes supérieures (géométrie élémentaire par la méthode *fusionniste*), et dans une seconde phase le caractère des cours universitaires avec la condensation (algèbre et calcul infinitésimal, géométrie analytique et projective) qu'on tend maintenant à introduire, même dans les Universités, pour la préparation des élèves ingénieurs. Quelques lignes sont consacrées à l'Académie militaire de Turin, où le programme des mathématiques comprend les matières des deux premières années de l'Université, convenablement réduites. A signaler la réunion de la géométrie analytique et projective avec les applications géométriques du calcul, en faisant usage systématique des vecteurs.

M. Conti dans l'*article 3* fait un examen diligent des règlements qui ont été appliqués successivement aux Ecoles normales, ayant pour but la préparation des maîtres des écoles élémentaires. Les mathématiques ont dans ces écoles à peu près la même extension que dans les cinq classes de nos gymnases ; mais le professeur doit exposer en même temps comment les éléments de l'arithmétique et la nomenclature géométrique doivent être enseignés aux élèves des écoles élémentaires. Le rapport contient en outre les vœux qu'on a formulés dernièrement au sujet de la réforme des écoles normales.

Dans l'*article 4*, M. Conti, après avoir remarqué que dans la plupart des écoles d'enfants la méthode de Fröbel est adoptée, fait ressortir les perfectionnements successifs qu'ont subis les programmes des écoles élémentaires, jusqu'aux derniers (de 1905) où la méthode intuitive-expérimentale est imposée pour l'enseignement des notions géométriques, tandis que le but pratique est envisagé pour ce qui concerne l'arithmétique.

L'auteur de l'*article 5*, M. Padoa, n'appartient pas à la Sous-commission italienne. On lui a cependant demandé un rapport, car il est l'un des meilleurs représentants de l'école de logique-mathématique, et il a eu la chance d'expérimenter avec succès quelques-uns des préceptes de celle-ci dans tous les ordres d'écoles moyennes. M. Padoa présente dans son article un plan organique de réforme de l'enseignement mathématique dans les écoles élémentaires et moyennes. Dans les premières écoles il voudrait que le maître se proposât presque exclusivement le but d'habituer les élèves à accomplir exactement et rapidement les opérations de l'arithmétique. L'enseignement des mathématiques dans les écoles moyennes devrait être partagé en trois phases : préparatoire, déductive, complémentaire, comprenant respectivement 3, 3 et 2 années. Dans la phase préparatoire le professeur devrait exposer les notions essentielles de l'arithmétique et de la géométrie en recourant à l'intuition et à l'expérience, sans donner aucune démonstration. La seconde phase devrait être exclusivement déductive, sans faire jamais recours à l'intuition ou à l'expérience. La phase complémentaire aurait un caractère différent, d'après la section du lycée (classique, moderne ou scientifique) à laquelle elle se rapporterait (considérations sur les principes des mathématiques, notions sur les fonctions, compléments d'algèbre et trigonométrie).

M. Scorza, dans l'*article 6* (sous presse), après avoir rappelé les dispositions ministérielles de 1867, par lesquelles les Eléments d'Euclide ont été imposés pour quelque temps comme livre de texte dans nos écoles classiques supérieures, et les règlements successifs qui exigeaient seulement un traité conforme à la méthode d'Euclide, fait ressortir les perfectionnements que les meilleurs traités italiens ont portés à l'œuvre classique du géomètre grec. Après quelques considérations générales, M. Scorza passe en revue les méthodes suivies par les principaux auteurs pour exposer les théories les plus délicates de la géométrie élémentaire ; à savoir : la théorie de l'égalité, la théorie de l'équivalence, et la théorie des proportions. M Scorza parvient ainsi à faire une classification, à ce point de vue, des principaux traités italiens de géométrie élémentaire.

Japon. — M. R. Fujisawa, délégué, tient à rappeler les conditions particulièrement difficiles dans lesquelles la Sous-commission japonaise a dû accomplir son travail. Constituée très tardivement à la suite de différentes

circonstances, la Sous-commission ne disposait guère que d'un an pour rédiger les rapports et les faire traduire en anglais. Le retard dû au travail supplémentaire de la traduction s'est d'ailleurs présenté pour tous les pays ne possédant pas comme langue nationale l'une des quatre langues adoptées par nos congrès.

M. Fujisawa a accompagné la présentation des deux volumes japonais du rapport oral suivant :

I have the pleasure of presenting, on behalf of the Japanese Sub-commission, two volúmes of our reports. The larger one contains fifteen divisional reports on the teaching of mathematics in different kinds of schools, and the smaller one gives the résumé thereof. The preface of the latter volume which is entitled *Summary Report on the Teaching of Mathematics in Japan* is, at the same time, to serve for the short written report to be presented this morning.

I crave indulgence for my oral report having the character of complaints as to the form, under which Japan was invited to participate in the present inquiry into the teaching of mathematics. Our country being situated so far from the seats of the Congress, in the past as well as, in all probability, in the future, and in view of tremendous difficulty of translating our reports into one of the official languages, it was evident from the start that we could not possibly join the movement unless we are strongly supported by our Government, or, even, unless the matter is taken up by our Government itself. Now, how to approach our Government, was, if I am rightly informed, told in a private letter from Baron Kikuchi to Sir George Greenhill. In passing, I may add that these two gentlemen have been corresponding in this connection. Somehow, however, the matter went wrong. And we have given up altogether our hope and chance of joining in this undertaking. In the last moment, however, we were pressingly urged to accede to the wishes of the Central Committee. We had, then, just a little over one year at our disposal in reality only a little over six or seven months of working time for the preparation of our reports. As concerning myself, I have only consented to do my best in finding out some one who should act as our delegate; but somehow I was pushed into the corner, where I found myself made the delegate. The work of the preparation of our reports was begun in such an haphazard way and under such regrettable conditions. Indeed, some of the members of our Sub-commission have had to sacrifice no inconsiderable part of their sleeping hours. Many shortcomings which will surely be found in our reports are, in the first instance, due to the above mentioned cause. I wished to say more on this lamentable circumstance that the invitation to join in the movement did not reach us in the manner which is usually followed in the case of other international congresses and commissions. Only this morning, it occurred to me let the bygones be bygones. And, in this turn of mind, I close my oral report.

Extrait de la Préface du Summary Report : « The first meeting of our Sub-Commission took place at the Departement of Education on the 14 th of January 1911. The members were divided into a certain number of Divisions, each of which was entrusted with the task of dealing with a certain type of schools. The local reports mentioned above, were classified as soon as they were received, and distributed among the Divisions. Each Division was to prepare a report in Japanese, to be called Divisional Report, based partly upon the local reports and partly upon investigations and discussions

of its own. And then these Divisional Reports were to be translated into English. Since then, our Sub-Commission held its general meeting twice, namely, on the 20 th of Mai 1911 and on the 29 th of October of the same year.

It was desired that the principal points of the reports be presented and discussed at educational gatherings and scientific societies which interest themselves in the progress of the teaching of mathematics so that they might, when finally submitted, reflect the sentiment of the majority of those who are most competent to judge of such affairs. In this direction, the lack of time was felt more severely than in any other direction. It was not even possible to discuss such points in a general meeting of our own. Again, in the subsequent work of translation, we have experienced, as was said before, difficulties far surpassing our most pessimistic forebodings. We had to content ourselves with the least evil.

However crude, and even unsatisfactory to ourselves, the results of our labour came out, we fel bound by our promise, and so, both the original and the English translation of the fifteen Divisional Reports, whose list is to be found after the member-list, have been published. The utter lack of time will account for very many shortcomings both in form and content to be found in them. Indeed, it is much to be regretted that our best intentions were forbidden the support of our best energies.

Besides these Divisional Reports, was to be published the present summary report which should give a *resumé* and also contain matters not included in them. The task of preparing it was assigned to myself. To save time, I had to go through the awkward task of writing a summary of what I have never seen. About one-third of the present report was written and printed, when Divisional Reports began to come in intermittently. Now all of my time which I had allotted in my mind to what remained of my own work, was actualy more than exhausted in trying to conquer, even partly, the aforesaid difficulties connected with the work of translation of the Divisional Reports. Thus but little time was left to me for doing my own work. All I could do was to write, as fast as I could, just what I happened to know. So, not only where I was expressing my own personal views, but wherever there was the slightest doubt in this respect, I have taken care to use the first person singular, in order not to evade the responsibility. I wish it to be clearly known that the Sub-Commission is in no way responsible for the present report. I and I alone am responsible for everything contained in it. »

Norvège. — La publication des rapports a été retardée par le fait qu'au cours de ces dernières années les plans d'études de plusieurs types d'établissements étaient en revision. A l'heure actuelle il manque encore les plans d'études des écoles techniques moyennes. M. Alfsen, délégué, annonce que dès que ce travail de revision sera terminé, les rapports de la Sous-commission norvégienne pourront être publiés.

Portugal. — M. G. Teixeira, délégué, espère pouvoir publier bientôt les rapports portugais. Il explique le retard apporté dans la publication par le fait que le Gouvernement provisoire de la République a décrété des réformes considérables dans l'instruction publique. Une partie seulement de ces réformes a été mise à exécution, l'autre entrera en vigueur avec la nou-

velle année scolaire. Jusqu'à présent les affaires concernant l'instruction primaire, secondaire et supérieure dépendaient du Ministre de l'intérieur, tandis que les écoles spéciales dépendaient du Ministère des travaux publics. Le Gouvernement vient de présenter aux Chambres un rapport de loi en vue de créer un ministère de l'instruction publique. On attend que ce projet soit approuvé pour compléter les règlements nécessaires à l'exécution des réformes décidées par le Gouvernement provisoire. Dans ces conditions il était préférable de retarder la publication des rapports portugais.

Roumanie. — M. G. Tzitzeica, délégué, rapporte. — La Sous-commission roumaine a publié un fascicule sur les mathématiques dans l'enseignement secondaire. Ce rapport contient l'organisation actuelle de l'enseignement secondaire, avec des indications succinctes sur les programmes et sur la préparation des professeurs.

Pour les autres catégories d'écoles, la Sous-commission a ajourné ses travaux, parce qu'elles sont en pleine réorganisation. On vient en effet de compléter l'enseignement élémentaire par des classes complémentaires, et une loi concernant l'enseignement supérieur vient d'être votée par le Parlement.

Russie. — La délégation russe n'ayant pas pu se rendre au Congrès, les rapports sont présentés par le Secrétaire-général. Au Congrès de Milan, M. Coialovitsch, l'un des délégués, avait déposé cinq fascicules renfermant sept rapports. Depuis cette époque, un nouveau fascicule, contenant trois rapports, a été distribué aux membres de la Commission. Il traite des établissements de jeunes filles et des écoles industrielles. Il reste sous presse ou en traduction sept autres rapports.

Serbie. — M. M. Petrovitsch, délégué, annonce que la Serbie compte publier aussi un rapport sur l'état actuel de l'enseignement mathématique et les réformes à réaliser.

Suède. — Le Secrétaire-général rapporte au nom de M. H. v. Koch, délégué, retenu par une séance de la section d'analyse du Congrès. C'est la Sous-commission suédoise qui, la première, a terminé les rapports sur l'enseignement mathématique dans les différents types d'écoles de ce pays. Le volume, intitulé *Der mathematische Unterricht in Schweden*, a été publié sous la direction de M. H. v. Koch et G. Göransson. Voici un extrait de la Préface rédigée par M. v. Koch :

« Die Frage nach dem Ziel des mathematischen Unterricht in der Schule und in Verbindung damit die Nachforschung der geeignetsten Art des Anordnens dieses Unterrichts werden seit lange in pädagogisch interessierten Kreisen Schwedens debattiert. Es hat Wortführer der Meinung gegeben, dass die Mathematik hauptsächlich eine Gehilfin des praktischen Lebens und gewisser Künste und Wissenschaften sein solle ; diese wünschen deshalb aus dem Lehrfache die Teile auszumerzen, die dieser Forderung nicht entsprechen. Es hat auch nicht an Vertretern der entgegengesetzten Ansicht gefehlt, dass die wichtigste Aufgabe der Mathematik in der Schule sei, das Denkvermögen des Schülers sowohl in formaler als realer Hinsicht zu entwickeln ; die letzteren arbeiten für die Umwandlung des Unterrichts in dieser Richtung. Diese entgegengesetzten Bestrebungen wurden von

wechselnden Erfolg gekrönt und gegenwärtig steht wohl die Sache im allgemeinen so, dass beide Gesichtspunkte in der Anordnung des Unterrichts in den verschiedenartigen Schulen eine gewisse Anerkennung erlangen.

« Als besonders wichtig von den erwähnten Gesichtspunkten aus hebt man mit Recht den Funktionsbegriff nebst den zugehörigen graphischen Darstellungen hervor, und in letzterer Zeit hat man bei uns wie in den übrigen Kulturländern die Bedeutung dieses Begriffs auch für die Lebensanschauung und dadurch indirekt für die Entwickelung des Charakters der Jugend ins Auge gefasst. Man weist nach, dass dieser Begriff für die Erfassung der Natur erscheinungen und ihres gegenseitigen Zusammenhangs grundlegend und somit auch in entsprechenden Grade für die Erfassung der Erscheinungen des menschlichen Lebens wichtig ist.

« Dass Schweden von der mächtigen Reformbewegung auf dem Gebiete des mathematischen Unterrichts, die im letzten Jahrzehnt ganz Europa durchlaufen hat, nicht unberührt geblieben, stellt sich u. a. durch den neuen in mancher Hinsicht bemerkenswerten Lehrplan heraus, der für die Realschule und das Gymnasium festgesetzt worden ist und worüber der folgende Bericht Aufklärung gibt. Ein wesentliches Merkmal desselben ist die Einführung des Funktionsbegriffs wie auch — für das Realgymnasium — der ersten Anfangsgründe der Infinitesimalrechnung. Die missliche Frage, in welchem Masse die übrigen Teile des Faches beschränkt und umgeformt werden müssen, um dieser Neuerung Platz zu machen, und damit das ganze Fach einer womöglich einheitlichen Behandlung teilhaft werde, wird im erwähnten Unterrichtsplan gestreift, aber hat natürlich ihre endgiltige Lösung nicht erhalten können, da es ja an genügender Erfahrung auf dem Gebiete mangelt.

« Nicht zum wenigsten von diesem Gesichtspunkte aus war es mit Zufriedenheit, dass die für die Sache Interressierten die Nachricht empfingen, dass der internationale mathematische Kongress zu Rom im Jahre 1908 beschlossen, eine Kommission für die Erörterung über den Stand des mathematischen Unterrichts in allen Kulturländern einzusetzen. »

Suisse. — En présentant le volume renfermant les rapports de la Sous-commission suisse, M. Fehr, délégué, signale les difficultés qu'ont rencontrées les rapporteurs par le fait qu'en Suisse l'instruction publique est du ressort des cantons, au nombre de 22 (19 cantons et 6 demi-cantons).

L'organisation scolaire suisse présente autant de diversité que l'organisation politique des 25 petites républiques. Cette grande indépendance des autorités scolaires cantonales — et quelquefois municipales — permet non seulement de tenir compte des intérêts régionaux, mais elle facilite aussi l'étude de la réalisation de réformes.

Cette diversité présente sans doute aussi des inconvénients à une époque où la population se déplace et change de résidence plus facilement qu'autrefois. Aussi trouvera-t-on dans plusieurs rapports des vœux tendant, non pas à une centralisation de l'organisation, mais plutôt à l'unification des plans d'études dans leurs traits principaux.

Les rapports de la Sous-commission suisse sont au nombre de 12, y compris le rapport préparatoire et l'aperçu général. Ils portent sur l'ensemble des établissements, depuis l'enseignement primaire à l'enseignement supérieur ; on en trouvera la liste plus haut.

Nous signalerons ici tout particulièrement l'exposé très complet de

M. Brandenberger concernant les gymnases et les écoles réales, et nous mentionnerons également le rapport de M. Matter sur les écoles nouvelles.

La Sous-commission suisse estime que ces rapports ne constituent en réalité qu'une première étape. Il y a lieu d'en tirer parti et d'examiner les progrès à réaliser dans l'enseignement aux divers degrés en faisant en même temps une étude approfondie des rapports publiés dans les pays voisins. Dans une réunion tenue à Bienne au commencement de juillet 1911, la Sous-commission a étudié un certain nombre de propositions de réformes qu'elle signalera à l'attention des autorités. En outre elle a établi une série de questions qu'il serait utile de mettre en discussion dans les Conférences scolaires et les sociétés de professeurs.

Dans ses propositions de réformes elle insiste d'une manière toute spéciale sur les progrès à réaliser dans la préparation des candidats à l'enseignement. La question, limitée à la préparation pratique, a été mise en discussion le 19 mai 1912, dans une réunion de la Société suisse des professeurs de mathématiques. L'assemblée a adopté, à l'unanimité, la résolution par laquelle la Société attire l'attention des autorités sur la nécessité de fournir aux candidats à l'enseignement une bonne préparation méthodique et pratique. A la suite de ce vœu le conseil de l'Ecole polytechnique fédérale a introduit, à titre d'essai, un cours de méthodologie mathématique accompagné de leçons faites à l'Ecole réale supérieure de Zurich. C'est M. le Prof. Brandenberger, auteur de l'excellent rapport consacré aux écoles moyennes suisses, qui a été chargé de cet enseignement.

DEUXIÈME SÉANCE

Lundi 26 août, à 3 heures.

Présidence de Sir J.-J. THOMSON (Cambridge).

Ordre du jour :

La préparation mathématique des physiciens à l'Université, rapport de M. RUNGE, professeur de mathématiques appliquées à l'Université de Gœttingue. — Discussion.

THE MATHEMATICAL TRAINING OF THE PHYSICIST IN THE UNIVERSITY

Report presented by

C. RUNGE (Göttingen)

The international commission on the Teaching of Mathematics requested me to make an inquiry into the state of the mathematical studies of the students of physics at the universities of different countries. A circular letter was sent out during the winter of 1911-1912 to collect the necessary information, and a number of answers from Italy, Austria, Germany, Switzerland, Holland, England and the United States were received. It is however extremely difficult to form an adequate idea of the state of things in another country with which you are not familiar, because the same term describing the mathematical education may mean very different things when used by different men, so that a description does not convey a very definite idea to the reader. Some countries have developped their educational conditions in so widely different a manner, that it is almost impossible to understand them except by visiting the country and seeing for yourself. In the announcement of his lectures on mathematical physics HELMHOLTZ used to invite the students by saying no other previous knowledge was wanted besides the elements of the calculus. But his so-called elements were by no means considered elementary by his students. In the same way the terms « analytic geometry », « integral and differential calculus », no doubt have a different meaning with my correspondents from different countries. Though vague the report may however help us to get acquainted with the

state of affairs. But I beg to consider it, incomplete and imperfect as it is, only as an introduction leading up to the discussion, which is to follow. I shall follow here the order of the questions in my cicular letter. The original text is given in the notes.

I[1]. — The subjects of mathematical lectures attended by students of physics in their regular course of studies seem to be very much the same almost everywhere. They pass through a fairly complete course of instruction in mathematics, which however has no particular connection with the special work that a student of physics as such ought to do. Analytic geometry, differential and integral calculus, elements of ordinary differential equations, dynamics are taught, the mathematical professors in general paying litte attention to the particular needs of physical students. No distinction is made between students of experimental physics and of theoretical physics and there are on these mathematical subjects no special mathematical courses for physicists.

The lectures on dynamics are almost always given by mathematical professors and sometimes also certain other lectures on subjects of mathematical physics. Some of my correspondents bitterly complain of the mathematical training of students of physics in consequence of the professors of pure mathematics ignoring some mathematical theorems and methods, that are of greatest importance to the physicist. Green's and Stokes' theorem for instance ought to be taught in the integral calculus and Fourier's series ought to be treated in a more practical manner and not only as furnishing interesting instances of conditions of convergence. Vector analysis ought to be taught quite regularly by the mathematical professors, so that students should be perfectly familiar with it in their studies in dynamics and mathematical physics. Instead of that some of the mathematical professors spend too much time on the logical foundations of the calculus. Their subtilty is lost on the student who is only beginning to grasp the power of the calculus and ought to be trained to use it. This applies equally to the student of pure mathematics. On the whole there seems to be no need for special mathematical courses for students of physics nor does it seem necessary to compel them to attend more mathematical lectures. But a need seems to be strongly felt for mathematicians and physicists to draw closer together. The spirit of the mathematical teaching should be

[1] *Question* I : Welche mathematischen Fächer gehören zum regelrechten Studium eines Physikers? Wird in den Anforderungen an die mathematische Ausbildung der Physiker ein Unterschied gemacht zwischen Physikern einer mehr experimentellen und einer mehr theoretischen Richtung ? Wird von den Mathematik-Professoren besondere Rücksicht auf die Bedürfnisse der Physiker genommen ? Sind besondere mathematische Kurse für Physiker eingerichtet ? Wie weit und in welchem Sinne beteiligen sich die Mathematik-Professoren an den Vorlesungen *a)* über Mechanik *b)* uber sonstige insbesondere moderne Gebiete der mathematischen Physik ?

altered, so as to make it more practical and easier to apply to physical problems. At present the gap is very wide and is not tending to close up.

II[1]. — Modern graphical methods seem to be very slightly introduced except in France and a few other universities. On the other hand descriptive geometry is now provided for, nearly everywhere. In some countries it is even cultivated to such an extent that opposition seems to be awakening. Indeed the work in descriptive geometry has a tendency to overgrow other mathematical branches, if it is not carefully pruned down. Though exceedingly useful in its way as training the power of geometrical intuition the student may become too fond of it and neglect the calculus. Besides there is scarcely any development going on in descriptive geometry, so that little research work is done in connection with it. Whatever the value of descriptive geometry may be, there can be little doubt that graphical methods showing how to represent functions of one and of more than one variable and how to handle them, have at least the same importance for any students of natural philosophy. The physicist in a great many cases has to deal with empirical functions that are conveniently and with sufficient accuracy represented graphically. To approximate them by means of analytical expressions becomes in many cases so tedious that it is out of the question. When these functions enter into mathematical considerations, all operations are best carried on graphically. Engineers have long been in the habit of doing so. But it is only since Massau (Gand) and d'Ocagne (Paris) worked out the methods systematically, that they have become a branch of mathematics. It appears that except in France teachers of mathematics have not yet paid sufficient attention to this remarkable growth of our mathematical power. The methods of graphical integration of any given function of a real or complex variable, of ordinary differential equations and of some partial differential equations should be considered essential parts of the integral calculus. Due attention should be paid to them in every course on the calculus. And there is this second advantage, that it makes the calculus easier. The difficulty of performing the analytical integration of a given function has led to an undue preponderance of differentiation in the teaching of the calculus. The graphical methods restore the natural order. With an empirical function the process of integration is performed easily and accura-

---

[1] *Question* II : Wie weit sind auf den Universitäten die modernen graphischen Methoden uber graphische Integration und Nomographie verbreitet ? Lernen die Physik-Studierenden darstellende Geometrie, numerisches Rechnen, numerische Auflosung von Gleichungen, numerische Auflösung von Differentialgleichungen. Methode der kleinsten Quadrate ? Lernen sie den Gebrauch mathematischer Apparate, des Rechenschiebers, der Rechenmaschine, des Planimeters ? Geschieht dies in besonderen mathematichen Vorlesungen oder Uebungen oder nur beiläufig im physikalischen Praktikum ?

tely, while the process of differentiation is much more uncertain. The methods of nomography, if not taught in a special course of lectures might be included in the lectures on coordinate geometry; but it will not do to leave them out altogether.

The *numerical* methods of handling an empirical function are older than the graphical methods and in consequence better known. Nevertheless they are also too much neglected in the mathematical education of the student of physics. The method of least squares is generally taught, but greater stress ought to be laid on the calculus of finite differences, on the numerical solution of equations, on numerical calculation of integrals and the numerical solution of differential equations. The difficulty is that many professors of mathematics have never been in the habit of calculating numerically and seem to have an aversion to teaching their students. Many are not familiar with the handling of mathematical instruments, with the slide rule, the integraph, the planimeter, the calculating machine, and little mention is made of them in the mathematical lectures. The student thus forms a wrong idea of the possibility of carrying out a mathematical operation. As long as he is only interested in mathematical theorems, this does not much matter. But a physicist or an engineer cannot be satisfied with existence-theorems, he wants the actual numerical result for the given data, he has before him. Of course he may learn to calculate in his pratical work in the laboratory, and his teachers in physics will to a certain extent take care of this part of his mathematical education. Nevertheless a decided advance could be made, if the mathematical teachers better understood the wants of their students in physics and did not rest satisfied with the proof of a system of theorems. The solution of a mathematical problem is not complete unless it supplies an answer to any intelligent question raised in connection with the problem. It is not sufficient that the answer may be found « by a finite number of operations »; but one must be able to find it without an unreasonable expenditure of work.

The use of the slide rule is commonly learned incidentally in the physical laboratory or in engineering courses and the calculating machine or planimeter may be learned in the same way. But if they were handled in the mathematical courses it would react favorably on the teaching and the students of pure mathematics would profit by it as well.

III[1]. — This however is only possible with individual teaching,

[1] *Question* III : Wie sind die mathematischen Uebungen der Physik-Studierenden beschaffen? Werden sie in der Weise von Laboratoriumsubungen abgehalten durch Ausfuhren der Aufgaben an Ort und Stelle und steht der Docent oder seine Assistenten in persönlicher Beziehung zu den einzelnen Studierenden ?

which in most of the universities and in most of the mathematical courses is not insisted upon. The organisation of the mathematical exercises ought to be on a similar plan as the exercises in a chemical or physical laboratory. As to descriptive geometry this is recognized everywhere. Nearly everywhere special rooms are provided for the exercises on the drawing board and the professor enjoys the help of assistants to look after each student individually to correct his drawing and to discuss with him his difficulties. The same plan ought to be carried out for exercises in numerical and graphical calculation and for general mathematical exercises. The difficulty that a student finds in his mathematical studies is not so much that of understanding the proof of a mathematical theorem but more that of grasping the contents of it, of seeing its application in a variety of cases, of knowing how to make use of it. For the student of physics or of engineering the power to use his mathematics is of primary importance. Without it he might almost as well dispense with the knowledge of mathematical theorems altogether. They will be an unnecessary burden to his intellect. This power can only be acquired by exercise. Mathematics cannot be learned by lectures alone, no more than pianoplaying can be learnt by listening to a player. It does not seem advisable to leave the exercises to the physical student himself, although he will himself feel the necessity of them, and although his physical studies will bring him in contact with problems where his mathematics are wanted. The better pedagogic no doubt is to combine the theorem with its application, to help the student to find his way back from the generalisation to the single case. It is the single case that he wants to understand, the abstraction has its value only as a means to understand the single case.

In mathematical exercises organized after the usual plan of laboratory work, the teacher is able to help his students in a far more efficient manner than by lectures alone. Each student has his particular way of looking at things and should not be forced to another way, unless for good reasons. Written solutions of problems need not be excluded, but the personal intercourse, the discussion of individual difficulties ought to be insisted on. Besides graphical work and the use of mathematical instruments must be shown to each student separately and must be practised for some time under the eye of the teacher.

IV[1]. — Most of my correspondents agree in considering this

[1] *Question* IV : Was sind Ihre eignen Ansichten uber die Zweckmassigkeit des gegenwärtigen Unterrichts? Schlagen Sie Aenderungen vor in Bezug auf Ausdehnung oder Einschränkung des mathematischen Unterrichts oder in Bezug auf Unterscheidung der Physik-Studierenden nach Gruppen oder in Bezug auf Unterrichtseinrichtungen?

the only way for the organisation of mathematical exercises. Some express their opinion that the difficulty is not that the students of physics do not learn enough mathematics but rather that they do not learn to apply their mathematics to concrete problems. « There often exists a curious disproportion of which they are well aware between their mathematical ability and the depth and wideness of their mathematical studies. This evil can hardly be remedied by lectures but only by prolonged practise ». Among the exercises the more elementary ones are naturally of greater importance than the more advanced. While only a small minority of students of physics will draw advantage from the highest mathematical studies, all of them will profit by the full possession of the graphical and numerical methods and the ability to use mathematical instruments. These exercises ought to accompany the mathematical lectures of the first two years and ought to constitute an integral part of the mathematical education of the physicist.

To recapitulate the general opinion seems to be that the mathematical instruction for physical students is very much in need of reform. Large portions of the theoretical matter intended for the pure mathematician might be left out and the attention concentrated on those subjects which are of continual application in mathematical physics. Improvement is to be looked for in the progressive adaptation of the teaching of applied mathematics to the more modern views of Physics on Electricity and Matter. As to the breaking up of students into groups it seems that it is both impracticable and undesirable. There is a limit to the indefinite multiplication of classes owing to the limited numbers of teachers and the limited amount of funds available.

The main danger is the gap between physicists and pure mathematicians that seems to be widening. Mathematics is suffering from overspecialisation and is cutting itself off from Natural Philosophy and Experimental Science. But very little can be done by regulations. What is really wanted is that Mathematical teachers should understand the problems and the needs of the Physicist.

Questionnaire. — Nous croyons utile de rappeler, dans son texte français, le questionnaire distribué l'hiver dernier par M. Runge au nom de la *Sous-commission B*, composée de MM. Klein (Gœttingue), président, Bourlet (Paris), Fehr (Genève), Sir G. Greenhill (Londres), Coialovich (St-Pétersbourg), Levi-Civita (Padoue),

Runge (Gœttingue), Timerding (Braunschweig), Webster (Worcester, E. U.), Wirtinger (Vienne).

(*Extrait de la circulaire* de M. le prof. C. Runge.) — Objet : *Les mathématiques dans les études universitaires des physiciens.*

1. — Quelles sont les branches mathématiques qui appartiennent à un enseignement régulier destiné au physicien ? Dans la préparation mathématique des physiciens fait-on une différence entre les étudiants qui suivent une direction plutôt expérimentale et ceux qui suivent une voie plus théorique ?

Les professeurs de mathématiques tiennent-ils particulièrement compte des besoins des physiciens ?

Y a-t-il des cours de mathématiques spécialement destinés aux physiciens ?

Dans quelle mesure et à quel point de vue les mathématiciens participent-ils aux cours *a)* de mécanique ; *b)* à d'autres cours et particulièrement à ceux qui se rattachent au domaine moderne de la physique mathématique ?

2. — Jusqu'à quel point les méthodes graphiques modernes d'intégration et de nomographie sont-elles répandues dans les universités ?

Les étudiants en physique sont-ils appelés à apprendre la géométrie descriptive, le calcul numérique, la résolution numérique des équations différentielles et la méthode des moindres carrés ?

Apprennent-ils le maniement d'instruments mathématiques tels que la règle à calcul, la machine à calculer et les planimètres ?

Y a-t-il des cours ou des exercices spéciaux à cet effet ou cet enseignement se fait-il dans les travaux pratiques de physique ?

3. — Quelle est l'organisation des exercices mathématiques destinés aux physiciens ? Ces exercices ont-ils lieu suivant le mode habituel des travaux de laboratoire ? Le professeur ou ses assistants entrent-ils en relation personnelle avec les différents étudiants ?

4. — Quelle est votre opinion personnelle sur l'opportunité de l'organisation actuelle de cet enseignement ?

Avez-vous des propositions à faire au sujet d'une extension ou d'une réduction de l'enseignement mathématique ou au sujet d'une distinction des étudiants en physique en divers groupes ou encore pour ce qui concerne l'organisation de l'enseignement ?

DISCUSSION

Sir J.-J. Thomson remercie M. Runge de sa belle conférence. Elle a été suivie d'une discussion d'un grand intérêt à laquelle ont pris part MM. P. Stæckel, C. Bourlet, F. Enriques, Sir G. Greenhill, A.-G. Webster, E. Borel, Sir J. Larmor, C. Bioche, A.-E.-H. Love, E.-W. Hobson, G.-A. Gibson, Sir J.-J. Thomson et C. Runge. En outre, afin de ne pas allonger le débat, M. Lanchester nous a adressé par écrit les remarques qu'il comptait présenter à la séance.

Quelques orateurs ont insisté sur les dangers qu'il y aurait de négliger le côté logique dans l'enseignement supérieur, même si celui-ci s'adresse uniquement à des physiciens, ce qui n'est généralement pas le cas. Tout en reconnaissant la nécessité d'accorder une juste place au côté pratique, à l'aide de problèmes bien choisis, ils estiment que le côté utilitaire ne doit pas prédominer. D'autres font remarquer que les étudiants en mathématiques eux-mêmes retireraient un grand bénéfice d'un enseignement par lequel on les initierait davantage aux applications d'ordre pratique. C'est de ce côté qu'on devrait diriger l'effort sans porter préjudice à l'enseignement théorique bien approprié. Le temps nécessaire se trouvera aisément; on pourrait le prendre sur les heures de laboratoire de la physique, dont le nombre, au dire même des physiciens, est parfois exagéré. Il suffirait de renoncer à des manipulations souvent sans intérêt et sans aucune portée théorique ou pratique.

On lira ci-après le résumé de la seconde partie de cette séance qui a été l'une des plus intéressantes du Congrès.

Prof. Staeckel (Karlsruhe) ist überzeugt, dass die Vorschläge Runges durchgeführt zu werden verdienen, und möchte nur eine gewisse Schwierigkeit beleuchten, die darin liegt, dass die Ausbildung der Physiker und Mathematiker zum Teil gemeinsam erfolgt und dafür gesorgt werden muss, dass die Pflege der logischen Seite der Mathematik nicht vernachlässigt wird.

M. Bourlet (Paris) présente les excuses de la Sous-commission française de n'avoir pas répondu au questionnaire de M. le Prof. Runge. La raison est que, devant une question aussi vaste, la Sous-commission a décidé de faire plus que de donner des renseignements sommaires, et qu'elle publiera tout un volume.

M. Bourlet indique à grands traits ce que sera cet ouvrage.

Comme il l'a déjà expliqué dans des réunions antérieures, l'enseignement est donné en France dans un esprit très général dans les classes de *Mathématiques spéciales* et dans les *Cours de Mathématiques générales* des Universités. En France, on essaie de donner aux jeunes gens qui se destinent aux sciences mathématiques, physiques et naturelles, une éducation générale commune. C'est ainsi que les élèves de l'Ecole normale Supérieure, suivaient jadis, en première année *tous* les *mêmes* cours.

En dehors de l'étude de l'état actuel de l'enseignement oral, la Commission étudiera les ouvrages en usage pour donner un tableau complet de ce qui se fait en France.

Mais M. Bourlet estime que le travail ne devrait pas s'arrêter là et que le rôle de la Commission internationale est de chercher des directions communes au moyen d'une enquête parmi les mathématiciens, les physiciens et les ingénieurs. Cette enquête pourra porter sur deux points : les *matières* qu'il faut enseigner, les *méthodes* qu'il y a lieu d'employer. M. Bourlet estime que c'est surtout le choix des matières qu'il y a lieu de faire avec soin ; quant à la méthode, il est d'avis qu'il ne peut pas y en avoir deux : une pour les mathématiciens et l'autre pour les physiciens, et que l'enseigne-

ment des mathématiques aux physiciens doit conserver son caractère de rigueur et de logique. On n'enseignera pas les fonctions monogènes de M. Borel, mais ce que l'on enseignera on devra le faire avec toute la précision nécessaire. La Commission internationale devant se réunir vraisemblablement à Pâques 1914 à Paris, M. Bourlet espère que le volume sera prêt quelques mois d'avance.

M. F. Enriques (Bologne), remarque que M. Runge s'est placé à un point de vue utilitaire en se demandant quels instruments il faudra donner au physicien. Il y a lieu de poser une autre question qui n'a pas moins un intérêt pratique, c'est-à-dire comment on peut attirer les jeunes gens à l'étude de la physique.

M. Enriques remarque que, dans plusieurs pays au moins, il y a une tendance des étudiants les *mieux doués* à préférer l'étude des questions de mathématiques pures à celles de physique. Cela dépendrait-il de ce que l'on néglige le plus souvent de présenter aux élèves les côtés de la physique théorique qui sont les plus beaux et les plus intéressants, en expliquant le but même de la science qui consiste à mettre d'accord les faits avec les représentations de notre esprit ?

Il n'est pas douteux que les progrès de la physique exigent de se tenir près des faits d'expérience et que l'expérience demande un long apprentissage. Cependant on ne peut méconnaître que certains esprits élevés ne sauraient se soumettre à l'effort de cet apprentissage s'ils ne voient d'abord l'intérêt des questions qu'on est appelé à résoudre par cette voie. D'autres aussi qui n'auront jamais la faculté de fournir eux-mêmes un travail expérimental utile, pourraient apporter une contribution aux questions théoriques grâce à une intuition heureuse.

M. Enriques pense que l'enseignement actuel de la physique mathématique n'est pas fait assez dans le sens de développer cette intuition et parfois même qu'il tend à repousser les esprits qui ont une plus grande intuition par un excès de développement des algorithmes de l'analyse où le moyen semble être pris comme une fin.

Sir G. Greenhill (London). — The Report we have had in our hand for preliminary study, and the exposition of it by Prof. Runge, has covered the whole ground of the state of mathematical training of the student of Physics.

But a participator in the discussion must confine himself to some detail, where his experience encourages him to offer some remarks.

In my own case I endorse heartily what is said of the overgrowth of Descriptive Geometry (See Question II).

The subject is too often easy and soft, and the student grows too fond of it, and cannot be brought back to harder study of the Calculus.

We found this at Coopers Hill College, where I was one of the original staff. Reports from India complained of the young engineer we sent out: that he knew no mathematics, but he could *draw*.

Give him a task on the drawing board with his instruments and he is pleased to work for ever. In fact his instructors at Coopers Hill used to groan at his output of drawings.

So although we envy Prof. Gutzmer his Mathematical Institute at Halle, there is one point of his equipment we do not admire so much- the elaborate laboratory for drawing and descriptive Geometry.

For my part I would rather see a Mathematical Workshop in its place, with a carpenters bench and tools, an anvil and some large hammers, and other simple apparatus for illustrating elementary dynamical principles, and making them familiar to the muscular sense.

Prof. WEBSTER (Clark University, Etats-Unis). — I find myself in general agreement with most of the gentlemen who have spoken, especially with the ideas of Professor Runge, as expressed in his admirable report. I regret very much the distance that often separates the mathematician from the physicist, especially the lack of perception that often exists of what the physical student needs. I should like to point out a very important practical consideration in the words « Ars longa, vita brevis ». In other words so much time must be taken for the education of the physicist that it is totally wrong to waste precious time on what is not useful. I fully agree that the teaching should be thorough- the best is none too good, but it is foolish to spend time in pointing out to the student imaginary difficulties that he will never encounter. As an example, the physicist will need to integrate many functions, but he will not require a rigid discussion of the conditions of integrability of a function, since all the functions that he will meet will probably be integrable. He will have to make frequent use of Fouriers series, but it would be wrong to devote several months of his time to the study of all sorts of convergence and non-convergence of series in general. I believe that every mathematician should know the main principles of physics, just as much as the physicist should be acquainted with the leading methods of mathematics. It is also quite possible to illustrate mathematical ideas, by physical examples which are interesting, illuminating and perfectly logical. I need only suggest the notions of velocity and acceleration, and the employment of such physical ideas as are the possession of everyone.

Sir Joseph LARMOR (Cambridge) said that what he had heard induced him to ask them to consider the position of the mathematicians. In mathematical teaching they ought not to be expected to give up everything that was interesting, and confine themselves to routine work and to providing mere tools to be used in more attractive occupations. What we were suffering from was overspecialisation. In his view mathematics included the whole of theoretical physics; there was no essential difference between reasoning on the doctrine of thermodynamics and reasoning on the doctrine of limits. Mathematics was not all technical algebraical analysis, any more than physics was all experimental dexterity.

M. E. BOREL (Paris) se déclare entièrement d'accord avec M. Runge. Nous devons tendre à rendre plus simple l'enseignement des mathématiques. Puis il donne des renseignements sur ce qui se fait à l'Ecole normale supérieure. En première année l'enseignement est commun aux physiciens et aux mathématiciens, sauf de rares exceptions. La méthode et le choix des matières dépendent souvent des questions d'actualité, de mode et de la personnalité du maître.

M. Ch. BIOCHE (Paris) estime que les physiciens ou naturalistes doivent avoir quelques connaissances générales des mathématiques, en dehors des connaissances pratiques qu'ils utilisent journellement, de façon à ce qu'ils puissent savoir qu'à l'occasion de telle question les intéressant ils trouve-

ront auprès d'un mathématicien professionnel les indications qui leur seraient utiles.

Lorsqu'on veut traiter un problème d'ordre pratique il ne suffit pas d'en avoir une solution théorique ; il faut en avoir une solution commode. Il importe que, dans l'enseignement mathématique, on se préoccupe de discuter les solutions des problèmes au point de vue de la simplicité dans les applications

Prof. Love (Oxford) wished to associate himself with Sir J. Larmor's view. The ideal thing would be, every mathematician a physicist and every physicist a mathematician. To gain time for the necessary training it would be desirable to discard obsolete things in mathematics and to devise some scheme by which a general knowledge of physics could be brought within the reach of all students of mathematics. In regard to the proposed choice of mathematical matter, he thought there might be a tendency to make the subject too narrow, with too little regard to the possible future application of branches of analysis which are now studied for their own sake.

Prof. Hobson (Cambridge) said that perhaps too large a share of the blame for the undoubted evils of the present divorce of Mathematical and Physical teaching had been put upon the Mathematicians. If the mathematical teacher spent too much time on matters which would be better omitted and in the teaching of merely analytical expertness, it might be said that the Physicist spent too much time on the merely manipulative work of the Laboratory. Mathematical teachers were expected to teach only what was directly useful to the Physicist, and also what was directly useful to the Engineer, or to the Chemist. The main object of the Mathematical teaching ought to be that of developing habits of clear and logical thinking in the pupils, and that could not be hampered by a too close adhérence to what was required only for application in other departments. Dexterity in such matters as the use of the slide rule was not part of what the Mathematician should be expected to teach. He would lose his self-respect if he became a mere provider of tools for use in subjects outside his own.

Sir J.-J. Thomson (Cambridge), l'illustre physicien, reconnait que de nos jours on exagère parfois le temps accordé aux travaux pratiques dans l'enseignement supérieur où ils prennent une trop grande place. Ce serait nuisible de donner aux physiciens un enseignement mathématique specialisé, par contre il faut qu'ils soient familiarisés avec les applications pratiques.

Prof. Runge. — I believe that the introduction of numerical and graphical exercises do not interfere in any way with the logical deduction of pure mathematical theorems. My idea is that practical mathematics are indispensable not only to the physicist but also to the pure mathematician in so far as they enable him to work out examples for the application of pure mathematical theorems, and in this way enlighten him and aid his logical deductions.

Remarques de M. F. W. Lanchester (Birmingham). — The question of the mathematical training of the physicist in the university has perhaps two aspects — that is from the point of view of the mathematician, and from the standpoint of the work which the student in after life finds it incumbent upon him to undertake. Whether trained primarily as enginer or physicist a large number of those who are trained in applied mathematics either en-

ter by intention or by accident into the engineering profession. The following remarks may be taken to relate more particularly to this class of student.

The weakness commonly exhibited by the engineering student, who having graduated in a university takes a post as an engineer or in an engineering work, is found more often than not to lie in his inability to deduce from the complex maze of facts with which he has to deal, a definite problem in what may be termed « examination-question » form[1]. In my experience there is usually ample knowledge of mathematical principles and mathematical method, but there is a very obvious deficiency in the development of the mathematical student's reasoning powers, which are the essential counterpart to any purely mathematical training, before it can serve him usefully in the responsible carrying out of engineering work. It is naturally very questionable whether it is possible by any modification or supplementing of the university education to make good this deficiency entirely; in fact it stands to reason that for the elastic application of his mathematical training the latter will require to be supplemented by considerable actual experience before it can be fully utilized. Notwithstanding this, I consider that there are certain subjects (which in the discussion of the paper were belittled by some of the speakers present) which a little reflection will show to be of vital importance. As an example (and in my opinion a very important example) it is impossible to overrate the utility from an educational point of view of descriptive geometry. There is no subject that teaches a student to *think in three dimensions* so well as descriptive geometry, and the inability to think in three dimensions is one of the most common failings of the university mathematically trained engineer. This aspect of descriptive geometry is quite apart from its obvious utility in training a man to read drawings of a complicated character such as are constantly before him in the course of his duties. I would call particular attention incidentally to the difference between a study such as descriptive geometry which is a real educating factor and enlarges the capacity of the mind, and those mathematical studies which cannot be regarded in the same light, but of which one must think as analagous to tools in the hands of a workman. I do not wish to suggest that all mathematical work is merely a matter of providing a mental tool equipment, but only that a great deal of the ordinary mathematical curriculum can be looked upon from this point of view, rather than be considered as a real educative factor.

I am convinced that the mathematical investigation of three dimensional problems is in many cases detrimental to the expansion of the mind, inasmuch as the mathematician rather than think in three dimensions employs a machine process to evade mental gymnastics: for instance in fluid dynamics he thinks once and for all in three dimensions in an imaginary infinitesimal unit cube of the fluid. From this he makes equations and from these equations he obtains his results. From the time these equations are formulated he may forget all about three dimensional space until he comes to the interpretation of his results. I think that in the mathematical training of a young engineer such dangerous methods should not be introduced until

---

[1] It is as if some-one accustomed to dining off a well cooked and nicely served steak were shown the carcase of a freshly slaughtered ox and told to get their dinner out of that!

he has had a very thorough grounding in descriptive geometry. There is truly the risk pointed out by Professor Greenhill that after he has devoted a great deal of time to descriptive geometry he will be liable to shirk, or ignore, or neglect the more rigid mathematical method; but even if this undesirable consequence results (which in nowise appears necessary) I think that it may be taken as the lesser of two evils.

Briefly from a more general point of view I think that in the discussion of the circular there has been too much tendency to dwell on detail questions as to what should be taught and what should not be taught, and to ignore the principle that true education ought to be a process of developing and expanding the mind in those directions in which such development and expansion is most likely to serve the ends in view, and that the provision of a mental tool equipment is, or should be considered as merely an incidental.

TROISIÈME SÉANCE

Mardi 27 août, à 9 heures et demie du matin.

Présidence de M. R. FUJISAWA (Tokio) et C. GODFREY (Osborne)

Ordre du jour :

I. — *Intuition and experiment in mathematical Teaching in the Secondary schools* (l'intuition et l'expérience dans l'enseignement mathématique des écoles moyennes), rapport présenté par M. D.-E. SMITH (New-York). — Discussion.

II. — Remarques sur une biblographie de l'enseignement mathématique, par M. C. GOLDZIHER (Budapesth).

III. — Prolongation du mandat de la Commission, Les travaux pendant la prochaine période.

I. — INTUITION AND EXPERIMENT IN MATHEMATICAL TEACHING IN THE SECONDARY SCHOOLS[1]

Report presented by

David Eugene SMITH (New-York)

I. — Method of Investigation.

In the year 1911 the Central Committee appointed a subcommittee known as « Subcommittee A » charged with the duty of investigating the rôle of intuition in the teaching of

[1] The German topic as assigned was « Anschauung und Experiment im mathematischen Unterricht der höheren Schulen ». This was translated into French as « L'intuition et l'expérience dans l'enseignement mathématique des écoles moyennes ». The translation is not

secondary mathematics. It assigned to Dr. W. Lietzmann of Barmen, Germany, the work of preparing a questionnaire that should facilitate the work of securing the data upon which to base a report, which labour was diligently performed. The questionnaire was sent out during the winter of 1911-1912 and replies were received by April 1, 1912, from representative teachers of Austria, England, France, Germany, Switzerland, and the United States. These replies were held until July 1, and no others having been received by that date, to the writer of this paper was assigned the duty of preparing the present report.

In the several countries the method of investigation differed materially. In some cases the « rapporteur » sent out local questionnaires; in others he referred to the printed reports of the International Commission; while in others a committee considered the replies. The results seem to show that it was a matter of no particular significance which plan was adopted.

2. — Types of School Considered.

The questionnaire having been prepared in the German language, and naturally under the influence of the German school system, the terms used do not exactly meet the situation as it appears in all of the other countries. It is therefore necessary to define with some care the terms employed, and to give the English interpretation to the several questions.

The Gymnasien and « Realanstalten » of Austria and Germany corresponding rather closely in years to the lycées of France, and to the Gymnasien and « Kantonschulen » of Switzerland. They correspond somewhat less closely to the so-called « public schools » of England, while they are radically different from the public « high schools » of the United States. It therefore becomes necessary to define « Unterricht der höheren Schulen » as the teaching in those school years that correspond in the age of pupils with the school years of the Gymnasien, of the lycées, of the

exact, Anschauung being neither exactly Intuition nor exactly Perception, and neither Experiment or Experience being a satisfactory equivalent of the German word Experiment.

This report is based upon data collected by Dr. Walther Lietzmann, Oberlehrer an der Oberrealschule in Barmen, Germany. The data were secured through replies to a questionnaire prepared by Dr. Lietzmann, these replies having been sent by the following gentlemen :

Austria, Prof. Dr. Erwin Dintzl, Vienna;

England, Charles Godfrey, M. A., headmaster of the Royal Naval College, Osborne;

France, M. Ch. Bioche, Professeur au lycée Louis-le-Grand, Paris;

Germany, The late Prof. Dr. P. Treutlein, G. H. R., Direktor des Real- und Reform-Gymnasiums, Karlsruhe; and Dr W. Lietzmann, Barmen.

Switzerland, M. H. Fehr, Professeur à l'Université de Genève, Geneva;

United States of America, Professors David Eugene Smith, Teachers College, Columbia University, New-York City, and J. W. A. Young, the University of Chicago, Chicago, Illinois.

« public schools » in England , and of the last part of the « elementary school », all of the « high school », and the first two years of « college » in the United States. This means that the study includes the work of pupils from about the age of 10 to about the age of 19 years. The French translation of *écoles moyennes* seems best to describe the schools in question.

It should also be noted that the replies have reference to the work done in schools of a general type, including both the classical and the non-classical, and usually not to that done in such special schools as those devoted chiefly to agriculture, mechanical arts, navigation, mining, and the like. Austria, for example, expressly limits the report to the Gymnasium, Realgymnasium, Reformrealgymnasium, and Realschule. England considers what are described loosely as « public schools », those which supply the greater number of students to the ancient universities of Oxford and Cambridge, and other general secondary schools. Germany and Switzerland report only upon the work of the Gymnasien, Realgymnasien, and Oberrealschulen, and France chiefly upon that of the lycées and collèges. In the United States, owing to the fact that the school system differs materially from that of Europe, the report refers to the upper classes in the « elementary school », to all of the work of the general « high school », and to the first two years of the « college »[1]. In all the reports, however, emphasis has been laid upon the general type of school rather than the special.

3. — The Question of Elementary and Higher Schools.

It is evident that the scope of the inquiry might well have been enlarged so as to include the important question of intuition and experience in the Kindergarten, the Ecoles maternelles, the primary school, and even the home. As Dr. Montessori is now bringing into prominence in Italy and America, and as thousands of successful teachers everywhere have long been proving, intuition and experience play a very important part in the first stages of a child's education in general, and with respect to mathematics in particular. M. Laisant has brought this important question to the attention of his countrymen and Lietz and other well-known educators have done the same in other countries. It was felt by the committee, therefore, that it was better to call the attention of

[1] The « elementary school » generally has 8 years or Grades, the child entering Grade I at about the age of 6-7, and finishing Grade VIII at the age of 13-14. The « high school » has 4 years, the pupil entering at the age of 14-15, and leaving at the age of 17-18. The « college » follows, the entering age being 17-18, and the 4 years being completed at the age of 21-22, the bachelor's degree being then conferred. The strictly-speaking university courses are entered at the age of 22-23, and the degree of doctor of philosophy may be obtained at the age of 25-26.

teachers to the importance of the question in the *écoles moyennes* at this time, and to reserve for further consideration the question of the primary schools. It is to be hoped that, in case the Central Committee is continued for another period of four years, this question will be considered with the care that it deserves.

As to higher institutions of learning it should be observed that the topic assigned to this committee is closely related to that assigned to Subcommittee B, *The Mathematical Training of the Physicist in the University*, and this relationship appears the more evident as we consider the report that has already been presented by Professor RUNGE at the session of August 26, 1912.

4. — Method followed in this Report.

It seems to the committee that it is advisable, in this report, to give a summary of the reports prepared by the representatives of the various countries, rather than to submit these reports in full. This is especially the case because the representatives of some of the countries have merely referred to pages of published monographs instead of giving the information directly. It also seems advisable to give this résumé under each of the general rubrics suggested by the committee rather than to attempt any other arrangement.

5. — The general situation.

Before proceeding to consider the questions in detail it is desirable to say a few words concerning the general situation in the various countries. The first thing that must strike any observer is that we are passing through a period of great change in all that pertains to secondary education, including the field assigned to this committee. A subject like descriptive geometry, for example, can hardly be said to occupy any definite position, so rapidly changing are the views concerning its importance, its significance, and the schools in which it should be taught. Austria makes much of it in the Realschule, less of it in the Realgymnasium, and almost nothing of it in the Gymnasium. This is what we might expect, but what descriptive geometry will do in the Reformrealgymnasium it is rather early to say, since this type of school is only beginning to appear in that country. In England there is seen the same spirit of unrest, and the training of boys in special lines is having its influence in the general fields as well. The teaching of boys who are going into the army, engineering, or surveying, tends to assume a more intuitional and

experimental character than that of other boys, and the army requirements during the last 10 years have no doubt had a powerful reaction on the character of the teaching throughout the English public schools. On the other hand, as regards the teaching of boys other than specialists, probably the prevalent view in England is that the proper field for methods of intuition and experiment is in the middle and lower classes rather than the upper. These methods are viewed with suspicion by many masters who are concerned with the more able mathematical boys, and in many cases practical methods learnt by the boys in the lower classes are allowed to rest in the upper. Many teachers consent to the postponement of abstract methods during the earlier teaching only on the understanding that the abstract character of the higher teaching shall be preserved.

In the United States the spirit of unrest in all educational matters is also manifest, and in particular with respect to this whole question of intuition and experiment in mathematics. The question has been agitated for the past ten years, and many kinds of experiments have been tried, varying from an extreme laboratory method with a minimum of mathematics to the most abstract kind of work in which intuition and experiment played almost no part. It seems quite impossible to report as to any fixed policy or general consensus of opinion upon the subject.

We shall now take up *seriatim* the various topics set forth in the questionnaire that was sent out by Dr. Lietzmann last winter. Since it will not be profitable to present orally the report in full, the details being better assimilated from the printed page, a brief summary of the results will now be given.

In the work of measuring and estimating, a more practical form of mensuration seems to be developing, especially in Austria, Germany and Switzerland. England, France, and the United States seem to have given the matter less attention, or at least to have secured less definite results. An elementary trigonometry is more commonly found at an early period in the first three countries, thus allowing for outdoor work with simple instruments at an earlier stage.

In the matter of geometric drawing and graphic representation of solids, the various countries seem to be in a transition stage between the period in which this was considered part of the duties of the art teacher and that in which it is to be taken over by the department of mathematics. The tendency is general to consider this work as part of mathematics. The nature of the work, is not, however, at all settled; even the term « descriptive geometry » has no well-defined meaning. It may be said in a general way that the subject is taught in schools of the Oberrealschule type, but not in those of the Gymnasium type, and

that the tendency is to increase the work both in amount and quality in the former.

Graphic methods of representing functions have become universal in the last generation. From the idea of a line representing an equation the tendency is at present to that of a graphic representation of a function. Just how much the pupil is acquiring of the function concept seems often to be questioned, and the whole subject is in the experimental stage at present. Of the value of squared millimeter paper there is no question anywhere, but it seems equally true that its use has been abused by the over-extensive treatment of equations and by its application to proving the obvious.

The contracted methods of computation that were prominently advocated fifty years ago do not seem to have advanced materially, owing to the feeling that they are not really practical. On the other hand the use of logarithms seems on the increase, and the slide rule has come into great favor in the technical schools where approximate calculation is prominent. Graphic methods of computation and of the approximation of roots of numerical higher equations as worked out by Professor Runge, for example[1], have found but little place in the schools of the type under investigation. It is probably too early to say what their success will be in this kind of school, or when, if ever, any large body of teachers will be found capable of treating the subject.

In general it may be said that more progress towards the recognition of the rôle of intuition and experiment in secondary mathematics seems to have been made of late in Austria, Germany, and Switzerland than in England, France, and the United States[2]. A comparison of the work done in these several countries, particularly in the way of applying mathematics seriously to the problems of life, and of visualizing the work in mensuration, will be one of the valuable results of the present international movement.

The greatest questions of all, however, relate to the nature of geometry and to the treatment of the function concept. Other questions are important, but here is the dominant issue that must be met in the next few years.

The first of these questions is this: How much of the geometry of the secondary schools shall be inductive, and how much deductive? Few are ready to assert to-day that it is best to begin geometry with a study of Euclid or Legendre. There must be a preparatory stage, and this must be characterized by intuition and experiment. But how much time shall be assigned to this stage?

---

[1] In his Columbia University (New-York) lectures.

[2] At least this is the deduction from the reports submitted in reply to the questionnaire.

and exactly what ground shall be covered? and, what is more important, to what extent shall intuition replace deduction of the Euclid type?[1] Must we have two or even three years of *Anschauungslehre*, as some have advocated, or is a year or a half year enough?[2] How much must the rigorist in geometry be compelled to concede to the demands of the non-mathematical mind? Was Newton right when he expressed the opinion that all this intuitive work is pretty, but that it is not geometry? Must the real geometry of the past go by the board, as went the mediaeval logic, or will its position be strengthened by this propaedeutic work? Is the value of the Euclidean type of geometry such as to save it from destruction, or is it to be so diluted by this consideration of pictures, of models, and of simple mensuration as to be unrecognizable? Is the over-powering force of to-day, the force of modern industry, the cause of the growth of intuition and experiment in geometry? And if so, what will the over-powering force of to-morrow, the force of social considerations, demand? These are questions that we hear about us, but they are questions which we are not yet able scientifically to answer, and fortunately they are not within the province of this committee to attempt to answer.

In general it may be said that it is the plan of the Teutonic countries to mix the intuitional and the deductive work from the outset, while in France, and now in England, the plan is to let an inductive cycle precede a deductive one. The United States is only beginning to talk about the question, whatever tendency there is being towards the Anglo-French plan. Now is either of these plans better than the other? and can this be proved? Or is the question one of racial habit? Would the German plan succeed in the United States, or is the French plan better adapted to such a conglomeration of races? Would the English scheme of arranging the work in three stages, with intuition and experiment the initial one, be better for Germany than the totally different scheme that characterizes most of the recent textbooks of that country? Many people look upon the German plan as unscientific, attributing its apparent success to the excellently trained teachers who carry it out, while others look upon the cycle arrangement as ultra-scientific. Which is right? or is neither right? It is questions of this kind that the reports of the Commission will help us to answer in the next few years; and for the present it suffices to state the problem and to call attention to its importance.

---

[1] Readers are referred to the recent works by Treutlein and Timerding, published by Teubner.

[2] See Lietzmann, *Stoff und Methode des Raumlehreunterrichts in Deutschland*, 1912

The second important question relates to the treatment of the function concept. Here the rôle of intuition, in the first steps, is more clearly defined, since we have no well-tried body of knowledge to be set aside. The chief argument for the elaboration of the function concept seems to be that the calculus has already found place in the schools under our consideration, and if it is to hold this place and continue to grow in strength, we must cease to impose it merely from above, — we must prepare for it from below. The notions of limit, variability, rate, function, and graph must be so gradually introduced and must become so clearly understood that when the calculus is reached they will be met as we meet familiar friends. How to do this economically is one of the problems relating to intuitional mathematics. It is one of the interesting facts of present education that teachers are demanding the elimination of the incommensurable quantity from elementary demonstrative geometry, only to find themselves face to face with a demand for the study of limits, functions, and rate of change. The movement in favor of the elaboration of the function concept, however, is too recent to judge of its permanence in secondary education. Starting in France within the last twenty years, and vigorously advocated in Germany within the last decade, it has much to commend it if reasonably treated [1].

6. — Measuring and Estimating [2].

Austria reports that much is now being made of this work in the lower and middle classes, and that this will have its influence in the higher classes. Some idea of the nature of this work may be obtained from the recently published *Praktisch-geometrische Schülerübungen für die unteren Klassen*, by Fr. Schiffner. As an illustration of the nature of this work Dr. Matter, of the Stiftsgymnasium in Seitenstetten, relates that the children in the second class (numbering from the lowest in the school) measure the height of a tower by the simple use of a measuring tape and a large protractor. They find two angles and the included side of a vertical triangle, and then lay this off on the horizontal plane, and finally draw it to scale and measure the resulting figure. Similar work is also done in the classes in geography. In order to ascertain how much work of this general nature is done in the upper classes of the Gymnasien, Realgymnasien, and Realschulen, Dr. Erwin Dintzl of Vienna, who reports for Austria, secured in-

[1] See SCHIMMACK, *Die Entwicklung der mathematischen Unterrichtsreform in Deutschland*, 1911.

[2] Messen und Schätzen (Mesure et estimation des grandeurs).

formation from 38 institutions. He finds that in Vienna there is difficulty in carrying out a scheme of field work in connection with trigonometry owing to a lack of proper instruments, the crowding of the school curriculum, and the proper demands of out-door play. Occasionally, however, facilities for this work are found, and he mentions a satisfactory Taschen-Universal-Instrument made by Neuhöfer for the use of students and at the price of 170 Kroner (say a little over £ 7, 178 fr., or $ 34.50). In other cities a satisfactory amount of geodetic work is being done in the upper classes, the proximity to the country making this feasible.

In England, 58 % of the « public schools » investigated by Mr. Godfrey attempt no work in practical geodetic measurements, but in the remaining 42 % such work is done, but as a rule only by special classes of students, such as those preparing to be surveyors, engineers, or army officers. Out of the schools reporting, 14 % have a theodolite, and others have plane tables or other instruments. In the others secondary schools 56 % do work of this kind. Apparently more work of this nature is done here than in the older type of « public school, » theodolites being found in 23 % of the schools, and simpler instruments in numerous others.

In France it is rare that a lycée or collège does any work in geodetic or astronomical measurement. In the *Ecoles des Arts et Métiers*, where the pupils are about 17 years of age, elaborate courses in surveying are given, and pupils become expert in the use of such instruments as the theodolite. This work is done in the department of mathematics. The teacher of geometric design is usually the teacher of mathematics, and he relates the work in surveying to that in drawing, as in the case of profiles, plots, and the like.

In Germany the work varies in the different states. Dr. Lietzmann states that in the Prussian schools the theodolite is usually found, and that along with it are seen simple instruments for angle measure, angle mirrors and prisms, measuring rods, and the like. Simple instruments are often made by the pupils, particularly instruments for the measure of angles[1].

Much is made of out-door work in the classes in geometry and trigonometry, in the measuring of heights and distances the pupils making use of the instruments[2]. In Mecklenburg and Oldenburg about $^2/_3$ of all the secondary schools give systematic

---

[1] For the rôle of intuition in the classroom in geometry, and for the conduct of a class period, see Dr. W. Lietzmann, *Die Organisation des mathematischen Unterrichts an den höheren Knabenschulen in Preussen*, p. 65.

[2] Ib., p. 161. See also Dr. H. Wieleitner, *Der mathematische Unterricht .. im Königreich Bayern*, p. 42, 62; Dr. E. Geck, *Der mathematische Unterricht .. im Königreich Württemberg*, p. 25; Prof. H. Cramer, *Der mathematische Unterricht im Grossherzogtum Baden*, p. 35; Prof. J. Wirz, *Der mathematische Unterricht .. im Elsass-Lothringen*, p. 9.

field work, and even in the rest this work is not neglected. At least in certain parts of Germany apparatus and models for the teaching of geometry play some part, and a helpful list of materials is given in a recent monograph by THAER, GEUTHER, and BÖTTGER [1], and in one by CRAMER [2]. The testimony of teachers there as elsewhere, however, is that there is a danger in the extensive use of models in geometry, although a reasonable use of apparatus in field work has a value that cannot be doubted.

With respect to mathematico-astronomical work in the German schools, it is coming to be recognized that such work is feasible and desirable. Numbers of Höherenschulen in Prussia have telescopes for astronomical observation although those that are suited to measuring are not usually found [3]. The subject has recently been treated in a monograph by Professor Hoffmann, and to this article reference must be made for detailed information [4]. The extent to which he has carried this work in his school is indicative of the German *Lehrfreiheit,* a freedom that is wanting in free America and in most other countries.

The helpful table that Dr. BRANDENBERGER has prepared to show at a glance the work done in the Gymnasien and Realschulen of Switzerland [5] gives the impression that relatively little field work in geometry, and even less in astronomy, is done in the Gymnasien. In Kanton Bern surveying is given in the summer; in Unterwalden some practical work is done with the theodolite and in the measuring of lengths and areas; a few Gymnasien give an hour a week to surveying during one year, usually with pupils of the age of 16-17 years; a few others possess observatories with sufficient apparatus for mathematical work. Of 25 Realschulen reporting, however, 12 give surveying as a definite topic in their curricula [6] and the rest make more or less of the subject in connection with trigonometry. A number of the schools are supplied with such instruments as the theodolite, cross staff, angle mirror, angle prism, and plane table. In certain schools, as in the technical classes at Lugano and St. Gall, very satisfactory courses are given including triangulation, the measurement of base lines, the making of profile maps, and the finding of altitudes.

In the United States there are, generally speaking, no required courses in trigonometry or geodesy in the « high schools », — that

---

[1] THAER, GEUTHER, und BÖTTGER, *Der mathematische Unterricht in den Gymnasien... Mecklenburgs und Oldenburgs,* pp. 22, 24, 27, 78.

[2] *Der mathematische Unterricht im Grossherzogtum Baden*, p. 30.

[3] LIETZMANN, *Die Organisation*, p. 43.

[4] Prof. B. HOFFMANN, *Mathematische Himmelskunde und niedere Geodäsie an den höheren Schulen.*

[5] Dr. K. BRANDENBERGER, *Der mathematische Unterricht an den Schweizerischen Gymnasien und Realschulen*, pp. 13-25; p. 57.

[6] Ib., pp. 60, 62, 119.

is in those 4-year schools that are intermediate between the 8-year elementary schools and the 4-year college. In the third or fourth year when the pupil is 16-17 years old, elective work is offered in trigonometry by the better class of high schools. Occasionally the theodolite or some similar instrument is used, but in general the « high schools » do not possess such apparatus. Such work is regularly taken up in the first year in college, and then as an elective study. It may thenceforth be carried on as an elective by students of general mathematics, but it is required of engineers.

In certain special schools, however, some interesting work may be found. For example, Principal Stark studied with the writer not long ago the subject of primitive mathematical instruments and their relation to present-day teaching. The results were put in practice in the Ethical Culture School in New-York, the children making astrolabes from paper protractors and deriving much interest from their out-door measurements with these and other instruments. In the Horace Mann School, connected with Teachers College, New-York, there is at present a class in vocational mathematics, well supplied with simple instruments which they use out of doors in their eighth school year, preparatory to the more scientific work that follows[1].

Astronomical work requiring the use of instruments may be begun in the first year of college and may be continued thereafter. It is elective throughout. The student who pursues the courses will be prepared to do scientific photographic work in the senior year (the fourth year in college, about 21-22 years of age). Colleges of the better class are supplied with material for work of this character.

The educational problem may be stated generally as follows: What simple, inexpensive instruments may advantageously be used to increase the interest in the early stages of mathematics? In particular, what can be done to make the inductive cycle or phase of geometry more real and interesting, without weakening the deductive side? Then what further apparatus can be used to advantage in the later geometry and trigonometry?

7. — Geometric Drawing and Graphic Representation[2].

The questionnaire asked first concerning the work done in descriptive geometry (oblique parallel projection), preparation of plans and elevations, central projection, and the theory of shad-

[1] The class is conducted by Mr. J. C. Brown who has contributed to the psychology of elementary drill work in mathematics.

[2] Zeichnen und Darstellen (Dessin et représentation graphique).

ows; concerning the fusion of this teaching and the teaching of stereometry; and concerning the teaching of the subject in the department of mathematics or the department of drawing.

In Austria, in the Realschulen, the subject is nominally in the hands of a special teacher examined and appointed for the purpose. Professor Dintzl raises the question as to the wisdom of this arrangement, saying that to the qualifications of a teacher of descriptive geometry must be joined those of a teacher of mathematics if we are to have successful results. At present in about a third of the schools the teacher of mathematics is also the teacher of descriptive geometry in the three upper classes (V-VII). There is a well-defined line of demarcation between stereometry and descriptive geometry as the work is carried on, although the latter is employed in representing the solids met in the former. It appears, therefore, that certain definite work in descriptive geometry is done in the upper classes of the Realschulen. In the Gymnasien descriptive geometry is not a separate object of study. In the work in stereometry, however, plans and elevations are drawn, and orthogonal projections of parallelepipeds, octahedrons, pyramids, and the like are prepared [1].

In England descriptive geometry was formerly taught only to boys who needed it for special examinations, and then generally by the art master, the result being mere work by rule with great attention to artistic ink-work. Two or three causes are operating to change this position: (1) The Army examiners now treat the subject as part of mathematics, and do not require inking-in, the result being that mathematical masters are not discouraged from teaching the subject by consciousness of their technical weakness on the artistic side. (2) Descriptive geometry is now required for an honours degree in mathematics at Cambridge, and this circumstance will result in an increased output of mathematical masters interested in the subject and will have its direct reaction on school work. (3) Boys intending to study engineering at the University are encouraged to master descriptive geometry and perspective at school. Oblique parallel perspective is little studied in English schools. Descriptive geometry according to Monge (with work in plans, elevations, rabattements, etc.) is taught in 77 % of the « public schools » reporting, and perhaps in half of these it now forms part of the school course for the upper classes, in other cases being confined to specialists. Of the other secondary schools, 60 % have it in their courses. It seems not to have established itself, however, because it does not enter into

---

[1] See also ADLER, *Der Unterricht in der darstellende Geometrie an den Realschulen, Gymnasien, Realgymnasien und Reformgymnasien*, and MÜLLER, *Der Unterricht in der darstellenden Geometrie in den technischen Hochschulen*, in Heft 9 of the Austrian reports.

the ordinary school examinations. Where it is taught two thirds of schools « correlate it with solid geometry, and in the majority of the « public schools » cases it is taught by a mathematician. It is seldom that the « public schools » do what is often done in other secondary schools, namely correlate descriptive geometry with manual work in the carpenter's shop. Perspective, being more technical than descriptive geometry, has not been so extensively taken over by the department of mathematics. In 63 % of the « public schools » reporting, it is taught in connection with drawing and usually by the drawing teacher. Accurate drawing in connection with projective geometry, including the construction of conics by anharmonic (cross) ratio properties, is not done at all in 69 % of the schools, and only a few of the most advanced boys in the other schools are encouraged to reach this comparatively advanced work.

France reports that descriptive geometry is taught in the lycées and collèges only in 1re C and D (the pupils being 16 years of age), in « Mathématique A et B, » and in the classes preparing for the higher scientific schools[1].

The teaching of descriptive geometry is generally distinct from that of stereometry. Usually geometric drawing is not taught by the teacher of mathematics, but at present there is an active effort being made to put the direction of the work in the department of mathematics[2].

Germany, like Austria, seems to be taking a leading position in this line of work. Models for the study of descriptive geometry seem to be not uncommon. In the Realgymnasien and Oberrealschulen especially there is given definite work in this line. Oblique parallel projection is taught in Prussia in the Obersekunda (the seventh year of this type of school, or the pupil's tenth school year), and descriptive geometry as a special subject is taught in Oberprima (the last, ninth year[3]). The tendency in Northern Germany has been to make descriptive geometry in its various phases an elective subject in the domain of art instruction. In Saxony and the Southern states it has more generally been required[4]. The tendency throughout Germany seems to be in favor of putting geometric drawing, under whatever name, in the hands of the teachers of mathematics[5]. In South

[1] See the report of M. Rousseau and that of M. Blutel (vol. II).

[2] The report as sent to this committee was very brief, and for further information the reader is, therefore, referred to the printed reports of the Commission.

[3] See particularly, Lietzmann, *Die Organisation*, etc., p. 139; and Zühlke, *Der Unterricht im Linearzeichnen und in der darstellenden Geometrie an den deutschen Realanstalten*.

[4] Thaer, Geuther, und Böttger, *loc. cit.*, p. 81.

[5] Ibid., pp. 31, 32, 36, 56, 70, 73; Wikleitner, *loc. cit.*, pp. 29, 35, 43, 56; Witting, *loc. cit.*, pp. 27, 29, 33, 36, 57, 64; Cramer, *loc. cit.*, pp. 15, 20; Schimmack, *loc. cit.*, pp. 13, 15, 20, 43; Wirz, *loc. cit.*, pp. 9, 17, 25, 31, 50; Zühlke, *loc. cit.*

Germany the work has for a long time been in a satisfactory condition, but it was quite neglected in North Germany until 1898. In general it may be said that geometric drawing is commonly given in the Gymnasien and Oberrealschulen; that, as might be expected, it is found chiefly in Sekunda and Prima; that in the Oberrealschulen it has much more attention than in the Gymnasien; that it was formerly related to the art work but now it is being taken over by the mathematical department; that in the non-technical schools the descriptive geometry is related more to the representation of the usual geometric solids by projection than directly to the making of the working drawings of the artisan; and that more attention is being paid to the subject than is the case in the non-technical schools of any other country except Austria and Switzerland.

In Switzerland[1] the Gymnasien devote little attention to descriptive geometry, most of them not mentioning it[2]. In the Realanstalten, however, it is found almost without exception in the last three years[3]. In the published curricula Switzerland makes very clear the nature of the work that is done under the general terms of « Geometrisches Zeichnen » and « Darstellende Geometrie. » For example, in the curriculum of Bern the course includes work in geometric ornament, such as parquetry flooring; orthogonal projection of geometric solids; drawing of conics and other plane curves; drawing of machine models; shadow constructions; axonometry; polar perspective; solids of rotation; and plans and elevations. Such work, in a non-technical school, is found in the reports of only the three countries above named, among those that have replied to the questionnaire. Moreover it appears that in the large majority of the schools the practical bearing of all of this work upon industry is fully recognized. It also appears that the work in descriptive geometry is looked upon as belonging to the teacher of mathematics rather than to the teacher of art[4].

In the United States few general « high schools » offer work in geometric drawing of any kind. Formerly some such work was occasionally given by the teacher of drawing, but the awakening of an interest in art a few years ago led to the substitution of more free-hand drawing and color work for the mechanical drawing then somewhat in vogue. The change was justified, for the mechanical drawing was badly done as a rule and the country needed all of the improvement in art appreciation that it could

[1] See BRANDENBERGER, *loc. cit.*, pp. 14-25, 129-137.
[2] Ibid., pp. 14-20, 129.
[3] Ibid., pp. 20-25, 130. One of the clearest statements of the nature of the work to be found in any of the reports appears on pp. 130-135.
[4] Ibid., pp. 60, 62, 118, 137.

get. In the technical « high schools » that are beginning to appear in the larger cities, work of this kind is being begun, but not as yet with the thoroughness that characterizes the Austrian, German, and Swiss schools. In the technical courses of the colleges it is begun in the freshman year (about 18 years of age) and is taken only by students of architecture or engineering. These courses are rarely given by the mathematician, being left to the engineer or architect.

The educational problem may, therefore, be stated as follows : Are we making enough of drawing in connection with geometry? In particular, are we recognizing the practical value, not merely of the working drawings of the artisan, but also of geometric design, of cartography, of topographical drawing, and of geometric construction?

8. — Graphic Methods[1].

Graphic methods of one form or another are now found in the courses in mathematics, at least in the Realanstalten, in all countries, having gradually made their way from engineering, through thermodynamics and general physics, to pure mathematics. The extent to which these methods are used varies, however.

In Austria millimeter paper is used for all of the simple functions, such as the elementary ones of algebra, and the exponential, logarithmic, and circular functions. The value of the sine is found to 2 decimal places by measuring on the squared paper, and computations are often verified graphically. The planimeter is rarely used. Vector geometry is used for the purpose of representing the complex number, and for elucidating certain parts of mechanics. For the work in complex numbers it appears in the sixth class (reviewed in the eighth), and for mechanics it is introduced in the sixth (Realschule) or seventh (Gymnasium) class. The real consideration of the scalar field is hardly undertaken, but it is touched upon in the study of magnetic and electric fields, the concept of the potential, and the like, in the upper classes.

In England about 90 % of the schools state that the graphical study of statistics is given. It seems to begin mainly in the lower and middle classes of the schools. Probably it involves little beyond the plotting of tables of statistics, and for a new subject it has

[1] Graphische Methoden. (Darstellung von Funktionen auf Millimeterpapier. Vektorendarstellung. Skalare Felder. Graphisches Rechnen, insbesondere graphische Statik. Flächenauswertung mit Millimeterpapier oder Planimeter).

Les méthodes graphiques. (Représentation de fonctions sur du papier millimetrique. Représentation des vecteurs. Champ scalaire. Calcul graphique et specialement statique graphique. Evaluation de surfaces a l'aide du papier millimetrique ou du planimetre.)

made rapid progress, having both the encouragement of the mathematicians and an abundant opportunity for application. The graphical representation of functions is taught in all of the « public schools ». In 27 % of the schools it is begun in the lower classes, in 58 % in the middle classes, and in 15 % in the upper classes. Similar results are found in the other secondary schools. The work is connected with the plotting of equations and with the approximation of the roots. Whether the idea of functionality is really grasped in this work seems open to question, but the graph forms a basis from which further advance may be made. The use of vectors is found in a large majority of the schools, in connection with mechanics (velocities, accelerations, forces), this latter subject being part of the mathematical course in England. In some schools the vector is used in connection with complex numbers. Graphical statics is taught generally. Areas are estimated by squared paper in most schools, but the planimeter is rarely used.

In France the notion of coordinates is introduced when the pupil is about 14 years of age. The graph is used in the study of equations, as apparently in all other countries. The technical schools make use of graphic mechanics. In the third year of the Ecole des Arts et Métiers (age of pupil, 20 years) and in the higher scientific schools graphical statics is taught. The planimeter is not used.

In Germany the custom is growing of having, at least in the class-rooms of Tertia or Sekunda, a portion of the blackboard ruled in squares, usually about 5 cm. on a side, for the graphic representation of functions [1]. In some of the Gymnasien [2] there is carefully organized work in such representation of functions from Obertertia on. In Obertertia such functions as

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,, \quad y = \frac{1}{x}\,, \quad y = \sqrt{a^2 + x^2}\,, \quad \text{and} \quad y = ax^3 \quad \text{or} \quad ax^4$$

are treated graphically. In Untersekunda this is extended to the exponential, logarithmic, and trigonometric functions [3], and in the Obersekunda and Prima to functions of degree exceeding two [4]. In all cases the function concept is mentioned as prominent, and the use of the graph merely for purposes of solving an

---

[1] LIETZMANN, *Die Organisation*, p. 37.

[2] Ibid., p. 161.

[3] Ibid., pp. 161, 170.

[4] See also THAER, GEUTHER, und BÖTTGER, *loc. cit.*, pp. 6, 9, 79; WIELEITNER, *loc. cit.*, pp. 20, 42; WITTING, *loc. cit.*, p. 36; GECK, *Der mathematische Unterricht... im Königreich Württemberg*, pp. 21, 25, 59; SCHNELL, *Der mathematische Unterricht... im Grossherzogtum Hessen*, pp. 20, 29, 39, 41.

equation is not in evidence [1]. Graphic aids in computation are also employed to some extent in the German schools [2].

In Switzerland the graphic representation of equations and functions is general, as in other countries [3], and is extended to the treatment of limits. The question of the function concept is not settled there, and it does not appear to be settled anywhere. Exactly what can be done, and how it is to be begun, are matters still awaiting the results of experience. Dr. Brandenberger calls attention, for example, to the fact that in the course of study of one Realschule (where it would be expected) the word does not appear at all, while in a certain Gymnasium (where mathematics is less in evidence) it plays a prominent part. It would seem that the practice does not differ so much as the printed statements, and that the notion of function is introduced generally when there is a demand for it. Some schools emphasize it early, others late, and experience seems not as yet to have given any definite verdict.

In the United States the graphic representation of simple algebraic functions, with millimeter paper, is commonly begun in the first year of the « high schools » (about 14 years of age), and continued, chiefly with curves of the second degree, in the third year (age 16 years). The graphic treatment of vectors and scalars is reserved for the college, where it commonly begins in the algebra work of the freshman year (age 18 years). It is not taken up with any thoroughness unless the student elects a course in vector analysis, which is frequently offered in the junior or senior year (age 20, 21 years), and is frequently relegated to the graduate years (about 22-24 years).

9. — Numerical Computation [4].

The inquiry of the committee related to abridged computation, to the use of the slide rule and tables, and to graphical and numerical methods of approximation of the roots of equations.

In Austria abridged methods of computation are introduced in the third class (age about 13) in connection with the mensuration of surfaces [5]. The slide rule has not yet found general acceptance in the secondary schools. The reason for this seems to be the

[1] See particularly SCHIMMACK, *loc. cit.*, pp. 19, 22, and WIRZ, *loc. cit.*, p. 45.
[2] TIMERDING, *Die Kaufmännischen Aufgaben*, p. 35.
[3] BRANDENBERGER, *loc. cit.*, pp. 95, 101, 103, 104-109.
[4] Rechnen und Berechnen. Calculs et évaluations numériques.
[5] See the Austrian reports, Heft 3, S. 40, and Heft 6, S. 9.

expense of the instrument, the cheaper ones not being accurate enough to be of value; but the question of time to acquire the necessary facility is also a serious one. In the upper classes the numerical computation is performed almost exclusively by the aid of logarithms. The new programme requires the elements of probabilities in the upper class, and the simple problems of life insurance will require the use of mortality tables.

In England the mechanical rules for contracted operations with decimals have long been in use, but it seems that at present these formal rules are losing ground. The omission of useless figures and the presentation of results to a given number of significant figures must become increasingly general as practical and laboratory work in the lower classes gains ground. On the other hand many masters say that logarithms prove more useful than contracted methods, and that contracted rules are learnt but are seldom used afterwards. In 30 % of the « public schools » and in 66 % of the other secondary schools the slide rule is not used: it is generally used by pupils preparing for special examinations. The common use of the 4-figure logarithmic table is doubtless the cause for the little use of the slide rule. Tables of squares and square roots are not used in 40 % of the « public schools », and tables of cube roots are not used in 55 % of the « public schools ». The other secondary schools make less use of them. Tables of logarithms are used in all schools, 48 % introducing them in the upper classes and 37 % in the middle classes. Tables of trigonometric functions are used in all schools, in about half of them being introduced in the upper classes and in about 20 on 25 in the middle classes. Mortality tables are not generally used. In about 65 % of the schools 4-figure tables are used. Graphical methods of treating transcendental equations are not introduced systematically, and are found in 47 % of the « public schools » and in 16 % of the other secondary schools.

In France the abridged methods that became prominent in the middle of the 19th century are no longer taught. They seem not to be demanded in practical work. The slide rule is not used in the lycées and collèges except in classes preparing for technical schools. In the scientific classes of the lycées and technical schools the pupils learn the use of logarithms, usually with tables to five decimals. Trigonometric tables, with the logarithms of the functions, are common, as are tables[1] of square and cube roots and of log (1 + r). The approximate solution of numerical higher equations, either graphically or by numerical computation, is given only in the *classes de mathématiques spéciales*.

[1] For example, Combet's tables, published by Belin, Paris.

In Germany contracted operations (abgekürzts Rechnen) are not required in the Prussian programme, although they are given in particular institutions[1]. The question of the real value of the work seems unsettled. In Bavaria it has some place in the lower classes of the Gymnasium and Realschule[2]. In Saxony the particular need for the subject is found in the Obertertia or Untersekunda of the Gymnasium[3]. In Baden and Elsass-Lothringen it is assigned place in Quarta of the Oberrealschule[4], and in general it may be said to have at least a nominal position in the various states of the Empire. The slide rule seems to be making its way very slowly in Germany as elsewhere[5]. The use of tables is general there as in other countries.

Five-place tables are used in the majority of schools, but about a third use four-place tables, interpolations being made mentally instead of by the use of proportional parts. In the lower classes the method of computing the tables is mentioned incidentally, the exercises in actual computation by means of series being relegated to the higher classes of the Oberrealschulen. The graphic treatment and the numerical approximations of the roots of numerical higher equations has place in the modern reform movement[6]. In the Realanstalten, however, the use of approximate methods (such as Newton's rule and the *Regula falsi*) is found in Oberprima.

In Switzerland the contracted operations are emphasized in the technical schools. The slide rule is found in the programmes of 6 of the 25 Realschulen, and in 2 Gymnasien[7]. Logarithms are universal, the majority of schools using 5-place tables, although about 30 % use 7-place tables. Some advance is being made in the direction of decimalizing the angle, tables having been prepared for such divisions. Tables of roots and mortality are in use. In 25 % of the Gymnasien the subject of infinite series is introduced, and applications are made to the theory of computing tables of logarithms. Methods of approximation of the roots of numerical higher equations are given. Graphic methods, the *Regula falsi*, and the Newtonian approximation are given in all Realschulen, and certain schools add Horner's, Lagrange's, or Gräffe's method.

In the United States contracted methods with decimals are

---

[1] Lietzmann, *Die Organisation*, pp. 104, 159; *Stoff und Methode... Unterricht*, p. 85.
[2] Wieleitner, *loc. cit.*, pp. 24. 41.
[3] Witting, *loc. cit.*, p. 16.
[4] Cramer, *loc. cit.*, p. 18; Wirz, *loc. cit.*, pp. 29, 33.
[5] Lietzmann, *Stoff und Methode... Unterricht*, p. 70 seq.: Timerding, *Die kaufmännischen Aufgaben*, p. 35.
[6] Lietzmann, *Die Organisation*, pp. 161, 173, 178, 182, 197; Thaer, *loc. cit.*, p. 73; Wieleitner *loc. cit.*, p. 31; Witting, *loc. cit.*, p. 24.
[7] Brandenberger, *loc. cit.*, pp. 60, 90.

rarely taught, either in the elementary schools or the general « high schools ». In the « technical high schools » (a relatively new type, parallel to the older type of general « high school »), and in the colleges where engineering courses are given, these methods are taught incidentally in the courses where they would naturally be used. The slide rule is coming into extensive use in the « technical high schools », and it is used in all engineering courses in the colleges. In the better types of general high schools it is occasionally explained to the classes in trigonometry. Mathematical tables are not used in the « high schools » until trigonometry, which is an elective study, is reached. In general, 5-place tables are used. In some arithmetics and in some official courses the table of compound interest is used in the eighth grade (age 13 years). Mortality tables are rarely seen in the secondary school. The method of computing tables is not taken up in the elementary classes, but in the calculus and in higher algebra (college studies, age 18-19) the student is shown how certain functions ($\sin x$, e^x , $\log x$, etc.) are expanded in series and how these series may be used in the making of tables. Graphic and arithmetic solutions of numerical higher equations are given in the college course in algebra (age about 18 years), the arithmetic solutions being effected usually by Horner's method. Graphic methods of solving such equations are beginning to be more highly appreciated.

The bearing of this type of computation upon the industrial problems of the present is important. In our time the typewriter has replaced the pen to a great extent, and the computing cash register has replaced the old cash drawer. Japan has kept her soroban [1] because she believes that the era of mechanical calculation is to return. In the Western World the cheapening of the calculating machine is testifying to Japan's forethought. What should the schools do in view of this change? Already the attempt to train the « lightning calculator » is past, but are we entering upon a period of practical graphical computation? of the replacing of logarithmic tables by the slide rule? and of inexpensive machines that shall perform the ordinary calculations, as they already perform the extraordinary ones? If so, are we to make the mistake that we made with logarithms, of using 7-place tables when 4-place ones would be better, or can we select with scientific forethought the material that is really practical?

This committee was charged with the duty of reporting upon present conditions and of propounding questions, but not of making recommendations as to the future. Since the stating of a

[1] See the report of Professor FUJISAWA.

problem is quite as important as the solution, it is hoped that some of the questions that have been raised will serve a good purpose. That certain of these problems deserve more than a passing notice need hardly be asserted[1].

Questionnaire. — Rappelons ici le questionnaire qui a servi de base à l'étude de M. Smith. Il avait été rédigé et distribué par M. Lietzmann, au nom de la Sous-commission A.

Extrait de la circulaire de M. le Dr W. Lietzmann. — Objet : *L'intuition et l'expérience dans l'enseignement mathématique des écoles moyennes.*

Délimitation du sujet. L'intuition et l'expérience jouent un rôle prépondérant dans l'enseignement géométrique des écoles élémentaires et des cours complémentaires (Fortbildungschule), ainsi que dans l'enseignement propédeutique des écoles moyennes. Dans la suite, il ne sera pas question de tout cela. Nous allons de même laisser de côté les cas multiples où l'intuition et l'expérience sont destinées à compléter ou à remplacer les développements logiques et déductif, dans l'enseignement systématique de la géométrie dans le domaine des éléments d'Euclide. Nous aurons peut-être l'occasion, dans une séance ultérieure de la Commission, d'examiner ces questions extrêmement importantes, en tenant compte du point de vue psychologique. Afin de bien délimiter le sujet, il conviendra donc à Cambridge de s'en tenir au rôle de l'intuition et de l'expérience dans les classes supérieures des écoles moyennes.

Pour organiser les travaux préparatoires, il est désirable d'avoir un tableau de l'état actuel de ce qui se fait dans les différents pays. Nous nous permettons à cet effet de vous soumettre les questions suivantes :

1. *Mesure et estimation des grandeurs.* Dans quels établissements, gymnase, école réale supérieure, etc., dans quelle étendue et dans quelles classes (âge des élèves).

a) Procède-t-on à des mesures *géodésiques* pratiques pour les utiliser ensuite numériquement ?

Usage du théodolite, de la chaîne d'arpenteur, etc.

b) Fait-on des observations et des mesures *astronomiques* avec des problèmes qui s'y rattachent ?

Usages d'appareils photographiques, instruments universels.

2. *Dessin et représentation graphique.* Dans quels établissements, dans quelle étendue et dans quelles classes présente-t-on :

a) La géometrie descriptive (Projection oblique ? — Plan et élévation ? — Projection centrale ? — Théorie des ombres ?)

Y a-t-il fusion entre cet enseignement et l'enseignement de la stéréométrie ? L'enseignement est-il donné par le maître de mathématiques ou par le maître de dessin ?

---

[1] After this report was ready for the press the note by Messers. Cardinaal and Barrow, relating to the schools of Holland, appeared in *L'Enseignement mathématique*, July, 1912, p. 327. The plea for the freedom of the teacher in the matters referred to in this report is worthy of careful consideration.

b) Les méthodes graphiques (Représentation de fonctions sur du papier millimétrique ? — Représentation des vecteurs ? — Champ scalaire ? — Calcul graphique et spécialement statique graphique ? — Evaluation de surfaces à l'aide du papier millimétrique ou du planimètre ?)

3. *Calculs et évaluations numériques.*

a) Calcul abrégé à l'aide de fractions décimales ?

b) Emploi de la règle à calcul ?

c) Tables numériques (nombre de décimales pour le calcul logarithmique et les fonctions trigonométriques ? — Emploie-t-on aussi des tables de racines carrées ou de racines cubiques et des tables de mortalité ? — Est-ce que l'on montre à l'aide d'exemples comment on peut calculer les valeurs des logarithmes et des fonctions trigonométriques ?)

d) Résolution numérique et graphique des équations par approximation (Règle de Newton ? — Regula Falsi ? — Méthodes nomographiques ?).

Les deux publications ci-après permettent d'orienter le lecteur sur quelques-unes de ces questions et sur les réponses concernant l'Allemagne :

P. Zühlke : *Der Unterricht im Linearzeichnen und in der darstellenden Geometrie* (III. Bd., Heft 3 der Abhandl.).

B. Hoffmann : *Astronomie, Vermessungswesen, mathematische Geographie an den höheren Schulen* (III. Bd., Heft 4 der Abhandl.), actuellement sous presse.

DISCUSSION

M. Fujisawa, qui présidait la première partie de la séance, remercia M. Smith, au nom de l'assemblée, pour son exposé si documenté, puis il ouvrit la discussion sur cet intéressant rapport.

M. Laisant estime qu'il eût été préférable de faire porter l'enquête sur l'ensemble de l'enseignement, depuis la première initiation, tandis que la Sous-commission a cru devoir limiter l'étude à l'enseignement moyen. Puis MM. Thaer et Lietzmann développent et complètent certains passages du rapport de M. Smith pour ce qui concerne tout particulièrement l'Allemagne, M. E. Dintzl pour l'Autriche, M. Bioche pour la France, MM. Siddons et Carson pour l'Angleterre et M. Goldziher pour la Hongrie. Envisageant la question dans son ensemble, M. v. Dyck (Munich) tient à faire constater que les discussions soulevées par la Commission montrent le rôle utile qu'elle a déjà exercé jusqu'ici en appelant les mathématiciens du monde entier à réfléchir sur les questions si importantes des méthodes et des plans d'étude de l'enseignement mathémathique.

M. C.-A. Laisant (Paris). — Je ne voudrais à aucun prix entraver, ni même retarder, la discussion de l'intéressant et consciencieux rapport de notre collègue M. D.-E. Smith. Mais il est de mon devoir de vous dire les motifs pour lesquels il m'est impossible de prendre part à cette discussion, tout en reconnaissant qu'elle pourra produire quelques résultats utiles.

La question me semble mal posée, ou pour mieux dire posée d'une façon incomplète, ce qui, par cela même, la rend insoluble. Le rôle de l'intuition et de l'expérience dans l'éducation en général, dans l'enseignement mathématique notamment, est l'un des problèmes capitaux de la pédagogie. Mais restreindre l'examen de ce problème à la considération des écoles moyennes (ou secondaires) c'est le rendre insoluble, et méconnaître les conditions psychologiques et physiologiques du développement cérébral.

Suivant, en effet, qu'un enfant qui débute dans l'enseignement secondaire aura subi une préparation antérieure de telle ou telle nature, les procédés pédagogiques que vous pourrez lui appliquer utilement différeront du tout au tout. Si chez cet enfant, depuis le début, on a fait appel à l'intuition et à l'expérience, la continuation sera toute naturelle, et il n'y aura pour ainsi dire qu'à mettre l'élève en garde contre le danger des surprises, si le raisonnement logique n'exerce pas un contrôle assez sévère.

Si votre élève, au contraire, n'a acquis ses notions mathématiques antérieures que dogmatiquement et à force de mémoire — comme cela arrive trop souvent hélas — l'intuition et l'expérience exigeront de sa part de nouveaux efforts pour être mises en œuvre, en outre ; il les considérera avec une sorte de dédain, comme des procédés manuels bons pour un apprentissage, mais indignes de lui. Et je n'hésite même pas à dire, moi partisan irréductible de l'intuition et de l'expérience introduites dans l'enseignement, que, dans certains cas particuliers, cette introduction peut devenir dangereuse.

La nature ne connaît pas nos divisions artificielles, nos classifications souvent arbitraires. Il est impossible de négliger le passé en s'occupant du présent, sous peine de grosses déceptions. Un architecte qui s'occuperait des matériaux à employer pour la construction des étages d'un édifice, sans se soucier de l'examen des fondations, serait d'une imprudence sans pareille.

Je crois donc que la Commission s'est trompée, en ne donnant pas à la question l'ampleur qu'elle comporte. Mais je suis sûr que le débat sera repris ultérieurement dans les conditions qu'entraîne fatalement la nécessité même des choses. Soit au prochain congrès, soit dans des réunions préparatoires qui auront lieu auparavant, la question se posera dans toute son unité, comme elle doit être posée. La discussion actuelle, je le répète, sera un élément utile, mais elle ne saurait avoir un caractère définitif.

Je regrette l'erreur commise par la Commission. Je serais cependant désolé qu'on pût attribuer à ma brève intervention une pensée d'obstruction qui est bien loin de moi.

Allemagne : *Remarques* de M. A. Thaer (Hambourg). — Mehrfach ist dem Schmerze über den Tod des Herrn P. Treutlein wohltuender Ausdruck verliehen worden, ganz besonders wird er aber heute bei der Besprechung von « Anschauung und Experiment im mathematischen Unterricht » vermisst werden, denn er ist seit mehr als einem Menschenalter der Führer dieser Bewegung in Baden gewesen und durch die Unterstützung des Herrn F. Klein für ganz Deutschland geworden. Es ist als ein Glück zu bezeichnen, dass es ihm noch vergönnt war sein Buch « Der geometrische Anschauungsunterricht als Unterstufe eines zweistufigen geometrischen Unterrichts an unseren höheren Schulen » zu vollenden. Das Werk ist zu sehr der Ausdruck der hinreissenden Persönlichkeit des Herrn Treutlein, als dass es

einem andern möglich wäre eine einigermassen entsprechende Schilderung zu geben. Er empfiehlt darin die in Österreich-Ungarn seit einem halben Jahrhundert mit Erfolg erprobte Methode der Zweistufigkeit des geometrischen Unterrichts. Aber auch wer in diesem Punkte von ihm abweicht, wird dem Buche ausserordentlich viel entnehmen vor allem die Richtigkeit der feinen Charakterisierung, die Herr D. E. Smith von der deutschen Art des Reform- Unterrichts gibt, « To mix the intuitional and the deductive work ». Herr F. Klein hat in dem Einführungswort zu dem Buche des Herrn P. Treutlein jedes Missverständnis über den deutschen Anschauungsunterricht durch folgende Worte auszuschliessen versucht : « Der Kunst des Lehrers bleibt es überlassen, von den anschauungsmässigen Elementen schon während des vorbereitenden Unterrichts allmählich zur logischen Erfassung der Zusammenhänge überzuleiten, sodass nicht nur eine vorläufige Kenntnisnahme der grundlegenden räumlichen Vorstellungen, sondern unmittelbar eine tragfähige Grundlage für den höheren geometrischen Unterricht gewonnen ist, der, wie es Max Simon einmal ausdrückt, eine chemische Verbindung von Anschauung und Logik darstellen soll. »

Aber nicht bloss in diesem Punkt sondern auch in den übrigen Beziehungen gibt der Bericht des Herrn D. E. Smith bei aller Kürze ein treues und klares Bild über den gegenwärtigen Stand der Reformbewegung in Deutschland, soweit er sich aus den umfassenden und eingehenden I. M. U. K. Berichten ersehen lässt und die Abschnitte « Anschauung und Experiment » betrifft.

Es könnte also genügend erscheinen, wenn ich hier nur noch einmal zur näheren Aufklärung auf die I. M. U. K. Abhandlungen hinweise, die neben den Einzelberichten die hier behandelten Fragen in mehr zusammenfassender Darstellung bringen, das sind die Arbeiten der Herren Hoffmann, Lietzmann, Schimmack, Zühlke.

So nahe es liegt, den Stand der Reform aus den Lehrbüchern zu beurteilen, sie können, wie auch schon die Berichte der Herren Lietzmann, Schimmack und Zühlke hervorgehoben haben, nicht als unbedingt treues Bild gelten, selbst die ausdrücklich als Reformlehrbücher bezeichneten, so treffliche Wegweiser sie sind. Denn bei der Kürze der Zeit basieren sie zu sehr auf der subjektiven Ansicht der Verfasser und der im günstigsten Fall kurzfristigen Erfahrung eines ersten Experiments. Der lebendige Austausch von Erfahrungen beim Besuch von Schulen und auf Versammlungen ist jedenfalls als Ergänzung wünschenswert und tatsächlich von den oben genannten Herren benutzt worden ebenso wie die eingehenden Antworten in den versandten Fragebogen. Auch ich kann natürlich nur subjektive Eindrücke mitteilen, aber ich möchte betonen, dass sie nur zum kleinsten Teil dem eigenen Unterricht ihren Ursprung verdanken

Der Ruf nach Anschauung hat zunächst zur Herstellung zahlreicher künstlicher Anschauungsmittel geführt. Mir scheint die herschende Tendenz jetzt dahin gehen zu wollen, die natürlichen Anschauungsmittel mehr zu benutzen, *den Schüler anzuleiten mathematische Begriffe aus seiner Umgebung zu abstrahieren und wieder auf sie anzuwenden* Wichtig ist, dass man sich nicht auf den Schulraum beschränkt, deshalb ist der ***Feldmessunterricht*** so fruchtbar, weil er ins Freie führt. Möglich ist er auch in der Grossstadt. Neben der allerdings nicht ganz zu vernachlässigenden Benutzung genauerer Instrumente — Messstange und Sextant verdienen vielleicht den Vorzug vor Bandmass und Theodolit — ist die einfache Zählung der Schritte,

das aus dem Zeichenunterricht wohlbekannte Verfahren der Bestimmung scheinbarer Grössen mit Hilfe des ausgestreckten Armes und eines Masstabes zu pflegen. Benutzt man als Massstab den logarithmischen Rechenstab (sliding rule), so kann man die Winkel besonders bis 5° überraschend genau bestimmen.

Was die *Astronomie* betrifft, so möchte ich feststellen, dass ich unter den etwa 20 neu gebauten Schulen, die ich in Deutschland gesehen, auch höhere Mädchenschulen, keine ohne astronomisches Observatorium gefunden habe, zum Teil auch mit Präzisionsinstrumenten ausgestattet, was mir aber nicht das Wesentliche erscheint. Die Hauptsache bleibt ja, dass der durch das Copernikanische System hochmütig auf alle unmittelbare Anschauung herabblickende Schüler erst einmal wieder einigermassen im Ptolemäischen heimisch wird, die Drehung des Himmelsgewölbes, die Bewegung von Mond und Sonne, einiger Planeten, der Jupitermonde roh messend verfolgt. Ideal ist gewiss ein Unterricht, wie ihn Herr Hoffmann schildert, ich fürchte nur, nicht 5% der Schulen werden ihn adoptieren, und mancher wird sich ganz abhalten lassen, weil er den Vorwurf der Unwissenschaftlichkeit fürchtet, wenn er es nicht so vollendet wie Herr Hoffmann macht. Das beste astronomische Schulobservatorium ist ein flaches Dach, zugleich eine vorzügl iche Basis für die Pothenotsche Aufgabe und, wenn ein sonstiger Turm zur Verfügung steht, für die Hansensche.

Für *Linearzeichnen und Darstellende Geometrie* möchte ich auf Herrn Zühlkes Arbeit verweisen und nur erwähnen, dass man neuerdings versucht, dieZentralperspektive nicht an den Schluss, sondern an den Anfang der Körperdarstellung zu stellen, älteren Anregungen des Württembergers Hertter und des Berliners Martus folgend. Für die Versuche spricht, dass dem Schüler aus dem Zeichenunterricht die Praxis geläufig ist und dass die Bilder anschaulicher und wohlgefälliger sind als die axonometrischen. Dagegen spricht, dass die Theorie schwieriger ist: Für die Darstellung der Kugel, besonders zur korrekten zeichnerischen Lösung astronomischer Aufgaben gewinnt die stereographische Projektion etwas mehr Freunde. Da vielfach Mathematiker sich jetzt in Deutschland auch die Lehrbefähigung in Geographie erwerben, wird Kartenprojektion und Kartenlesen auch im mathematischen Unterricht gepflegt.

Das *Zeichnen von Kurven* und graphischen Lösungen wird nach der Ansicht vieler bereits übertrieben. Vor allem sind statistische Kurven vielfach eher geeignet, den Begriff der Funktion zu verschleiern, als ihn zu enthüllen. In der Geographie sind sie gewiss nützlich, aber in der Mathematik eigentlich erst dann, wenn sie zur Feststellung einer funktionalen Abhängigkeit führen. Bei Kursschwankungen eines Industriepapiers dürfte das schwer sein, aber z. B. aus der Gold- und Silberproduktion auf den Preis des Silbers, soweit er nicht durch Börsenspekulationen alteriert ist, zu schliessen, ist für einen Schüler der Mittelklassen nicht zu schwer.

Es ist richtig, was Herr D. E. Smith sagt, dass der *logarithmische Rechenstab* in Deutschland bis vor Kurzem noch wenig verbreitet war. Schuld war erst der hohe Preis. Noch vor 10 Jahren kostete ein guter Stab 12 ½ M. Dann kamen billige und minderwertige Fabrikate, die erst recht den Rechenstab diskreditierten. Seit der Preis für gute Stäbe mit trigonometrischer Einrichtung auf 5 M. herabgegangen ist, nimmt ihr Gebrauch ausserordentlich zu. In Bayern ist er durch Herrn v. Dyck für alle Realanstalten obligatorisch gemacht. In einzelnen Schulen hat er aus den Oberklassen

alle logarithmischen, trigonometrischen, Quadrat- und sonstigen Tafeln verdrängt. Für physikalische und Versicherungs-Aufgaben sind allerdings noch Tafeln nötig. Eine grosse Rolle spielt der Rechenstab auch gerade bei der graphischen Lösung numerischer Gleichungen, algebraischer sowohl wie transzendenter.

Wenn natürlich auch der Schüler die Kurven selbst zeichnen soll, möchte ich doch erwähnen, dass ein von Herrn J. Schröder in Hamburg konstruierter Apparat gute Dienste tun kann. Die Kurve wird aus Draht in einer ebenfalls aus Drähten gebildeten Ebene hergestellt. Macht man die Ebene um die Gerade $x - y = 0$ drehbar, so verwandelt sich jede Kurve durch Drehung um 180° im Raum in die inverse, also e^x in log nat x, sin x in arc sin x, tg x in arc tgx, u. s. w.

Quadratisches Papier wird sehr stark benutzt, Die Flächenbestimmung durch Abzählung findet z. B. Verwendung bei der Integralrechnung in der Auswertung bestimmter Integrale. Hier ist es nicht nur zur Prüfung eines erhaltenen Resultats nützlich, sondern es zeigt dem Schüler auch einen Ausweg, wo die ihm bekannten Formeln versagen.

Autriche : *Remarques de* M. E. Dintzl (Vienne). — Wenn ich zunächst dem zur Diskussion gestellten Programm die Frage herausgreife, wie der aus Unterricht in der *Darstellenden Geometrie* an den höheren Lehranstalten betrieben wird, so geschieht es deshalb, weil diese Disziplin in *Oesterreich* insbesondere an den Realschulen schon seit langem mit grosser Sorgfalt gepflegt wird und auch in der gegenwärtigen Form ganz charakteristische Merkmale aufweist. Ich könnte mich zwar damit begnügen, auf die ausführlichen Berichte von Prof. Müller und Adler in den Veröffentlichungen der österreichischen Subkommission hinzuweisen. Es gibt aber noch ein plastischeres Mittel, die Unterrichtsmethode in diesem Gegenstande vorzuführen, d. i. an der Hand von Zeichnungen, welche von den Schülern in den Unterrichtsstunden wirklich ausgeführt worden sind. Ich habe darum solche Schülerzeichnungen von vier Wiener Realschulen (2. Staatsrealschule im 7., 13. und 18. Bezirk) und einem Wiener Realgymnasium (2. Bezirk) mitgebracht und lade Sie ein, dieselben zu besichtigen. Was Ihnen bei der Durchsicht dieser Zeichnungen vor allem auffallen wird, das sind die vielen Darstellungen technischer Objekte, z. B. von Gerüstteilen, Säulen, Gesimsen, ja von ganzen Häusern und Kapellen. Dies ist ein besonderes Merkmal des modernen Unterrichtes und hängt aufs engste mit den Reformideen zusammen, welche Profes. Dr. Emil Müller von der technischen Hochschule in Wien inbezug auf den Unterricht in der Darstellenden Geometrie an den technischen Hochschulen vertritt. Solche Darstellungen einfacher technischer Objekte erwecken, wie von Seite der Lehrer stets versichert wird, das lebhafteste Interesse der Schüler und zwar aus einem doppelten Grunde. Einmal ist es klar, dass Wirklichkeitsaufgaben, hier also einfache Beispiele aus der Architektur, den Schüler mehr fesseln, als theoretische Aufgaben. Dazu kommt aber noch ein psychologisches Moment, d. i. die ständige Kontrolle, welche der Schüler aus sich selbst, aus seiner, unmittelbaren Anschauung heraus auszuüben vermag. Das Bild eines technischen Objektes ist, wie einmal gesagt wurde, einem Porträt vergleichbar, an dem man bei jedem Striche, den man zeichnet, sieht, ob derselbe richtig ist oder nicht. Sie dürfen aber daraus nicht den Schluss ziehen, als ob der Unterricht in einer

systemlosen Aneinanderreihung solcher Aufgaben bestünde. Dies widerlegen am besten die mitgebrachten Zeichnungen.

Ich wende mich nun den übrigen Fragen zu. Hiebei kann ich auf Details umso leichter verzichten, als ja Prof. D.-E. Smith in seinem ausgezeichneten Berichte dieselben für unser Land in klarer Weise beantwortet. Hier nur einige Bemerkungen allgemeiner Natur. Es ist whar, dass an den österreichischen Mittelschulen Anschauung und Experiment eine grosse Rolle spielen und zwar nicht bloss auf der dreijährigen Unterstufe, welche wir für eine ungemein wertvolle Institution halten, sondern auch in den mittleren und oberen Klassen, wo sie in der Arithmetik in einer vorwiegend graphischen Behandlung des Zahl- und Funktionsbegriffes, in der Geometrie in der Pflege des zeichnerischen Momentes zum Ausdrucke kommen. Die Bewegung schreitet in dieser Richtung gegenwärtig eher vor als zurück. Es ist augenblicklich schwer möglich, irgend eine Kritik auszuüben und auf die beiden Hauptfragen, welche Prof. D.-E. Smith in seinem Referate aufgeworfen hat, präzise Antworten zu geben, da ja die Reformbewegung in Oesterreich noch nicht so langen Datums ist. Aber eines kann heute schon gesagt werden. Wir stehen vor einer Schwierigkeit, um nicht zu sagen vor einer Gefahr, nämlich davor, dass durch das beständige Hereinziehen immer neuer Gegenstände der angewandten Mathematik — wie sie durch das praktische Leben gefordert werden — der systematische Unterricht mehr, als gut ist, eingeengt und bedrückt wird. Wie soll man nun dieser Gefahr wirksam entgegnen? In dieser Hinsicht hat vor kurzem Professor Sobotka von der böhmischen Universität in Prag Ideen entwickelt, welche sehr beachtenswert sind und für die künftige Entwicklung in Oesterreich von Bedeutung sein können. Sobotha spricht zunächst von der Bedeutung des Experimentes für den eigentlichen mathematischen Unterricht in Arithmetik und Geometrie und sagt, dass « das Experiment (Demonstration von Modellen, graphische Darstellungen, etc.) von Lehrer und Schüler zu pflegen sei, aber nur soweit es das selbständige Erfassen und die Ausbildung des Raumanschauungsvermögens unterstützt, zum Nachdenken zwingt oder dem Gegenstande der Betrachtung neue Seiten abzugewinnen geeignet ist, somit als *Behelf* und nicht als *ausschliessliches Mittel zum Zweck* ». « Was die *Anwendung auf technische Probleme* oder solche, die dem praktischen Leben überhaupt entnommen sind, anlangt, so sei vorderhand — ähnlich wie es in der Physik teilweise der Fall ist, ein besonderes Praktikum der angewandten Mathematik in jeder Mittelschule einzuführen. Hier käme das Experiment in ausgedehntem Masse und in systematischer Anwendung zur Geltung. In weiterer Folge sei jedoch anzustreben, dass angewandte Mathematik mit praktischen Uebungen als Lehrgegenstand, wenn nicht allgemein, so doch wenigstens an den Realschulen, *obligatorisch* eingeführt werde. »

Das sind in aller Kürze die Ideen von Sobotka, soweit sie mit den zur Diskussion gestellten Fragen in Zusammenhang stehen. Man mag gegen diese Vorschläge vielleicht vom Standpunkt der Fusion Bedenken erheben. Dieselben scheinen aber nicht schwerwiegend zu sein — umsoweniger als wir ja in dem Unterrichte in der Darstellenden Geometrie und in seinem Verhältnis zum systematischen Unterricht in der Stereometrie ein gutes Vorbild besitzen. Sicher haben diese Ideen das eine für sich, dass auf diese Weise der Intuition und dem Experimente eine genau fixierte Stellung zugewiesen ist, eine Stellung, welche auch der so wichtigen Erziehung der jungen

Leute im logischen, deduktiven Denken genügend Raum zur Entwicklung lässt.

France. — M. Ch. Bioche (Paris) insiste sur l'importance qu'on donne en *France* à la Géométrie descriptive et au Dessin géométrique.

L'exécution d'un dessin géométrique, ou d'une épure oblige l'élève

1° à constater la nécessité d'un raisonnement logique pour établir les faits géométriques, par exemple l'existence d'un cercle passant par 3 points;

2° à se préoccuper de déduire de la solution théorique d'un problème une construction qui soit à la fois simple, précise et susceptible d'être effectuée dans les limites de la feuille de papier.

Les professeurs de mathématiques ont fréquemment demandé que l'enseignement du dessin géométrique soit confié aux professeurs de mathématiques pour que cet enseignement facilite et complète l'enseignement théorique.

Iles britanniques. — M. G.-S.-L. Carson (Tonbridge) said that, in in *England* at any rate, there appeared to be confusion between the terms experiment and intuition. Results such as the angle properties of parallel lines, which are at once accepted by a child of 12 if expressed in non-technical terms, are made the subject of numerical measurement with a protractor and yet referred to as intuitive, instead of experimental. He was strongly of opinion that only intuitions in the proper sense of the term should be taken as the basis of a first course of formal Geometry, and that all possible intuitions should be taken as the basis. In this way only could the appearance of proving the obvious, so dangerous and destructive to the logical sense of a young child, be avoided.

He demurred most strongly to the suggestion that logic might be less rigorous at an early age. More postulates than the minimum necessary might and should be accepted, but the processes of deduction based on these postulates should be entirely rigorous from the outset. Any want of rigour in deduction is detected sooner or later, and with bad results; whereas analysis of the interconnection of the set of postulates which have been assumed is, at a later stage, a natural and interesting course for the pupil.

II. — REMARQUES SUR UNE BIBLIOGRAPHIE DE L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Résumé de la communication de C. Goldziher (Budapest).

Le « Bureau of Education » du Gouvernement américain a entrepris de faire paraître une partie de la *bibliographie de l'enseignement mathématique* réunie par MM. D.-E. Smith (New-York) et C. Goldziher (Budapest). A la suite de l'extension considérable qu'a pris le mouvement de réforme de l'enseignement mathématique, il est évident qu'un pareil ouvrage peut être très utile à l'étude des progrès réalisés et de la propagation des tendances modernes dans l'enseignement mathématique dans les différents Etats.

La bibliographie paraîtra en automne 1912 et sera envoyée gratuitement à tous ceux que la question intéresse. Elle embrasse les années 1900-1912 et contient environ 2000 titres qui sont classés par ordre de sujets et d'après les types d'écoles. Le matériel primitif comprenait 5000 titres; mais il a fallu se limiter à un choix en omettant notamment la liste des manuels modernes. La liste omise serait cependant des plus précieuses, car elle montre comment les tendances nouvelles se sont propagées petit à petit et elle est une preuve de l'origine naturelle des nouvelles exigences.

Le rapport insiste sur l'importance de la partie omise et propose sa publication dans un ouvrage plus grand allant jusqu'en 1915. Pour la publication de cette bibliographie plus étendue, il sera particulièrement important d'obtenir dans chaque pays des collaborateurs afin de réunir un tableau aussi complet que possible.

Le Gouvernement américain a rendu un grand service par la publication de cet ouvrage préliminaire et le rapporteur propose à l'assemblée de transmettre des remerciements chaleureux au Bureau of Education et d'exprimer officiellement le vœu qu'il veuille bien donner également son appui à la publication d'un ouvrage plus étendu.

M. D.-E. Smith résume la communication en anglais et fournit quelques renseignements complémentaires. Sur sa proposition, la section IV *b*, adopte à l'unanimité la *résolution* suivante :

Resolved that Section IV *b*, of the International Congress of Mathematicians, assembled at Cambridge, expresses its thanks to the Honorable the United States Commissioner of Education for his great interest in publishing, for free distribution, the recent bibliography on the teaching of mathematics (1900-1912), and the

hope that it may, through his good offices, be brought to completion to the year 1915, with such additions to the present list as may seem desirable. »

Résolution. — *La Section IV b, du 5me Congrès international des mathématiciens réunie à Cambridge, exprime ses remerciements au Bureau of Education des Etats-Unis, pour le grand intérêt dont il a fait preuve en publiant, en vue d'une distribution gratuite, la bibliographie récente sur l'enseignement des mathématiques (1900-1912). Elle exprime le vœu que le Gouvernement américain veuille bien continuer à donner son précieux appui en vue de compléter et de continuer la publication jusqu'en 1915.*

III. — PROLONGATION DU MANDAT DE LA COMMISSION DES TRAVAUX PENDANT LA PROCHAINE PÉRIODE

1. — Sir G. Greenhill, vice-président de la Commission, présente ensuite la proposition tendant à prolonger le mandat de la Commission. Cette proposition a déjà été examinée par les délégués dans leur séance du 21 août. Elle est motivée par le fait que dans plusieurs pays les rapports des Sous-commissions nationales sont encore en cours de publication et il y aura lieu ensuite de faire une série d'études comparées sur certaines questions d'une importance fondamentale en tirant parti des documents réunis par les Sous-commissions nationales.

Voici le texte de la *résolution* adoptée par la section IV *b*; elle a été soumise au Congrès, dans sa séance plénière du même jour, par M. Godfrey, président de la section (voir plus haut *Aperçu général*) :

« *Le cinquième Congrès international des Mathématiciens adresse ses remerciements aux gouvernements, aux institutions et aux personnes qui ont accordé leur aide à la Commission internationle de l'Enseignement mathématique ;*

« *Décide de prolonger les pouvoirs du Comité central composé de MM.* F. Klein *(Gœttingue)*, Sir G. Greenhill *(Londres) et* H. Fehr *(Genève) et, suivant la requête qui lui est adressée, d'adjoindre à ce Comité M.* David-Eugène Smith *(New-York).*

« *Prie les délégués de bien vouloir continuer leurs offices en s'assurant la coopération de leurs gouvernements respectifs et en poursuivant leurs travaux ;*

« *Et invite la Commission à présenter un rapport ultérieur au 6me Congrès international et à organiser dans l'intervalle telles réunions que les circonstances lui dicteront.* »

2. — M. H. Fehr, secrétaire-général, parle ensuite des travaux de la Commission pendant la prochaine période. Dans sa réunion de Hahnenklee, le Comité central a examiné la suite qu'il convient à donner aux travaux de la Commission. Les Sous-commissions s'efforceront tout d'abord de terminer leurs rapports. Puis comme suite aux réunions de Milan et de Cambridge, le Comité central mettra à l'étude quelques questions qui lui paraissent particulièrement importantes, telles que *les mathématiques dans les écoles d'ingénieurs, le rôle de la psychologie dans l'enseignement mathématique, la préparation théorique et pratique des professeurs de mathématiques*. D'autre part on propose de consacrer également une discussion aux *mathématiques dans les établissements de jeunes filles*.

Le Comité central compte réunir la Commission, à *Paris*, en 1914, dans les premiers jours d'avril ; l'ordre du jour comprendra, entre autres, la question *des mathématiques dans l'enseignement technique supérieur*.

L'année suivante, en été 1915, il y aurait une réunion en Allemagne, à Gœttingue ou Halle. Elle serait consacrée à *la préparation théorique et pratique des professeurs de mathématiques*.

Puis viendrait, en 1916, le Congrès de Stockholm, avec, comme clôture, des aperçus d'ensemble sur les travaux de la Commission.

Le Comité tiendra compte, dans la mesure du possible, des vœux et propositions qui lui seront transmis au sujet des prochaines réunions. A ce sujet MM. Carson et Garstang signalent quelques points spéciaux sur lesquels il conviendrait d'ouvrir une discussion.

CHRONIQUE

Note de la Rédaction. — *La surabondance des matières nous oblige à remettre au prochain numéro la publication des comptes-rendus des réunions des Sociétés mathématiques allemande, italienne et suisse, de la Société italienne pour le progrès de la Science, de la Société suisse des professeurs de mathématiques, de la liste des thèses de doctorat des Universités américaines (1911-1912), ainsi que de la* Bibliographie.

Nouvelles diverses. — Nominations et distinctions.

Allemagne. — M. G. Hamel, professeur à l'Ecole technique supérieure allemande de Brünn, est nommé professeur à l'Ecole technique supérieure d'Aix-la-Chapelle.

M. F. HARTOGS, privat-docent à l'Université de Munich, est nommé professeur extraordinaire.

M. K. SCHWARZSCHILD, directeur de l'Observatoire de Potsdam, est nommé membre de l'Académie des Sciences de Berlin.

Privat-docents. — Ont été admis en qualité de privat-docents : M. H. DINGLER, à l'Université de Munich. — M. L. GÜNTHER, à l'Ecole technique supérieure de Berlin. — M. E. HECKE, à l'Université de Göttingue. — M. F. PFEIFFER, à l'Université de Halle. — M. A. ROSENTHAL, à l'Université de Munich.

Angleterre. — M. Harold HILTON est nommé professeur de mathématiques au Bedford College, London.

M. J. W. NICHOLSON est nommé professeur de mathématiques au King's College, London.

Autriche. — M. G. KOWALEWSKY, professeur ordinaire à l'Ecole polytechnique allemande de Prague, est nommé professeur ordinaire à l'Univerité allemande de Prague.

M. Ph. FRANK, privat-docent à l'Université de Vienne, est nommé professeur extraordinaire de physique mathématique à l'Université allemande de Prague.

Privat-docents. — Ont été admis en qualité de privat-docents : M. BARTEL, à l'Ecole technique supérieure de Lemberg. — M. KADERAVEK à l'Ecole technique supérieure bohème de Prague.

Etats-Unis. — M. S. L. BOOTHROYD est nommé professeur extraordinaire d'astronomie et de mathématiques à l'Université de Washington.

M. F. CAJORI est nommé docteur honoraire de l'Université du Colorado.

M. E. P. R. DUVAL est nommé professeur extraordinaire de mathématiques à l'Université du Kansas.

M. W. M. SMITH est nommé professeur extraordinaire de mathématiques à l'Université de l'Orégon.

Rice Institute. — Sous ce titre vient d'être créé à Houston, dans le Texas, une Ecole des Hautes Etudes dédiée par M. William Marsh Rice à l'avancement des Lettres, des Sciences et des Arts. Les fêtes académiques organisées à l'occasion de l'ouverture de cette nouvelle Université ont eu lieu du 10 au 13 octobre dernier. Elles comprenaient une série de conférences de savants américains et étrangers. La Science française était représentée par M. E. BOREL, professeur à la Sorbonne. — Les chaires de mathématiques de la nouvelle Université ont été confiées à MM. G.-C. EVANS et E.-O. LOVETT.

France. — *Faculté des Sciences de Paris.* La chaire d'Astronomie physique a été transformée en « chaire d'astronomie ; » M. ANDOYER reste titulaire de cette chaire. La chaire d'Astronomie mathématique et de Mécanique céleste, occupée depuis 1896 par

H. Poincaré, est transformée en « chaire de Mécanique analytique et de Mécanique céleste; » M. P. Appell, qui a occupé jusqu'ici la chaire de Mécanique rationelle, est nommé professeur titulaire de la nouvelle chaire. Dans la « chaire de Mécanique rationnelle » M. Appell sera remplacé par M. P. Painlevé, titulaire de la chaire de Mathématiques générales. Celle-ci est déclarée vacante.

Italie. — M. F. Boggio, professeur de mécanique à l'Université de Turin, est nommé professeur ordinaire.

M. E. E. Levi, professeur d'analyse infinitésimale à l'Université de Gênes est également promu professeur ordinaire. Il lui a été décerné la médaille de la Société Italienne des Sciences (dite de XL), destinée à l'auteur des meilleurs travaux de mathématiques parus en Italie pendant les années 1907-1911.

Nécrologie.

M. Fr. Kötter, professeur à l'Ecole technique supérieure de Berlin, est décédé le 17 août 1912 à l'âge de 54 ans.

M. G. Landsberg, professeur à l'Université de Kiel, est décédé le 14 septembre 1912 à l'âge de 47 ans.

NOTES ET DOCUMENTS

Cours universitaires.

Semestre d'hiver 1912-1913 (suite).

FRANCE

Paris; *Faculté des Sciences*. Premier semestre (nov.-février). — Géométrie sup. 2 h., M. G. Darboux traitera des Principes généraux de la Géométrie infinit. — Des travaux pratiques afférents au Certificat de Géométrie supérieure seront dirigés par M. Roubaudi, chef des travaux graphiques, 1 heure. — Calcul différentiel et Calcul intégral, 2 h., M. Goursat, professeur, traitera des opérations du Calcul différentiel et du Calcul intégral. Eléments de la théorie des fonctions analytiques. — Théorie des Fonctions, 1 h. M. Emile Borel, professeur, traitera des fonctions d'un grand nombre de variables. — Mécanique rationnelle, 2 h., M. Cl. Guichard, chargé du cours, traitera des lois générales de l'Equilibre et du Mouvement. — Mathématiques préparatoires, 2 h., M. Vessiot, chargé du cours, et M. Montel (voir aux conférences) exposeront la première partie du cours de Mathématiques générales. — Physique mathématique et Calcul des probabilités, 2 h., M. Boussinesq, professeur, exposera les propriétés mécaniques des fluides. — Mécanique physique et expérimentale, 2 h., M. G. Kœnigs, professeur, traitera de la dynamique des milieux continus au point de vue de leurs applications, 2 h.; Principes généraux de la dynamique des machines, 1 h. Les travaux

pratiques auront lieu sous la direction de M. le professeur Kœnigs, le mardi, à 4 heures. — Théorie des nombres, 2 h., M. Cahen, chargé du cours, traitera du Grand Théorème de Fermat. — Physique céleste, 2 h., M. P. Puiseux, professeur adjoint, chargé du cours, traitera du Soleil, du spectre solaire et des éclipses.

Conférences. — M. Lebesgue : Calcul différentiel et intégral, 2 h. — Cl. Guichard, maître de conférences : Géométrie supérieure, 1 h. ; Mécanique rationnelle, 2 h. — Vessiot : travaux pratiques de Mathématiques préparatoires, 1 h. — Montel, chargé de conférences, fera des conférences sur l'Algèbre, en vue du Certificat de Mathématiques préparatoires à l'étude des Sciences physiques, 2 h. — Servant, chef des travaux, chargé de conférences de Mécanique physique, étudiera les principes de la statique graphique et de la résistance des matériaux, 1 h.

Ecole normale supérieure. — Conférences de MM. Borel, Cartan, Vessiot et Lebesgue.

Faculté des Sciences. Second semestre (à partir du 1er mars). — Analyse supérieure, M. E. Picard : De quelques travaux récents concernant la Théorie des Fonctions analytiques et en particulier des rapports de celle-ci avec la Théorie des Equations intégrales. — Calcul différentiel et Calcul intégral, M. Goursat : Equations différentielles. Equations aux dérivées partielles. — Mécanique rationnelle. M. Appell : Lois générales du Mouvement des systèmes. Mécanique analytique. Hydrostatique et Hydrodynamique. — Mathématiques préparatoires, M. Vessiot : Analyse et Mécanique. — Astronomie physique, M. Andoyer : Programme du Certificat d'Astronomie approfondie. — Théorie des nombres, M. Cahen : Grand Théorème de Fermat. — Physique mathém., M. Boussinesq : Ondes d'oscillation (houle et clapotis), les Ondes liquides d'émersion et d'impulsion, les Ondes sonores des fluides. — Mécanique physique et expérimentale, M. Kœnigs : Des moteurs thermiques.

Paris ; *Collège de France.* Cours publics à partir du 2 décembre. — M. Humbert : Théorie des substitutions et des équations algébriques, 2 h. — M. J. Hadamard : Calcul des variations ; applications à la Physique mathématiques, 2 h. — M. Brillouin : Propriétés générales des milieux constitués par des molécules anisotropes, 2 h. — M. Langevin : Les difficultés de la théorie du rayonnement, 2 h.

AUTRICHE

Wien ; *Universität.* — Escherich : Bestimmte Integrale, 3 ; Differentialgleichungen, 2 ; Proseminar für Mathematik, Seminar für Mathematik. — Wirtinger : Höhere Algebra, 3 ; Elementarmathematik, 2 ; Mathemat. Seminar, Mathemath. Proseminar (Uebungen zur Elementarmathematik), Am mathem. Seminar : Kurs über darstellende Geometrie (Leiter Mack). — Furtwängler : Differential- und Integralrechnung. Proseminar (Uebungen zur Differential- und Integralrechnung), Seminar. — Kohn : Einleitung in die synthetische Geometrie, 4 : Uebungen zu dieser Vorlesung, Geometrische Verwandtschaften, 2. — Tauber : Versicherungsmathematik I, 4 ; Mathematische Statistik I, 2. — Blaschke : Einführung in die mathematische Statistik, I, Teil, 3. — Hanni : Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, 1. — Hepperger : Sphärische Astronomie, 4. — Oppenheim : Neuere Methoden in der Mechanik des Himmels, 3. — Uebungen dazu, 1. Methode der kleinsten Quadrate in Anwendung auf astronomische und geodätische

Probleme, 2. Geschichte der Astronomie, I. — Ebert : Ausgewählte Kapitel aus der Bahnbestimmung mit Rechenübungen, 4. — Höfler : Logik (mit Uebungen), 4. — Die Hauptbegriffe und Hauptsätze der Unterrichtslehre (im Anschluss an das Logik-Kolleg), I. Anleitung zum Mittelschulunterricht der philosophischen Propädeutik (im Anschluss an das Logik-Kolleg), 2. Pädagogisches Seminar (mit Exkurs.).

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

---

1. Publications périodiques :

American Mathematical Monthly (The), published under the joint auspices of the University of Chicago and the University of Illinois, edited by B. F. Finkel, E. Slaught & G. A. Miller, Vol XIX, 1912.

Bollettino di Bibliografia e Storia delle Science matematiche, publicato per cura di Gino Loria. Anno XIV 1912. — Rosenberg & Sellier, Torino.

Bollettino di Matematica. Giornale scientifico didattico per l'incremento degli Studi matematici nelle Scuole medie. Diretto dal Dott. Alb. Conti. Anno XI. Roma, 1912.

Bulletin de la Société française de Philosophie. 12e année, 1912. Armand Colin, Paris.

Bulletins de la Classe des Sciences de l'Académie royale de Belgique, 1912. Hayez. Bruxelles.

Giornale di Matematiche di Battaglini, diretta da Ernesto Pascal, colla collaborazione di P. del Pezzo, A. del Re, R. Marcolongo, D. Montesano, G. Torelli, Vol L (3o della 3a Serie). Pellerano, Naples.

Intermédiaire des mathématiciens, dirigé par C.-A. Laisant, Ed. Maillet, A. Malúski, A. Boulanger. — Tome XIX, 1912. — Gauthier-Villars, Paris.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Herausgegeben von Em. Lampe. Band 40. Jahrgang 1909, I vol., 1110 p. — G. Reimer, Berlin, 1912.

Journal de Mathématiques élémentaires, publié par H. Vuibert. 36e année. 1911-1912. — Librairie Vuibert, Paris.

Mathematical Gazette (The), edited by W.-J. Greenstreet. — Vol. VI. George Bell & Sons, Londres.

Mathematics Teacher (The). A Magazine devoted to the interests of Teachers of Mathematics, published quarterly by ths Association of Teachers of Mathematics for the Middle States and Maryland. Editor : W. H. Metzler, Syracuse, N. Y. Vol. IV. 1911-1912.

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Blätter. Organ des Verbandes mathematischer und naturwissenschaftlicher Vereine an deutschen Hochschulen. 9. Jahrgang, 1912. — Kommissionsverlag, B. G Teubner, Leipzig.

Mathésis. Recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne, publié par P. Mansion et J. Neuberg. 3e série, Tome XII, 1912. — Hoste, Gand ; Gauthier-Villars, Paris.

Nieuw Archief voor Wiskunde. Revue publiée par la Société scientifique d'Amsterdam et dirigée par J.-C. Kluyver, D.-J. Korteweg et P.-H. Schoute. 2e série, X, 1910. — Delsman & Nolthenius, Amsterdam.

Nyt Tidsskrift for Matematik. Revue dirigée par C. Juel et V. Trier,

Série A, 23e année; série B, 23e année; 1912. — Jul. Gjellerup, Copenhague.

Pädagogisches Archiv. Monatsschrift für Erziehung, Unterricht u. Wissenschaft, herausgegeben von J. Ruska. 54 Jahrg. 1912. — Quelle u. Meyer, Leipzig.

Periodico di Matematica per l'Insegnamento secondario. Diretto dal Prof. G. Lazzeri. Série 3, vol. IX. — Raffaello Giusti, Livorno.

Revista de la Sociedad Matematica Espanola. Revue mensuelle, 1re année 1911-1912.— Ed. Arias, Madrid.

Revue de l'Enseignement des Sciences (La). 6e année. 1912. — Librairie Félix Alcan, Paris.

Revue du Mois, 7e année. Librairie Félix Alcan, Paris.

Mars, 1912. — V. Volterra : L'évolution des idées fondamentales du calcul infinitésimal.

Mai. — V. Volterra : L'application du Calcul aux phénomènes d'hérédité.

Août. — Henri Poincaré, discours de MM. Paul Appell et Paul Painlevé. — E. Borel : La philosophie des mathématiques et l'infini.

Revue de Mathématiques spéciales, dirigée par E. Humbert et G. Papelier. 22e année, 1911-1912. — Librairie Vuibert, Paris.

Revue générale des Sciences pures et appliquées, fondée par L. Olivier, dirigée par J.-P. Langlois. — Librairie Armand Colin, Paris.

15 octobre 1912. — A. Portuondo y Barcelo : Les lois infinitésimales dans l'analyse mathématique.

Revue semestrielle des publications mathématiques, dirigée par H. de Vries, P.-H. Schoute, J. Cardinaal, J.-C. Kluyver, W. Kapteyn. — Tome XX, 2me partie, octobre 1911-avril 1912. — Delsman en Nolthenius, Amsterdam 1912.

School Science and Mathematics. A Journal for Science and Mathematics Teachers in secondary Schools, vol XII, 1912. Smith and Turton, Chicago.

Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften, herausgegeben von A. Thaer. XVIII. Jahrgang, 1912. Otto Salle, Berlin.

Wiadomoski Matematyczne, dirigé par S. Dickstein. Tome XVI, 1912. — Varsovie.

Wiskundige Opgaven met de Oplossingen. Tome XII. Delsmann en Nolthenius, Amsterdam.

Wiskundig Tijdschrift onder Redactie van F.-J. Vaes, Chr. Krediet, N. Quint. VIII Jaargang, 1912. — P. Visser, Haarlem.

American Journal of Mathematics, edited by Frank Morley, Baltimore.

Volume XXXIV, nos 3 et 4. — L. Eisenhart : Minimal Surfaces in Euclidean Four-Space. — T.-H. Hildebrandt : A Contribution to the Foundations of Frechet's Calcul Fonctionnel. — P. Prentice Boyd : On the Perspective Jonquières Involutions Associated with the Ternary Correspondence. — H. Bateman : Some Geometrical Theorems Connected with Laplace's Equation and the Equation of Wave Motion. — L. P. Siceloff : Simple Groups from Order 2001 to Order 3640. — A. E. Young : On Certain Orthogonal Systems and Lines of the Problem of Determining Surfaces Referred to Them. — W. H. Jackson : Wallace's Theorem Concerning Plane Polygons of the Same Area. — R. A. Harris : On Harmonic Functions. — F. B. Williams : Curves on Quintic Scrolls. — O. E. Glenn : On the Structure of Forms, and the Algebraical Theory of n — Lines.

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 3e série, T. II.

A. Korn : Sur certaines questions qui se rattachent au problème des efforts dans la théorie de l'élasticité. — L. Roy : Sur les équations des tiges droites. — A. Buhl : Sur les applications géométriques de la formule de Stokes. — H. Dulac : Sur les points singuliers d une équation différentielle. — E. Turrière : Sur les congruences de normales qui appartiennent à un complexe donné. — D. Hilbert : Théorie des corps de nombres algébriques. Traduction de MM. A. Levy et Th. Got. — A. Buhl : Sur la tranformation de séries asymptotiques en séries de polynomes tayloriens.

Annales de la Société scientifique de Bruxelles. — Tome XXXVI.

M. Lecat : Sur les déterminants de classe impaire uniformes. — P.-J. de Gœdseels : Application de la géométrie analytique aux problèmes de topographie, de géodésie et d'astronomie. — J. Neuberg : Sur deux nouveaux théorèmes de géométrie réglée. — M. l'abbé L. Tits : Nouvelle simplification de la méthode la plus approximative et de la méthode de l'approximation minimum. — M. Lecat : Quelques applications nouvelles du principe de l'addition des tranches, particulièrement à l'étude des déterminants dont l'uniformité dépend de l'ordre. — L. Casteels : Sur le 2^n-gramme de Morgan. — A. Merten : Les Règles des mises dans les jeux de hasard.

2. Livres nouveaux :

Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland ; B. G. Teubner, Leipzig

C. Hossfeld. — **Der mathematische Unterricht an den höheren Schulen in den Thüringischen Staaten.** — 1 fasc. in-8. 18 p. ; M. 0.80.

W. Lietzmann. — **Stoff und Methode des Rechenunterrichts in Deutschland.** Ein Literaturbericht. — 1 fasc. in-8°, VII-125 p. ; 3 M.

W. Lietzmann. — **Stoff und Methode des Raumlehrunterrichts in Deutschland.** Ein Literaturbericht. — 1 fasc. in-8°, IV-88 p. ; 2 M. 80.

B. Penndorf. — **Rechnen und Mathematik im Unterricht der kaufmännischen Lehranstalten.** — 1 fasc. in-8°, VI-100 p. ; 3 M.

P. Treutlein. — **Der mathematische Unterricht an den Volksschulen und Lehrer-und Lehrerinnenbildungsanstalten in Süddeutschland,** mit Ausführungen von Henssing über Hessen, Cramer über Baden, Geck über Würtemberg, Kerschensteiner und Bock über Bayern. — 1 fasc. in-8°, 168 p. ; 5 M.

A. Wernicke. — **Mathematik und philosophische Propädeutik.** — 1 fasc in-8°, VII-138 p. ; 4 M.

ST.-A.-F. de Bouffall. — Démonstration complète du **Grand Théorème de P. Fermat.** — 1 fasc. in-8°. 5 p. ; Imprimerie Scientifique, Varsovie.

W. Burnside. — **Theory of Groups of Finite Order.** — 2me édition. 1 vol in-8°, XXIV-512 p. ; 15 sh. ; University Press, Cambridge.

Th. Caronnet. — **Cours de Trigonométrie.** — 1 vol. in-8°, 217 p. ; 4 fr. 50 ; Gauthier-Villars, Paris.

P. Crantz. — **Arithmetik und Algebra** zum Selbstunterricht I — 3me édition (Aus Natur und Geisteswelt, N° 120). — 1 vol. in-16. 125 p. ; 1 M. 25 ; B. G. Teubner, Leipzig.

A. Galle. — **Mathematische Instrumente.** (Mathematisch-Physikalische Schriften für Ingenieure und Studierende, herausgegeben von E. Jahnke). — 1 vol. in-8°, VI-187 p. ; 4 M. 40 ; geb. 4 M. 80 ; B. G. Teubner, Leipzig.

I. Ghersi. — **Matematica dilettevole e curiosa.** — 1 vol. in-16, VIII-730 p. 9 L 50 ; U. Hœpli, Milan.

A. Grüttner. — **Die Grundlagen der Geometrographie.** — 1 fasc. in-8°, 54 p. ; 0,80 M. ; Quelle & Meyer, Leipzig.

G. Hessenberg. — **Transzendenz von e und π.** Ein Beitrag zur höheren Mathematik vom elementaren Standpunkte aus. — 1 fasc. in-8°, X-106 p. ; 3 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

J. B. Messerschmitt. — **Physik der Gestirne.** (Bücher der Naturwissenschaften herausgegeben von prof. S. Günther. N° 13). — 1 vol. in-16, 195 p. ; relié 1 M. ; Philipp Reclam jun. Leipzig.

P. Meth. — **Theorie der Planetenbewegung.** (Mathematische Bibliothek, N° 8). — 1 vol. in-16, 60 p. ; M. 0,80 ; B. G. Teubner, Leipzig.

H. Renfer. — **Beiträge zur Krankenversicherung.** — 1 fasc. in-8, VIII-172 p. ; broché 5 fr. 50 ; Fehr'sche Buchhandlung, St. Gallen.

H. Renfer. — **Lehrbuch der Politischen Arithmetik** (Theorie und Uebungsbeispiele). — 1 fasc. in-8, VIII-190 p. ; broché, 5 fr. ; Fehr'sche Buchhandlung, St. Gallen.

J.-A. de Seguier. — **Théorie des Groupes finis.** Eléments de la théorie des groupes de Substitutions. — 1 vol. in-8, X-228 p. ; 10 fr. ; Gauthier-Villars, Paris.

H.-E. Timerding. — **Die Fallgesetze.** (Mathematische Bibliothek, N° 5). — 1 vol. in-16, IV-48 p. ; M. 0,80 ; B. G. Teubner, Leipzig.

K. Umlauf. — **Mathematik und Naturwissenschaften** an den deutschen Lehrerbildungsanstalten (Bund für Schulreform). — 1 fasc. in-8, 124 p. ; 3 M. 60 ; B. G. Teubner, Leipzig.

H. Vuibert — **Les anaglyphes géométriques.** — 1 fasc. avec planches, 32 p. ; 1 fr. 50 ; librairie Vuibert, Paris.

H. Weber. — **Lehrbuch der Algebra.** Kleine Ausgabe in einem Bande. — 1 vol. in-8°, 528 p. ; 14 M. ; Vierveg u. Sohn, Braunschweig.

A. Witting. — **Einführung in die Infinitesimalrechnung.** (Mathematische Bibliotheek, N° 9). — 1 vol. in-16, 73 p. ; M. 0,80 ; B. G. Teubner, Leipzig.

Schriften des deutschen Ausschusses für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. Heft 14 : Vorschläge für den mathematischen naturwissenschaftlichen und erdkundlichen Unterricht an Lehrerseminaren. Unter Mitwirkung von Fachmännern. — 1 fasc. in-8, V-49 p. ; 1 M 80. ; B. G. Teubner, Leipzig.

Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées. Edition française dirigée par J. Molk. — Tome IV, vol. 5 : *Systèmes défavorables* ; fasc. 1 : *Notions geométriques fondamentales* ; exposé d'après l'article allemand de M. Abraham, par P. Langevin. — *Hydrodynamique* (partie élémentaire) ; exposé d'après l'article allemand de A.-E.-H. Love, par P. Appell et H. Beghin. — B. G. Teubner, Leipzig et Gauthier-Villars, Paris.

ERRATA

Au résumé de la conférence du prince B. Galitzine, p. 371, dernier alinéa, lire : « il est nécessaire d'amortir fortement chaque sismographe. »

TABLE DES MATIÈRES

ARTICLES GÉNÉRAUX

Méthodologie et Notes diverses.

Organisation de l'enseignement.

Philosophie et histoire.

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

CHRONIQUE

Congrès internationaux et Sociétés savantes.

Articles divers.

Nécrologie.

NOTES ET DOCUMENTS

Commission internationale de l'enseignement mathématique. Compte rendu des travaux des sous-commissions nationales :

Cours universitaires :

BIBLIOGRAPHIE

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. *Sommaire ou annonce des principaux périodiques.*

2. Publications non périodiques.

TABLE DES NOMS D'AUTEURS

Cette table comprend les auteurs d'articles généraux ou d'articles de chronique, de lettres ou notes insérées dans la correspondance ou de comptes rendus bibliographiques.

Les numéros qui suivent chaque nom renvoient aux pages du volume..